

UTILIZACIÓN DE UN PROGRAMA INFORMÁTICO PARA ENSEÑAR GEOMETRÍA

(Ejemplo de CABRI-GÉOMÈTRE EN FRANCIA)

Bernard Capponi

Université Joseph Fourier. Grenoble. France

Traducción de Ana García Azcárate

I. Introducción

La imagen que se tiene de los programas informáticos para la enseñanza, corresponde a menudo al recuerdo que tenemos de los primeros programas que aparecieron hace ahora casi 15 años. Estos programas estaban pensados para guiar al alumno, muchas veces encerrándolo en una progresión o en un ejercicio sin posibilidad de salirse. Estos programas completamente cerrados, pueden aportar todavía hoy en día una ayuda puntual en la enseñanza, pero solo sobre algunos aspectos de entrenamiento (para el cálculo por ejemplo). No proporcionan al enseñante un entorno susceptible de adaptarse fácilmente a sus preocupaciones en la organización de su enseñanza.

Los programas **abiertos** no son específicos para la enseñanza. Ahí está el ejemplo de los tratamientos de texto o de los programas de dibujo o también en lo concerniente a Matemáticas, los programas trazadores de curvas o de tablas. Para la Geometría, el programa CABRI-GÉOMÈTRE entra en esta categoría.

II. ¿Qué utilidades tiene el CABRI-GÉOMÈTRE en clase?

Una particularidad de un programa **CABRI-GÉOMÈTRE** es que no tiene el propio programa, ejercicios o situaciones ya preparadas para la clase. Por supuesto se puede preparar ficheros, figuras, libros que describan las posibles utilidades del **CABRI-GÉOMÈTRE**, de hecho este artículo va a presentar algunas. Pero hay que entender al **CABRI-GÉOMÈTRE** como un entorno donde se puede trabajar la geometría, con la ayuda, para las construcciones y la investigación, de funciones específicas del programa. De esta

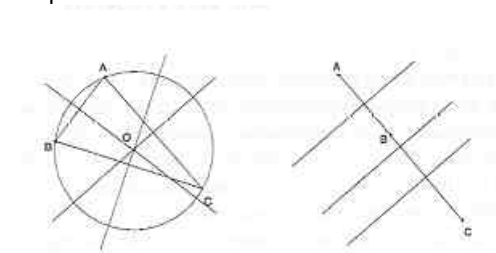
forma, se podrá construir fácilmente una perpendicular, una bisectriz, o una transformación como una simetría central. La investigación se facilita por la calidad del dibujo obtenido y sobre todo por la conservación de las propiedades en el desplazamiento de la figura. Además, toda construcción compleja podrá ser almacenada en forma de una macro-construcción y utilizada después de la misma forma que las herramientas ya presentes en los menús del programa. En lo que viene a continuación, describo algunas situaciones típicas, donde el programa es particularmente interesante para el aprendizaje de la Geometría.

1. ALGUNAS CONSTRUCCIONES CLÁSICAS REVISITADAS

Las construcciones constituyen claramente un dominio donde **CABRI-GÉOMÈTRE** es particularmente adecuado. Hay que resaltar, sin embargo, que las construcciones que se realizan con este programa, adquieren todo su significado cuando las propiedades que definen una figura se conservan al desplazar los objetos de base. De hecho, es de esta forma como se hace trabajar a los alumnos: para ser dada por válida, una construcción debe primero conservar las propiedades que la caracterizan. Este aspecto particular de **CABRI-GÉOMÈTRE** cambia la naturaleza del trabajo propuesto a los alumnos. Ya no se trata de un simple dibujo que deben realizar, sino que éstos deben dar una descripción de la construcción para que se pueda hacer la figura y que ésta conserve sus propiedades. De esta forma, trabajos clásicos realizados en los colegios adquieren un sentido diferente cuando se abordan con un programa como el **CABRI-GÉOMÈTRE**. Presentamos aquí, tres ejemplos para ilustrar esto.

A. CIRCUNCENTRO

La construcción (Fig. 11-a) necesita que se tenga al menos dos de las mediatrices para obtener el circuncentro. El alumno debe explicitar los objetos que permiten la construcción del centro. Pero el interés está, además de en la propia construcción, en la posibilidad de un **desplazamiento continuo**. En este caso, se puede estudiar las particularidades de la figura, por ejemplo, qué le pasa al triángulo si el centro está **en el interior** o **en el exterior**. ¿Qué pasa si el centro está sobre uno de los lados del triángulo? Se puede "ver" crecer el radio del círculo hasta su desaparición (Fig. 11-b), hasta un radio infinito con mediatrices paralelas. Una única figura permite visualizar todos los casos sin construcciones nuevas ni datos suplementarios: basta coger el punto con el ratón y desplazarlo.

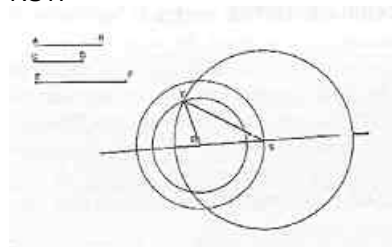


(fig. 11-a y 11-b)

B. UN TRIÁNGULO DE LADOS DADOS

Se le da al alumno, o se le hace construir, tres segmentos cualesquiera, siendo el trabajo propuesto el construir un triángulo que tenga como lados estos tres segmentos. Para realizar este trabajo, es bueno añadir al menú **construcción** una macro-construcción que permite construir un círculo de centro dado y que tenga como radio la longitud de un cierto segmento.

La figura 12 ilustra este ejemplo con los tres segmentos AB, CD, y EF y el triángulo construido RST.



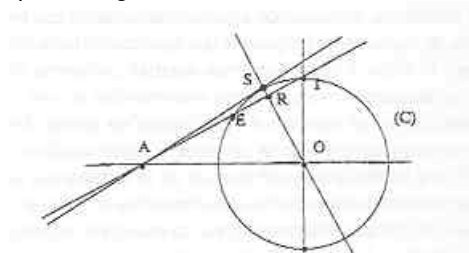
(Fig. 12)

La construcción es la misma que la que se haría con compás, pero se gana aquí la posibilidad de cambiar las longitudes de los segmentos iniciales y se puede, sobre la misma figura, estudiar las condiciones de existencia del triángulo y tratar así las desigualdades triangulares. El programa nos

hace ganar un tiempo precioso y permite comprender mejor el significado que tiene la existencia o no de un triángulo en función de las longitudes de los lados.

C. TANGENTE A UNA CIRCUNFERENCIA

El último ejemplo que daré de construcción es la de la tangente a una circunferencia dada, que pasa por un punto. Sin la ayuda de **CABRI-GÉOMÈTRE**, el interés de este tipo de construcciones es difícil de ser percibido por los alumnos, porque se obtiene una muy buena aproximación haciendo la construcción "a ojo" sobre el papel. No ven por consiguiente el interés de hacer una **buena construcción**. Con **CABRI-GÉOMÈTRE**, una construcción "a ojo" no puede convenir porque no se conserva por desplazamiento. **CABRI-GÉOMÈTRE** vuelve a dar sentido a esta construcción. Pero esta construcción permite también el plantearse la cuestión de la validez de una construcción hecha por un alumno y permita así dar sentido a la búsqueda de una prueba que valide esta construcción. Veamos aquí el ejemplo de la construcción hecha por un alumno de tercero, que dio lugar a un debate sobre la validez.



(Fig. 13)

La tangente debe ser trazada desde el punto A a la circunferencia (C) (fig. 13). Este alumno construye la recta (AO), a continuación hace la perpendicular (OI). La construcción de (AI) no da lugar a una tangente. Construye entonces la mediatriz (EI) que corta a la circunferencia en S. La recta (AS) es para el alumno la tangente buscada. Esta construcción fue dada al conjunto de la clase y dio lugar a un rico debate para reconocer si esta construcción da realmente una tangente. **CABRI-GÉOMÈTRE** puede dar una primera respuesta al colocar A muy cerca de la circunferencia. Pero una validación también viene dada por un razonamiento sobre la unicidad de la perpendicular llevada desde A a la recta (OS). En este contexto, el razonamiento nos da una respuesta que tiene sentido para los alumnos, en la medida que corresponde a una pregunta que ellos se habían hecho sobre esta construcción.

Estos tres ejemplos ilustran el papel que puede jugar **el CABRI-GÉOMÈTRE** en el dominio de las construcciones en la enseñanza de los colegios.

Para concluir este párrafo, se puede decir que el interés de las construcciones con el **CABRI-**

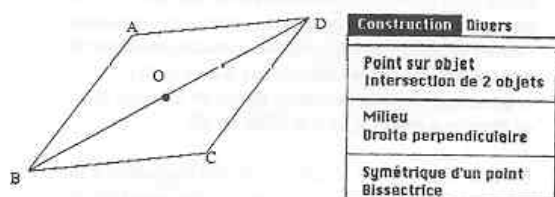
GÉOMÈTRE está en que éstas necesitan la explicitación de las propiedades y que con respecto al método del lápiz y papel se gana la posibilidad de recorrer las distintas clases de figuras.

2. SELECCIÓN EN LOS MENÚS

Otro tipo de utilización consiste en pedir también construcciones pero cambiando los diferentes comandos disponibles para los alumnos en los menús.

A. Construcción de un paralelogramo sin utilizar el comando "recta paralela"

El primer ejemplo es sencillo y clásico pero ilustra muy bien el interés de eliminar algunas de las herramientas de los menús. En un estudio sobre el paralelogramo en clase de 5º (alumnos de 12 años), si se suprime del menú de **CONSTRUCCIÓN** el comando **RECTA PARALELA**, se obliga al alumno a utilizar otras propiedades características del paralelogramo para su construcción. Por ejemplo, se puede construir el paralelogramo con el punto **MEDIO** y el simétrico con respecto a él (fig. 14). De esta forma, la caracterización del paralelogramo por la simetría central que tiene, es la utilizada.

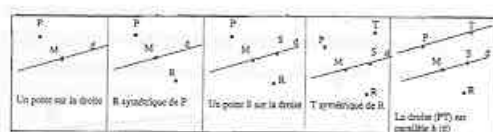


(Fig 14).

B. Paralela con menús reducidos

Otro ejemplo no lo da un estudio que he podido llevar a cabo sobre la construcción de una paralela a una recta dada, que pasa por un punto dado, sin disponer de los comandos **RECTA PARALELA**, ni **CIRCUNFERENCIA DEFINIDA POR DOS PUNTOS** (Capponi 93). Esta tarea realizada por alumnos de 4º ha mostrado que los alumnos desarrollan dos grandes tipos de estrategias:

- la primera utiliza las propiedades de la simetría ortogonal



(la recta que une un punto y su simétrico es perpendicular al eje de simetría), y las propiedades de las paralelas y de las perpendiculares (dos

rectas perpendiculares a una misma tercera son paralelas). Los alumnos explicitan bien en general las propiedades que entran en juego en su construcción.

- la segunda utiliza las propiedades de los puntos medios, que se ilustra en la siguiente construcción:

(Fig 15).

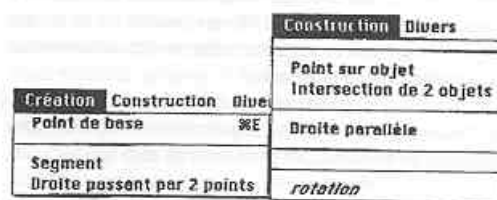
Los ejemplos de este tipo son numerosos. En este tipo de utilización, las propiedades geométricas se convierten en herramientas. Éstas se utilizan entonces en un dominio menos complejo que el de la demostración.

3. ESTUDIOS DE TRANSFORMACIONES

A. Polígonos y rotación

La idea de la "caja negra", desarrollada con el **CABRI-GÉOMÈTRE**, consiste en dar a los alumnos una macro-construcción que produzca una cierta construcción a partir de objetos iniciales dados; su tarea es entonces analizar el comportamiento de la figura producida para realizar una construcción idéntica. Un trabajo de este tipo ha sido estudiado en detalle en el marco del equipo **DIDATECH** (Boury V. 1993). Se puede aprovechar esta idea para el estudio de las transformaciones geométricas, como la traslación o la rotación, en los colegios.

Se puede, con la idea de los menús reducidos, proponer a los alumnos unas construcciones donde sólo se deja como herramienta disponible de construcción, la rotación. De esta forma, se puede proponer la siguiente tarea: construir un cuadrado de lado (AB) dado, disponiendo sólo de los menús de la fig. 16:



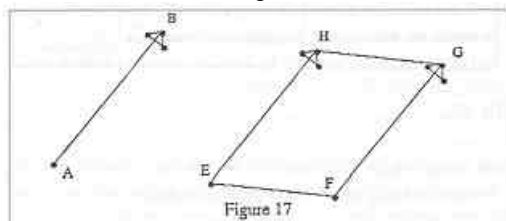
(Fig. 16).

Esta construcción hace operativa la rotación en una construcción. Este tipo de tarea no se puede concebir sin un programa como el **CABRI-GÉOMÈTRE**.

B. Traslación y vector

Se puede hacer un trabajo del mismo tipo con las traslaciones y los vectores. Es bueno para eso, el disponer de macros-construcciones de traslaciones, así como representaciones de

vectores como las de la fig. 17.



(Fig. 17).

A partir del vector AB y del segmento EF, se pide la construcción del paralelogramo EFGH.

Para concluir, CABRI-GÉOMÈTRE permite estudiar las transformaciones, primero, a partir de los efectos que producen. Se convierten después en herramientas de construcción.

4. SIMULACIONES

Otro ejemplo de utilización particularmente rico es el de las simulaciones. Se trata, de hecho, de modelizar, con la ayuda de CABRI-GÉOMÈTRE, una situación que no trata a priori directamente de geometría. Damos aquí un ejemplo de situación física y un ejemplo de tratamiento numérico.

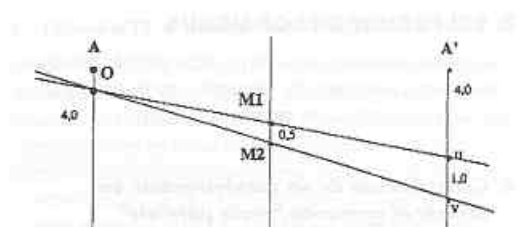
A. El ejemplo del espejo

El problema del espejo es clásico y se encuentra en numerosos materiales para la clase de 4º, en el capítulo de la propiedad de los puntos medios de un triángulo. Al haberlo utilizado en estas clases, he podido observar la dificultad que tienen los alumnos para representarse el fenómeno físico. Aquí, CABRI-GÉOMÈTRE va a permitir construir una simulación del fenómeno que va a dar sentido al tratamiento matemático que de él se hace.

En clase se puede empezar organizando un debate sobre el espejo, empezando por preguntas de este tipo:

"Tengo un espejo pequeño de 10 cm de alto. ¿Me puedo ver de cuerpo entero en él?"

La concepción más frecuente del fenómeno hace intervenir la distancia al espejo: cuanto más lejos se está, más se verá en el espejo. Las limitaciones explicitadas provienen del riesgo de verse "demasiado pequeño" si se está muy lejos. Estas concepciones son estudiadas por los alumnos en un trabajo para casa donde deben intentar determinar si es posible verse entero en el espejito. El problema puede entonces ser tratado con la ayuda de una simulación representada por la fig. 18:



(Fig. 18)

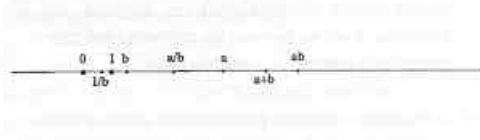
Sobre esta figura, AB representa un personaje que se mira en el espejo M_1M_2 y $A'B'$ es su imagen en una simetría de eje M_1M_2 . O es el ojo del personaje (lo hemos añadido para que los alumnos lo introduzcan como una variable de la situación). En esta simulación se puede avanzar o alejar el personaje con respecto al espejo y observar que lo que se ve en el espejo, es decir uv , no varía (su longitud permanece igual a 1). Al actuar sobre M_1 , se ajusta la posición del espejo (sin cambiar el tamaño) y al actuar sobre M_2 se aumenta o disminuye el tamaño del espejo. Esta simulación permite visualizar las diferentes variables de esta situación y observar antes de demostrarlo que la condición para que el personaje se vea entero en el espejo es que este tenga un tamaño al menos igual a la mitad de AB.

En esta situación, la simulación es indispensable para modelizar el fenómeno físico y para poder estudiarlo en buenas condiciones, utilizando por ejemplo una pantalla de cristal líquido para retroproyectar en clase.

B. Tratamientos numéricos

Otra modelización posible es la que se puede realizar con un eje, representando una variable numérica y su cuadrado, su inverso o su opuesto. Se puede construir así el producto, la suma o el cociente de dos números cualesquiera. Este tipo de representación puede llevar, por ejemplo, a la comparación de la suma y del producto de dos números o a la de la variación del producto de dos números cuando su suma es constante.

Por otra parte, este tipo de herramientas hace posible el estudio de las variaciones de las áreas de triángulos o cuadriláteros o las representaciones gráficas de funciones numéricas utilizando lugares geométricos de puntos.



(Fig. 19)

Las construcciones correspondientes son interesantes de estudiar con los alumnos y proporcionan aplicaciones del teorema de Thales o de Pitágoras.

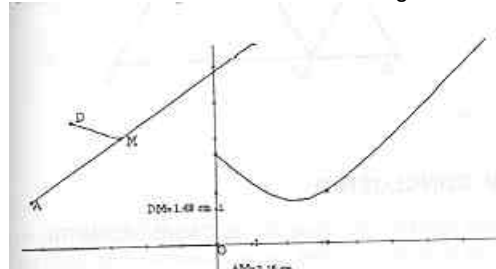
En el entorno de CABRI-GÉOMÈTRE II, que se está actualmente poniendo a punto en el laboratorio LSD2-IMAG, es posible, de forma sencilla, transferir números o medidas de elementos de una figura (longitud de un segmento,

área de un polígono,...) sobre un sistema de ejes. Al considerar el lugar geométrico de un punto que tiene como coordenadas estos números, se obtiene la curva que representa las funciones que modelizan las situaciones geométricas. Es posible, modificando ciertos elementos de la figura, darse cuenta de las posiciones particulares que corresponden a cada uno de los valores intermedios.

Presentamos aquí tres ejemplos:

Ejemplo 1

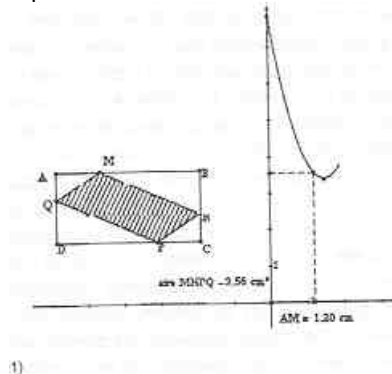
Sea un punto D, una semi-recta de origen A y un punto M sobre esta semi-recta. Se trata de estudiar la distancia DM en función de la longitud AMN.



(Fig. 20)

Ejemplo 2

Retomamos una situación propuesta las representaciones del CNAM:



(Fig. 21)

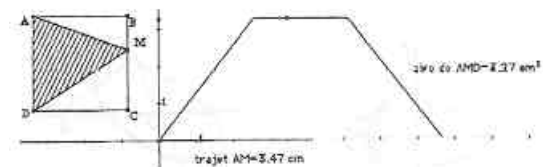
ABCD es un rectángulo. El punto M pertenece al segmento AB. Se construye N, P y Q tales que: $AM=BN=CP=DQ$. Se debe estudiar ahora las variaciones del área del polígono MNPQ en función de la longitud AM.

Es posible hacer variar la posición del punto M. El programa actualiza los valores de AM y del área así como la posición relativa correspondiente sobre la curva.

Ejemplo 3

ABCD es un cuadrado; M, un punto situado sobre

él. Se estudia el área del triángulo AMD en función de la posición del punto M. De manera general, las simulaciones permiten tratar de forma dinámica situaciones complejas. La versión II de CABRI-GÉOMÈTRE permite ir mas allá gracias a una acceso rápido a las funciones numéricas y utilizando una nueva filosofía para el tratamiento de los lugares geométricos.



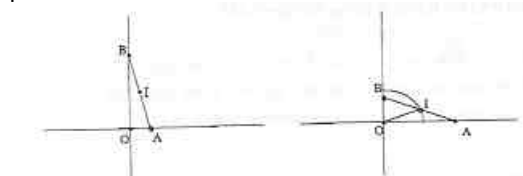
(Fig. 22).

5. TRATAMIENTO DINÁMICO DE LA FIGURA

Se trata aquí de situaciones donde el desplazamiento de un punto sobre un segmento, una circunferencia o una recta conduce a estudiar problemas de extremos o de invariantes de la figura, e incluso algunas veces de lugares geométricos. Este tipo de problema es prácticamente imposible de estudiar con alumnos de los colegios si no se dispone de una representación dinámica de la figura donde el punto que varia se desplaza efectivamente. La figura construida con **CABRI-GÉOMÈTRE** es utilizada para explorar el fenómeno que debe observarse y conduce en general a una demostración. Presento a continuación tres ejemplos.

A. La tabla de madera

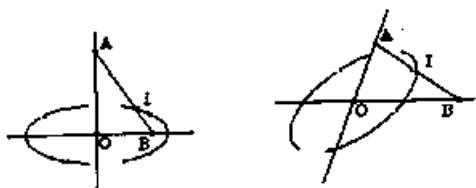
En esta situación, la construcción de la figura es ya un problema interesante para los alumnos de 3º. Se trata de representar una tabla de madera cuyas extremidades se apoyan en una pared vertical y en el suelo. Al desplazar el punto A, se hace resbalar la tabla y nos interesamos por la trayectoria del punto medio.



(Fig. 23)

Esta situación parece a menudo insólita a los alumnos pero se puede tratar con conocimientos que son del curso de 4º.

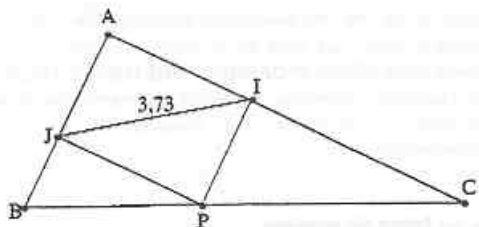
Se puede transponer fácilmente en el nivel de las clases de liceo (15 años) considerando otras posiciones del punto I sobre el segmento AB, distintas del punto medio, o sea, otros valores para el ángulo AOB. Se obtiene así una elipse (fig. 24).



(Fig. 24)

B. Mínimos

En este ejemplo, derivado del trabajo sobre el problema abierto del IREM de Lyon (ARSAC 88), los alumnos construyen un triángulo ABC rectángulo en A. P es un punto de la hipotenusa que se proyecta ortogonalmente en I y J sobre los dos lados del ángulo recto. El problema consiste en estudiar para qué posición de P, la longitud IJ es mínima.

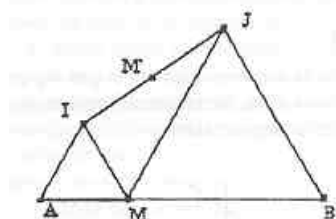


(Fig. 25).

Es la conservación del rectángulo PIAJ en el problema del mínimo lo que conduce a la solución y, en el problema de la tabla, es la invariancia de la longitud OI. De una manera general, el tratamiento dinámico de la figura pone en evidencia los invariantes y permite una exploración que conduce a la explicación del fenómeno observado y a una demostración.

C. Juntando los vértices de dos triángulos equiláteros

Este último punto se comprueba particularmente con el ejemplo siguiente, propuesto en el libro de 2º de la colección TERRACHER: sea un punto M perteneciente al segmento AB; se construye de un mismo lado de AB, dos triángulos equiláteros AIM y MJB (Fig. 26); se trata de estudiar el lugar geométrico del punto medio del segmento IJ. El tratamiento dinámico en el entorno CABRI-GÉOMÈTRE hace aparecer como invariantes las direcciones (AI) y (BJ) y permite orientar las investigaciones de los alumnos de forma útil.



(Fig. 26)

III. CONCLUSIÓN

Estos ejemplos de utilización del **CABRI-GÉOMÈTRE** en clase, muestran el interés que se puede encontrar al utilizar este tipo de programa con los alumnos. La utilización puede ser de varios tipos: o bien el alumno manipula él mismo el programa en el taller, o bien el profesor o el alumno lo utilizan como una representación interactiva delante de toda la clase con la ayuda de una pantalla de cristal líquido. El párrafo anterior nos da algunas informaciones sobre las condiciones de utilización en clase.

La utilización de **CABRI-GÉOMÈTRE** en clase nos parece una herramienta potente para hacer acceder a los alumnos a la noción de propiedad geométrica y esto desde el inicio de la clase de 6º (11 años). El programa ayuda a explorar las figuras, a sacar los invariantes y sirve de punto de apoyo para el razonamiento deductivo. La validez de una construcción por desplazamiento puede dar poco a poco sentido a la demostración. Notaremos, para acabar, que la ergonomía del programa y la calidad de la modelización geométrica son lo que ha permitido el éxito de las situaciones que se ponen a punto con los alumnos. Deseamos simplemente que todos los profesores puedan disponer rápidamente de los medios materiales que permitan el aprovechamiento pleno de las cualidades de este programa.

BIBLIOGRAFÍA

ARSAC, G., GERMAIN, G., MANTE, M. (1988) Problème ouvert et situation problème. IREM de Lyon.

BELLEMAIN, F., CAPPONI, B. (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. In Educational Studies 23 (1992), n° 1, pp. 59-97

CAPPONI, B. (1993) Modification des menus dans Cabri-géomètre, des symétries comme outils de construction. Petit x n° 33, pp. 37-68, 1992 1993

DLC (Direction pédagogique et Technologies Nouvelles) et CREEM (Conservatoire National des Arts et Métiers): Imagiciels en première et terminale, fonctions numériques

LABORDE, C. et CAPPONI, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches en didactique des mathématiques, vol 14 n° 1.2, pp. 165-210, 1994

LABORDE, C. (1992) Solving Problems in computer based geomtry environments: the influence of the features of the software. Zentralblatt für Didaktik des Mathematik. 92/4, pp. 128-35

TERRACHER, P. H. et FERACHOFLOUR, R. (1994) Mathématiques, Manuel pour la classe de seconde. Hachette Paris.