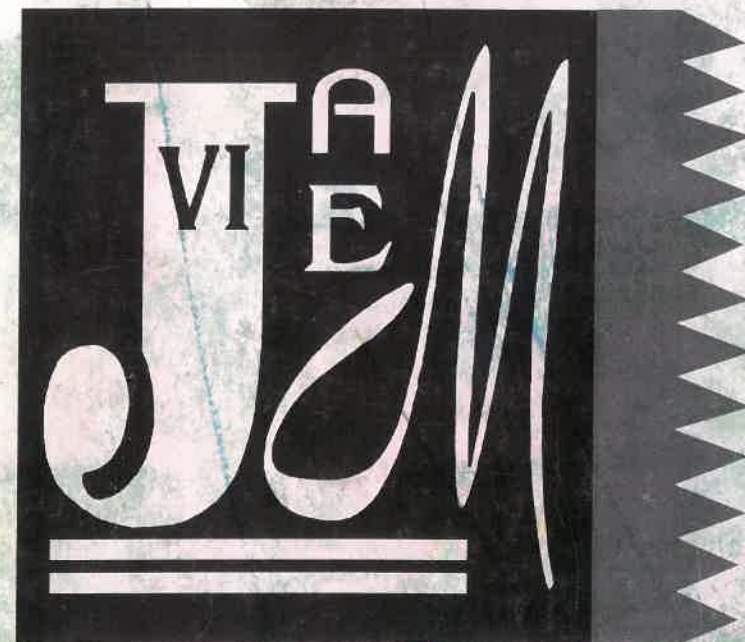


APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS



APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Sociedad Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prósper"

Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas.

ACTAS DE LAS VI JORNADAS SOBRE APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

*Celebradas en Badajoz
31 de abril y 1, 2 y 3 de marzo de 1993*

Jornadas convocadas por:
**Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas.**

Organizadas por:
**Sociedad Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prósper"**

**Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales
y de las Matemáticas de la Universidad de Extremadura.**

**Actas de las VI Jornadas
sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas**

Equipo de preparación de las actas:

Manuel Barrantes López
Carmen Cruz Cancho
José Cobos Bueno
Juan Gallardo Calderón
Antonio Molano Romero
Cipriano Sánchez Pesquero

Coordinadores:

Lorenzo J. Blanco Nieto
Luis M. Casas García

Edita: Sociedad Extremeña de Educación Matemática
Depósito Legal: BA - 242-1994
I.S.B.N.: 84-88956-02-9
Printed in Spain / Impreso en España
Fotocomposición: Lourdes Márquez Rey
IMPRIME: INDUGRAFIC, S.L.

COMITE ORGANIZADOR DE LAS VI J.A.E.M.:

Junta Directiva de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática:
"Ventura Reyes Prósper".

Presidente: D. Ricardo Luengo González.
Vicepresidente 1º: D. Miguel Antonio.
Vicepresidente 2º: D. Arturo Mandly Manso.
Secretario: D. Juan Gallardo Calderón.
Tesorero: D. Luis M. Casas García.
Vocales: D. Lorenzo Blanco Nieto;
D. Abilio Corchete González;
D. Juan M. Fernández Caballero;
D. Antonio Molano Romero;
D. Claudio Sánchez Alvarez;
D. José A. Sánchez Gullén;
D. José Macías Marín.

COMISION ORGANIZADORA LOCAL:

Dña. Mª del Carmen Cruz Cancho;
D. Cipriano Sánchez Pezquero;
D. José Cobos Bueno;
D. Manolo López Lozano;
D. Miguel Angel Bas Sánchez;
D. Manuel A. Calderón Trujillo;
D. Luis M. Casas García.

TESORERO GENERAL:

D. Luis M. Casas García

COORDINADOR GENERAL:

D. Lorenzo J. Blanco Nieto.

INDICE

Presentación	11
Introducción	13

Primera Parte. Conferencias

El tratamiento educativo del talento precoz en Matemáticas	17
La evolución de una concepción de objetivos de la enseñanza de las Matemáticas	29
Mitos y realidades de la Educación Matemática en España	41
Análisis comparado del currículo de Matemáticas (Nivel Medio) en Iberoamérica	63
Mesa Redonda. La Investigación en Educación y su incidencia en el aula	77

Segunda Parte. Ponencias desarrolladas en las Mesas de Trabajo

<i>Mesa nº 1: Matemáticas en Primaria</i>	
Matemática Básica para pensar mejor	93
Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria	105
<i>Mesa nº 2: Matemáticas en Secundaria</i>	
Matemáticas a los 12 y a los 18 años	117
Matemáticas en Bachillerato: Algunos problemas didácticos	127
<i>Mesa nº 3: Matemáticas en la Universidad</i>	
Las Matemáticas en la Universidad: Sus aspectos estéticos y práctico	147
<i>Mesa nº 4: Materiales y recursos</i>	
Selección y empleo de materiales a la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas	161
Calculadora Gráfica. Un recurso innovador en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	179
¿Qué Matemáticas deberíamos enseñar en la Secundaria del año 2000?	191
<i>Mesa nº 5: Resolución de problemas</i>	
Presentación de una propuesta metodológica para trabajar la resolución de problemas: Justificación y limitaciones	199
<i>Mesa nº 6: Evaluación en Matemáticas</i>	
Evaluación. Un nuevo diseño y sus formatos	219
<i>Mesa nº 7: Formación del Profesorado de Matemáticas</i>	
La Formación Permanente y los Profesores de Matemáticas de la E.S.O.	239
El Estudio de Casos como una aproximación metodológica al proceso de aprender a enseñar Matemáticas	252
<i>Mesa nº 8: Aspectos singulares en la enseñanza de las Matemáticas</i>	
Autoestima y Rendimiento Diferencial en Matemáticas	281
Accesibilidad del niño ciego al conocimiento matemático	308
Los Lenguajes Gráficos-Geométricos y el alumno ciego	319

Tercera Parte. Comunicaciones presentadas en las Mesas de Trabajo

<i>Mesa nº 1: Matemáticas en Primaria</i>	
Problemas aditivos de dos etapas con igual operación y estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5º de Primaria	341
Buscando las cuatro dimensiones en Primaria a partir del entorno	351
Taller: la distribución espacial como recurso lógico	359
El uso de estrategias de composición y comparación de figuras en Enseñanza Primaria	365
Introducción de la medida de superficie en la Escuela Primaria	371
Experiencias de probabilidad en Primaria	385
Taller: Los juegos de intercambio en el desarrollo del pensamiento matemático	393

Taller: La enseñanza por descubrimiento y el aprendizaje significativo en el área de Matemáticas	397
La relación de semejanza. Aplicación a la Enseñanza Primaria.....	411
Los gorros de mis primos recuerdan la belleza y eficacia de la Teoría Conjuntista	421
Mesa nº 2: Matemáticas en Secundaria	
Fractal: Atractor de aplicaciones contractivas	425
Introducción a la Criptografía	431
La Enseñanza de las Matemáticas en Secundaria Obligatoria. Contribución desde un programa de enseñar a pensar	437
Matemáticas: sugerencias para una metodología	443
Una experiencia metodológica sobre las curvas cónicas	449
Una didáctica para las funciones trigonométricas	455
Los cuerpos tridimensionales. Unidad Didáctica para Primero de B.U.P.	461
Mesa nº 3: Matemáticas en la Universidad	
Estudio de la convexidad en funciones reales de variable real	465
Estudio de las superficies mediante el uso de transparencias	469
Análisis descriptivo de errores en la resolución de ecuaciones diferenciales homogéneas	493
Análisis de la bibliografía matemática recomendada a los alumnos en los primeros cursos de E.U. I.T.I. de España	501
Nivel de significación en un Test de Hipótesis: Un análisis de su interpretación por estudiantes universitarios	509
Autoaprendizaje de los conceptos básicos del Álgebra Lineal utilizando software realizado en Authorware Profesional	517
Aspectos singulares sobre la demostración en Matemáticas	523
Mesa nº 4: Materiales y recursos	
Variables en la elección de material manipulativo	529
Álgebra y juegos en la E.S.O.	533
El modem va a la escuela	545
La Informática en la clase de Matemáticas	545
Mesa nº 5: Resolución de problemas	
Notas críticas sobre algunos aspectos de la Reforma en Matemáticas y su divulgación	551
Análisis de errores y dificultades en la resolución de problemas combinatorios por alumnos de Secundaria	557
Problemas estereotipados en la clase de Matemáticas	563
Resolución de Sistemas Simétricos por el Método de la Raíz Cuadrada	567
Concepciones sobre la Convergencia Estocástica y Heurística de la representatividad en una situación de simulación	571
Aproximaciones y estimaciones numéricas en la resolución de problemas	575
Mesa nº 6: Evaluación en Matemáticas	
Bibliografía de investigación sobre Evaluación en Matemáticas: Base de Datos-Biem	581
Construcción de instrumentos de medida para evaluar las Matemáticas	587
Evaluación del aprendizaje en Matemáticas: instrumentos de evaluación y cuestiones de investigación	593
Mesa nº 7: Formación del Profesorado de Matemáticas	
La Formación Básica para la Reforma del Profesorado de Matemáticas en Catalunya	603
Estudiantes para profesor, Matemáticas y aprendizaje: El núcleo de un problema.....	609
Profesores en Primaria en Formación: Algunas concepciones sobre la magnitud área	617
La Evaluación Formativa en Matemáticas como factor de eficacia docente: Fiabilidad de una prueba de conocimientos básicos	623
Mesa nº 8: Aspectos singulares en la enseñanza de las Matemáticas	
Educación bilingüe y rendimiento en Matemáticas	629
<i>Lista de asistentes a las VI J.A.E.M.</i>	635

Es para mí un honor, como presidente de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", organizadora de las VI JAEM hacer la presentación de estas Actas.

Para una Sociedad tan joven como la nuestra suponía un gran reto el encargo de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (F.E.S.P.M.) para la organización de las Jornadas que han sido un punto de referencia en este País para todos los profesores que deseaban mejorar la enseñanza de las Matemáticas. Sin embargo hemos de reconocer que había una circunstancia que diferenciaba estas Jornadas de las JAEM anteriores: Es la primera vez que la F.E.S.P.M. las convocaba, por acuerdo de su Junta Directiva, prestando su total asesoramiento y apoyo a la Sociedad Organizadora.

De esta manera hemos de reconocer que mientras Sociedades organizadoras de JAEM anteriores sintieron la soledad del "corredor de fondo" en todo el proceso de organización de sus Jornadas, nosotros contamos con el total apoyo de toda la Junta Directiva de la F.E.S.P.M., desde su Presidente, Tesorero, Secretario General, hasta el último vocal. Quede constancia aquí del agradecimiento de la Sociedad Extremeña a todos ellos.

Una vez asumido el reto, la Junta Directiva de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" decide convocar un seminario en el que participaran miembros de todas las Sociedades Federadas y que tenía como objetivo marcar las líneas directrices para la organización de las VI JAEM. Dicho Seminario se celebró en Jarandilla de la Vera (Cáceres) unos meses antes, tuvo una nutrida asistencia, se desarrolló en un ambiente muy cordial y proporcionó las ideas principales en torno a las cuales se organizó la estructura de las VI JAEM.

Las Jornadas se plantearon en consecuencia no como las Jornadas de nuestra Sociedad Extremeña, sino como las *Jornadas de todos*. Una de nuestras mayores preocupaciones fue entonces intentar que durante esos días se creara un clima adecuado que facilitara las relaciones humanas entre los compañeros, cuidando los pequeños detalles de atención al congresista: desde la información (a través de los alumnos de la Escuela de Formación del Profesorado que colaboraron en la organización), el apoyo de infraestructura que proporcionó el Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas y la Escuela Universitaria del Profesorado de Badajoz de la Universidad de Extremadura, la Secretaría del Congreso, la Coordinación del mismo, y hasta la propia intendencia (comidas, etc).

La organización de actividades paralelas (como la visita a la Ciudad de Cáceres) contribuyó a que muchos compañeros, que visitaban por primera vez Extremadura conocieran nuestra tierra y una parte importante de nuestro patrimonio a la vez que supieron valorar también la apertura, la amabilidad y el "calor" con que los extremeños saben acoger a sus invitados.

La calidad de las ponencias y comunicaciones es naturalmente responsabilidad de los autores, pero mi impresión, tras el intercambio de opiniones con muchos asistentes, es que se mantuvo un nivel muy digno de calidad durante las Jornadas y se tuvo la oportunidad de contractar ideas y experiencias entre los compañeros. Estas actas

reflejan el trabajo expuesto durante esos días, pero reflejan también muchas horas de reflexión, de experimentación, de investigación, y sobre todo, de interés por mejorar la enseñanza de la Matemática por parte de un colectivo de profesores de todos los niveles educativos.

Pero las VI JAEM no hubieran sido posible sin el apoyo de las Instituciones, Organismos, casas comerciales y patrocinadores en general, que se relacionan en las propias actas y a las cuales quiero dar las gracias en nombre de mi Junta Directiva.

Detrás de todo congreso existe un equipo humano que hace posible con su trabajo y dedicación el propio trabajo de los demás compañeros durante el mismo. Unos son más conocidos por llevar una tarea de más responsabilidad o de más contacto directo con el público; otros permanecen más en la sombra al hacer tareas de menos contacto con los asistentes. En la esfera de un reloj solo vemos las agujas, pero para que estas puedan marcar la hora, hay todo un conjunto de pequeñas piezas que no vemos, pero que funcionan en perfecta armonía; si falla una de ellas las agujas no van a marcar la hora correcta.

Por eso para mí son todos igual de importantes y a todos quiero agradecer su labor:

Gracias, en primer lugar, a toda la Junta Directiva de la Sociedad Extremeña por su labor continuada que no se limitó solo a los días de las Jornadas sino a varios meses antes y después de las VI JAEM. Gracias a las dos personas nombradas por nuestra Junta Directiva como responsables máximos de las dos áreas principales –de Organización y Economía– que sustentaron la organización del Congreso: D. Lorenzo Blanco Nieto (Coordinador General de Actividades) y D. Luis M. Casas García (Tesorero de las Jornadas).

Gracias a todos los miembros del Comité de Organización Local, a los miembros de mesas (Coordinadores y secretarios), a los alumnos que ayudaron en la organización de las Jornadas y al personal de la propia Escuela Universitaria del Profesorado de Badajoz.

Gracias al Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas y a su Director D. Constantino Ruiz Macías por la coorganización de las Jornadas.

Por último Gracias a los Ponentes, Comunicantes y Asistentes a las VI JAEM, por su trabajo, su comprensión por los pequeños fallos que se hubieran producido y por su trato cordial en su relación con todos los miembros de la Organización de las Jornadas.

Esperamos que, junto con el provecho que se haya podido obtener en cuanto a conseguir entre todos mejorar la calidad de la Enseñanza del Aprendizaje y de las Matemáticas, los días vividos en las VI JAEM ocupen un lugar entrañable en vuestros recuerdos.

Ricardo Luengo González

Presidente de la Junta Directiva de la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"

INTRODUCCIÓN

Fue al término de las Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Castellón, en Marzo de 1991, cuando la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas acordó que la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper" organizará las siguientes Jornadas Nacionales.

La aceptación de esta propuesta nos suponía un enorme pero interesante reto puesto que nuestra naciente Sociedad se iba a convertir en centro de atención de todas aquellas personas y grupos de trabajo relacionados con la enseñanza de las Matemáticas.

De acuerdo a los planteamientos propios de la F.E.S.P.M. se organizaron estas Jornadas con el objetivo de coordinar esfuerzos de personas, grupos y sociedades relacionadas con la Educación Matemática y facilitar el intercambio de experiencias y la difusión de trabajos de innovación.

Para tal fin, se desarrollaron conferencias generales, ponencias, comunicaciones; exposición de carteles, de materiales curriculares y didácticos; y otras actividades como seminarios sobre nuevas tecnologías o exposiciones de vídeos didácticos que consideramos de interés para el trabajo que se iba a desarrollar.

Los casi 600 asistentes se agruparon en torno a 8 mesas de trabajo que constituyeron la base de la actividad desarrollada. Los temas elegidos fueron:

1. Matemáticas en Primaria
2. Matemáticas en Secundaria
3. Matemáticas en la Universidad
4. Materiales y Recursos
5. Resolución de Problemas
6. Evaluación en Matemáticas
7. Formación del Profesorado de matemáticas
8. Aspectos singulares en la enseñanza de las Matemáticas

Las actas que ahora se presentan, recogen textos de profesores y profesoras de todos los niveles educativos. Son un reflejo de la labor realizada a lo largo de cuatro días de trabajo, y dejan constancia del quehacer de los enseñantes del Estado Español en torno a la enseñanza de las Matemáticas.

No hemos encontrado la fórmula que permitiera reflejar en estas actas el clima de entendimiento y cordialidad vivido durante el desarrollo de las VI J.A.E.M., pero sirvan las mismas, también, como recuerdo de aquellos días.

Lorenzo J. Blanco Nieto

Coordinador General de las VI J.A.E.M.

PRIMERA PARTE
CONFERENCIAS

EL TRATAMIENTO EDUCATIVO DEL TALENTO PRECOZ EN MATEMATICAS

*Miguel de Guzmán. Presidente de la Comisión Internacional de Educación
Matemática y Catedrático de la Universidad Complutense de Madrid.*

1. EL PROBLEMA

Con seguridad se encuentran en una comunidad escolar de una cualquiera de nuestras grandes ciudades 20 niños entre 12 y 14 años con un talento especial para las matemáticas. ¿Qué sucederá con ellos?. Muy probablemente transcurrirán sus años escolares inadvertidos, frustrados, sin fruto para la sociedad, por falta de un tratamiento adecuado; posiblemente van al fracaso y a la inadaptación por aburrimiento.

¿Qué sucedería si se pudiera atender de algún modo a su orientación? Sin duda una gran satisfacción personal para ellos, un gran beneficio para la sociedad, una gran utilidad para el avance de la ciencia y tecnología a la larga en nuestra comunidad.

¿Por qué en nuestro país no se hace nada a este respecto? Hay quienes piensan que tomar medidas positivas en esta situación contribuiría a fomentar el elitismo, al favorecimiento de unos pocos en detrimento de la atención igualitaria. Como más adelante veremos más pormenorizadamente, sucede lo contrario. No hacer nada significa que entre estos niños sólo se lograrán plenamente aquellos que provienen de medios familiares pertenecientes a un estrato superior de la sociedad. La justicia social y la atención al bien común deberían motivar la preocupación activa en este problema de quienes tienen la responsabilidad de dirigir la política educativa. Los gastos que una acción educativa razonable requeriría son mínimos y el rendimiento que de ellos se obtendría inmenso.

Sin duda alguna, la comunidad que logre encauzar el talento que tiene podrá ir mucho más allá que la que no se preocupa por conseguirlo. Existen bastantes ejemplos de acciones sostenidas por bastantes años en diferentes países por instituciones de muy diversas características: Estados Unidos (John Hopkins University, Minnesota), Hamburgo, Israel, ... Más adelante tendremos ocasión de proponer distintas formas posibles de proceder.

El primer problema consiste en la tarea de identificación del talento especial para matemáticas, lo cual no es una tarea trivial. A él dedicaremos la primera parte de nuestras consideraciones.

A continuación dedicaremos la atención a las diferentes estrategias educativas que se pueden llevar adelante con tales personas, tratando de señalar los inconvenientes que pueden presentar algunas de ellas y proponiendo una acción concreta que sería fácilmente realizable en cualquiera de nuestras grandes ciudades con un coste bien moderado.

Finalmente pasaremos revista a un estudio relativamente reciente de B.S.Bloom, en que se presentan las circunstancias que han favorecido la realización del talento de 20 profesionales relativamente jóvenes (30–40 años) en Matemáticas en Estados Unidos que, a juicio de sus pares, han resultado eminentes como matemáticos.

2. IDENTIFICACIÓN DEL TALENTO ESPECIAL EN MATEMÁTICAS

Actualmente en muchos países emerge el interés por el alumno dotado para Matemáticas, por diversas razones. En primer lugar se trata de estructurar nuevos programas para ambos extremos del espectro de talento, los deficientes y los sobresalientes. Por otra parte la resolución de problemas, uno de los ejes centrales de la educación matemática, atrae la atención sobre la forma de proceder de los especialmente dotados en Matemáticas. Las necesidades tecnológicas de la sociedad reclaman que se dedique atención especial a aquellos que sin duda en el futuro han de constituir la punta de lanza en el progreso técnico de la sociedad.

¿Cuáles son las características de estos niños y qué necesidades tienen?

En un artículo interesante en *Arithmetics Teacher* (Identifying the Gifted Student in Mathematics, Febrero 1981, 14–17) Carole Greenes ha señalado algunas de las características importantes que pueden ayudar a la identificación del talento especial en Matemáticas. De él entresacaré algunas ideas centrales, así como algunos de los ejemplos que propone.

Características generales de los especialmente dotados (no específicamente para Matemáticas).

Antes de 1950, la inteligencia era medida a través del IQ (*intelligence quotient*), pero después de los estudios de Guilford, Torrance,... se considera que las medidas normales del IQ no tienen en cuenta elementos muy importantes de la inteligencia humana, tales como la creatividad. Asimismo Marland, en 1972, ha propuesto diferenciar los tipos de inteligencia a través de sus posibles orientaciones concretas y líneas de acción específicas. Los trabajos de Renzulli se han centrado también en la creatividad y persistencia en la tarea.

Algunas de las características identificadoras del talento son: rapidez de aprendizaje, habilidades de observación, memoria excelente, capacidad excepcional verbal y de razonamiento, se aburren fácilmente con las tareas de repetición, revisión, rutinas, poseen un gran potencia de abstracción, capacidad de saltos intuitivos, se arriesgan con gusto en su exploración con ideas nuevas, son curiosos e interrogantes.

Características especiales para la resolución de problemas en matemáticas.

En matemáticas sucede que la enseñanza inicial se basa incorrectamente en algoritmos aritméticos rutinarios de modo que no hay lugar para identificar las aptitudes adecuadas para la matemática propiamente: las

habilidades de orden superior. Es necesario identificar con cuidado: hay alumnos que son buenos realizadores de ejercicios, van muy bien en las clases, es un placer tenerlos en el aula, hacen con gusto cuanto se les propone... Muy frecuentemente los especialmente dotados para las matemáticas no casan bien en este cliché. Hay que distinguir el estudiante bueno del estudiante especialmente dotado.

FORMULACION ESPONTANEA DE PROBLEMAS

Marga, once años, leyendo sobre la Estatua de la Libertad, se entera de que la boca mide casi un metro de anchura. Se interesa por lo que medirá el brazo. La profesora le dice que también lo puede encontrar en otro libro de consulta. A Marga se le ocurre que lo puede hacer ella misma aproximadamente. Mide su boca y mide su brazo... Su brazo es como 18 veces su boca. Así la estatua tiene un brazo de casi 18 metros.

FLEXIBILIDAD EN EL USO DE DATOS

Tienden a usar una gran variedad de ensayos y estrategias diversas para resolver problemas con los datos que se les dan.

Carol, 12 años, ante la tarea de saber qué fila de la tabla de números siguiente proporciona, al sumar los números de la fila, el número 665:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

“Los números de cada fila suman 5 veces el del centro. Así, el del centro de la fila buscada será $665/5=133$. la fila es

131	132	133	134	135
-----	-----	-----	-----	-----

HABILIDAD PARA LA ORGANIZACION DE LOS DATOS

Dan, 9 años, ante el problema de determinar el número de triángulos que se forman al trazar todas las diagonales de un pentágono regular: “triángulos formados por una región, por dos regiones,...”

RIQUEZA DE IDEAS

Dana, 11 años, ante el problema: ¿Cuántos km. por hora viajó la Sra. Johnson si se hizo 360 Km. en 6 horas? "Depende de cómo haya pisado el acelerador..."

ORIGINALIDAD DE INTERPRETACION

Randy, 8 años, trabajando la no conmutatividad de la resta con las reglas de Cuisenaire. 5—3 no es 3—5. Para Randy 3—5 no era 2 pero era "2 por debajo". Cuando la maestra le explica que a esto le llaman los matemáticos - 2: "Jo, qué listos".

HABILIDAD PARA LA TRANSFERENCIA DE IDEAS

Debbie, 13 años. Problema: ¿se pueden construir triángulos con segmentos de longitud 2,1,4 con segmentos de longitud 3,3,7?" No, yo he aprendido el año pasado que la distancia menor entre dos puntos es la línea recta. Así en un triángulo cualquiera, un lado es menor que la suma de los otros dos".

CAPACIDAD DE GENERALIZAR

Examinan, observan a fondo las relaciones y son capaces de encontrar pautas y generalizar.

Sherry, 12 años. Tarea: sumar: $1/(1 \times 2) + 1/(2 \times 3) + 1/(3 \times 4) \dots + 1/(8/9)$

Otras características interesantes: preferencia por la comunicación oral, a veces dificultad de explicar sus procesos de pensamiento por las combinaciones complicadas de que son capaces, preferencia por problemas más bien que por ejercicios,...

Reconocer estas características es tarea difícil para un profesor. Es necesario observación por el profesor y por los padres, realización de tests de inteligencia, creatividad,...entrevistas con los niños.

3. ¿QUÉ ES LO QUE SE HACE POR LOS ESPECIALMENTE DOTADOS?

Una visión de conjunto:

- más de 35 países toman a su cargo de modo eficaz el tratamiento educativo de los niños especialmente dotados
- son raros los países que no les prestan ninguna atención (España, aunque no siempre ha sido así: Escuela de Selección Obrera, durante el

período de la República) (Francia se encuentra entre los países que durante mucho tiempo han descuidado el problema, pero durante los últimos años hay signos de que el interés se está despertando).

DIFERENTES ESTRATEGIAS EDUCATIVAS

Escuelas especiales reservadas. Calasactius School en Buffalo.

- gran flexibilidad, estilo universitario, libertad de asistencia a clases
- coste altísimo
- una segregación insatisfactoria

Posibles alternativas en este sentido:

Escuela satélite de servicio a un grupo de escuelas para la atención a los alumnos de este tipo en diversas áreas sin segregación.

Una especie de escuela dentro de cada escuela que facilite la orientación de estos alumnos.

El estudio personal. Pero esto tiene sus peligros. El aprendizaje deber ser social y humano, en contacto con otras personas, por naturaleza y por eficacia.

La enseñanza individualizada.

- la enseñanza a distancia; inconvenientes
- tutoría personal; alto coste
- enseñanza individualizada en una clase heterogénea; dificultad grande para una clase como las que se dan en nuestro entorno; falta de preparación de muchos de nuestros profesores

La aceleración.

- la admisión escolar precoz
 - el paso a una clase superior
 - los programas concentrados (dos años en uno, tres en dos,...)
 - la aceleración específica (el programa de John Hopkins en matemáticas) (posibilidad de obtener créditos en aquello en lo que uno va a hacer después)
- Peligros de la aceleración. Inmadurez psicológica...

El enriquecimiento (enrichment).

- una orientación especial, libros, revistas, problemas, no substituyendo, sino completando lo que se está haciendo en la formación programada, fuera de las horas de clase normal...
- dificultades: una fuerte dicotomía interna en la atención a las tareas ordinarias y a estas especiales,...

3. UN PROYECTO REALISTA PARA UNA DE NUESTRAS GRANDES CIUDADES

A continuación se presentan las líneas fundamentales de un proyecto inspirado en los que se vienen llevando a cabo con éxito en diversas comunidades (Baltimore, John Hopkins University, Hamburgo,...) desde hace años.

Resumen. Se trata de detectar, orientar y estimular de manera continuada el talento matemático excepcional de unos 25 estudiantes de 12–14 años en una de nuestras grandes ciudades sin desarraigarlos de su entorno, mediante una orientación semanal a lo largo de dos años que se efectuará en cada fin de semana por cuatro horas.

El proyecto que aquí se propone podría ser puesto en marcha en un plazo breve y con un coste relativamente moderado. Constituiría un gran beneficio para los alumnos implicados en él. Podría ser de gran provecho para la sociedad si se logra dar con mecanismos adecuados para que sus mejores talentos en un aspecto importante para el desarrollo cultural de la misma no se malogren.

El grupo de edad más adecuado sobre el que se podría iniciar la acción parece ser el correspondiente al comienzo de la Enseñanza Secundaria (12–14). Es la etapa del comienzo del razonamiento formal. Los ensayos en otros países que pueden servir de modelos se han hecho con este grupo de edad.

Por razones prácticas este proyecto piloto debería quedar restringido al entorno de la ciudad.

La acción principal que se persigue inicialmente es la siguiente: elegir unos 25 alumnos para realizar con ellos una acción continuada a lo largo de dos cursos académicos sucesivos. Esta selección se puede realizar en las siguientes fases.

Primera fase. Realizar, con la colaboración de un equipo de psicólogos, un test adecuado para la selección de unos 60 alumnos entre una población de unos 300 alumnos que han pasado una primera criba realizada a través de la nominación de candidatos por los profesores de centros de EGB, a través de la publicación de los objetivos del proyecto y sus exigencias en las revistas educativas y de los periódicos de la ciudad.

Segunda fase. Realizar con estos 60 alumnos seleccionados en la fase anterior un curso de verano de 3 semanas de duración, a fines de junio y comienzos de julio. Podría ser un curso de 4 horas diarias, 5 días a la semana, 3 semanas, es decir 60 horas de clase. Tres materias: Estrategias de resolución de problemas, Álgebra, Geometría. Nivel suficientemente alto y adaptado a la capacidad de los estudiantes. Se trata de elegir, a la vista de los resultados del curso, unos 25 alumnos que tendrán una orientación adecuada durante los dos cursos académicos sucesivos, según se indica a continuación.

El trabajo principal: la orientación continuada.

La orientación continuada a lo largo de dos cursos académicos podría ser la siguiente:

— Una reunión de tres horas semanales desde octubre hasta junio. Podría realizarse los viernes por la tarde o los sábados por la mañana.

— Bajo la dirección de varios profesores elegidos adecuadamente, se trataría de dirigir y supervisar el trabajo de este grupo introduciéndolo más

profundamente en álgebra, geometría y posteriormente en análisis, informática y otras materias adecuadas.

— A ser posible, establecer una tutoría personal de cada uno de estos alumnos de modo que pudiera continuarse el contacto con ellos una vez concluido el período de duración del proyecto.

PRESUPUESTO INICIAL ORIENTATIVO PARA ESTAS ACCIONES CONCRETAS

Primera fase

Elaboración y realización de un test de selección	500.000
Información y difusión en folletos y periódicos	600.000
Distribución en Centros de Enseñanza	300.000

Segunda Fase (Verano)

Profesorado para 60 horas de clase a 20.000 pta/hora	1.200.000
Orientación continuada (Curso)	
Profesorado para 3 horas x 40 semanas a 20.000 pta/hora	2.400.000
Libros: 10.000 pta x 25 estudiantes	250.000
Fondos de libros adecuados para la realización del curso	400.000
Material fungible	
Instalaciones	
Dirección, programación, secretaría	

4. ¿CÓMO SE HAN LOGRADO AQUELLOS QUE HAN RESULTADO SER EXCEPCIONALES? ANOTACIONES AL ESTUDIO DE B.S.BLOOM Y SU EQUIPO

El estudio de B.S.Bloom (Developing Talent in Young People, Ballantine, New York, 1985) consistió en identificar 120 personas de entre 30 y 40 años en áreas muy diversas (tenistas, arquitectos, matemáticos, neurocirujanos, nadadores,...) que, a juicio de sus colegas, habían logrado alcanzar una muy notable categoría profesional. Cada persona seleccionada era entrevistada en profundidad, tratando de explorar cuáles habían sido las circunstancias de su niñez, adolescencia y juventud que hubieran podido contribuir al éxito que habían logrado. También sus familiares eran entrevistados para obtener una visión más completa. Los nombres de estas personas no se revelan en la obra. Los matemáticos estudiados fueron 20, 19 varones y una mujer. Es un dato interesante que el 14 de ellos eran hijos primogénitos.

Una observación importante que a mi parecer rebate la objeción sobre el elitismo en la intención de establecer algún mecanismo para todos los que se puedan detectar como especialmente dotados:

- 17 de los padres de los 20 tenían estudios superiores
- 11 de las madres tenían estudios universitarios

Esta situación parece indicar que, si no se hace nada por parte de la sociedad, sólo se logran plenamente aquellos talentos especiales que se dan en familias con medios suficientes y que se mueven en un ambiente favorecido.

A. OBSERVACIONES SOBRE LA NIÑEZ

¿CUÁLES SON LOS VALORES QUE SE RESPIRAN EN LA FAMILIA?

- educación y realización personal, especialmente intelectual eran en la mayor parte de los casos los valores característicos de los padres
- los padres creían que sería erróneo dirigir los intereses de sus hijos; su intención era tratarlos como a niños "normales"
- unos pocos de los padres imparten consejos prácticos generales, tales como "sé tú mismo", "trata de obtener una formación equilibrada", "saca el mejor partido de tus aptitudes", "trata de ser organizado"
- los padres estaban atentos para detectar y observar los signos de habilidad intelectual, no específicamente matemática de sus hijos
- lo que los matemáticos dicen haber recibido de sus padres: valoración del trabajo duro, de hacer las cosas bien, de ser preciso...
- los padres valoraban especialmente los logros intelectuales y a menudo dedicaban su propio tiempo libre a fomentar en sí mismos sus habilidades intelectuales

LA CURIOSIDAD COMO CARACTERÍSTICA MAS COMÚN EN LA INFANCIA DE ESTOS MATEMÁTICOS

- la nota que aparece como peculiar de los padres: la naturaleza de sus respuestas a las preguntas de sus hijos; respondían a sus cuestiones seriamente, a menudo animándoles a preguntar más
- pocos matemáticos recuerdan haber estado especialmente interesados por los números cuando eran pequeños

APRENDIZAJE INICIAL

- casi todos los padres hacen notar que sus hijos se sentían satisfechos jugando sólo; eran capaces de centrarse en tareas complejas durante largos períodos de tiempo
- los padres no pretenden imponer sus propios intereses a sus hijos
- pero jugaban un papel muy importante en el estímulo de los propios intereses de ellos
- no había ningún esfuerzo especial de los padres por subrayar las matemáticas, pero tampoco por rehuirlas

CONVERSACIONES FAMILIARES

- la mayor parte de los padres pensaban que no debían enseñarles a sus hijos a leer o la aritmética antes de lo que se las enseñaban en la escuela
- las conversaciones familiares eran mencionadas por la mitad de los matemáticos como una parte importante de su desarrollo en los primeros años; en particular en las comidas
- cuando los matemáticos eran pequeños, sus padres podían contestar a sus preguntas, pero pronto las preguntas se hacían más y más complicadas; los padres entonces enseñaban a tratar de encontrar las respuestas por sí mismos (consulta de libros, de personas,...)
- los matemáticos comenzaban a valorar el proceso de investigación; no querían que se les dijese la respuesta, querían encontrarla por sí mismos

LECTURA Y PROYECTOS INDIVIDUALES

- 15 de los 20 matemáticos eran lectores entusiastas en cuanto aprendieron a leer
- gran parte de sus lecturas eran por placer, poco a poco se convirtieron en lecturas con un propósito determinado
- con la lectura se fueron haciendo más independientes de sus padres; los padres le animaban a seguir sus propios intereses
- como la mitad recordaban haber tenido un interés en proyectos científicos o de construcción de modelos antes de los doce años
- los padres pensaban que su papel era facilitar a los niños el material que necesitaban

AÑOS DE INICIACIÓN EN LA ESCUELA

- 19 de los 20 matemáticos fueron a la escuela pública ordinaria, el otro fué a un escuela experimental de una universidad
- en general estaban lejos del entusiasmo respecto de su experiencia escolar (6 tuvieron dificultades para aprender a leer, 8 tuvieron dificultades para relacionarse con sus compañeros)
- la mayor parte de los matemáticos pensaban que su experiencia en la escuela elemental era totalmente ordinaria y se consideraban esencialmente como los otros niños
- en general eran buenos alumnos en la escuela elemental (13 parecen haber sobresalido en todas las materias, 3 sólo en lo que les interesaba y 4 pensaban que eran más o menos del montón)
- la aritmética no parece haber jugado ningún papel especial para ellos (este dato parece no hablar muy favorablemente del tipo de iniciación a la matemática común hoy en las escuelas de prácticamente todo el mundo)

— en general ninguno de sus maestros notaban nada especial en ellos; los mejores maestros les parecen a los matemáticos aquellos que les proporcionaban libros o materiales para trabajar por sí mismos.

LOS AÑOS INTERMEDIOS

Comienzo de la junior high school (14 años) hasta los 18, fin de la high school.

PADRES Y OTROS

— continúa la gran influencia de los valores de los padres
— papel de los padres en cuatro categorías:
apoyo moral y material (libros y material para sus experimentos)
trabajo en común con sus hijos y conversaciones con ellos sobre matemáticas y ciencias

los padres de 5 de ellos directamente buscaban oportunidades especiales para sus hijos (programas de verano o admisión temprana en la universidad)

— lo que más valoraban era el proceso de pensamiento: observar con asombro, explorar, cuestionarse, desear saber más, querer averiguar por sí mismos

APRENDIZAJE INDEPENDIENTE EN MATEMÁTICAS Y CIENCIA

— 16 matemáticos de los 20 trabajaron independientemente en matemáticas en la escuela secundaria

— uno de ellos ya hacía investigación matemática en la escuela secundaria (junior high school)

— al menos 7 leían libros que sus padres o hermanos habían usado en la universidad

— revistas científicas estaban presentes en la casa de al menos la mitad de los 20

— los matemáticos consideraban menos importante lo que entonces aprendían y estudiaban que el hecho de que eran capaces de hacerlo por sí mismos y con placer

— lo más significativo de la enseñanza secundaria fue que les permitió seguir aprendiendo y estudiando por sí mismos; en algunos casos sabían más que sus maestros; la táctica más frecuente que éstos seguían era dejarles estudiar por sí mismos

SU ENSEÑANZA REGLADA

— 18 siguieron los programas usuales

— 7 de los 20 siguieron algún programa especial, siendo acelerados (3 años en dos)

— 9 siguieron al menos un curso de cálculo (raro en USA)

— todos los 20 fueron considerados excepcionales en matemáticas y ciencias (aunque dos de ellos recibieron notas medianas)

— 12 fueron considerados superiores en todas las otras materias

— la mitad tenían un recuerdo negativo de la high school, la otra mitad un recuerdo positivo en general

— la mayor parte no recordaban ningún profesor extraordinario en su escuela secundaria

— lo que les impresionaba era el profesor que “conocía bien su materia” o que estaba genuinamente “interesado” por ella hasta el punto de transmitir su entusiasmo en el proceso de aprendizaje

— más de la mitad de los matemáticos creían que sus maestros les reconocían como buenos estudiantes, independientemente de que hicieran poco por ellos

EXPERIENCIAS ESPECIALES

— 6 de ellos fueron miembros del equipo matemático de su escuela

— 3 participaron en competencias estatales

— 2 en fiestas científicas

— 2 en la Westinghouse Talent Search

— 5 asistieron a programas especiales de la National Science Foundation

— 2 fueron elegidos para un programa de sábado en una universidad local

— estas experiencias fueron importantes para ellos por diferentes motivos:

— contenido distinto del programa escolar

— oportunidad de explorar los temas que les atraían y de desarrollar sus propias técnicas para resolver problemas

— oportunidad de ser reconocidos en aquello que les entusiasmaba hacer

SER DIFERENTE

— aunque tenían amigos muy pocos de ellos aparecían como “sociables” en el sentido de pertenecer a clubs o de ejercer diversas actividades extracurriculares

— se caracterizaban a sí mismos como “buenos” estudiantes, tal vez mejores que la mayoría (especialmente en matemáticas y ciencias)

ALGUNAS REFERENCIAS SOBRE EL PROBLEMA

Benjamin S. Bloom, Developing Talent in Young People (The dramatic findings of a ground-breaking study of 120 immensely talented individuals reveal astonishing new information on....) (Ballantine, New York, 1985)

Aaron R. Coriat, Los niños superdotados. Enfoque psicodinámico y teórico (Herder, Barcelona, 1990, edición francesa 1987)

N.Fisher, H.Keynes, Ph.Wagreich (editors), Mathematicians and Education Reform, Proceedings of the July 6-8, 1988 Workshop (American Mathematical Society and Mathematical Association of America, Providence, 1990)

Joan Freeman (dirección), Los niños superdotados (Santillana, Madrid, sin fecha, primera edición inglesa 1985)

J.C.Stanley, D.P. Keating, L.H. Fox, Mathematical Talent. Discovery, description and development (The Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore and London, 1974)

D.P. Keating (editor), Intellectual Talent: Research and Development (The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1976)

(Las dos publicaciones anteriores son Actas del Simposio anual correspondiente Hyman Blumberg on Research in Early Childhood Education)

B. Zimmermann, Mathematically gifted students. How to find them and foster them en Articles on Mathematics Education (Erkki Pehkonen, editor) (Research Report 55, Department of Teacher Education—University of Helsinki, Helsinki 1987) (una descripción paso a paso del proyecto que se lleva a cabo en Hamburgo para la detección y fomento del talento especial en Matemáticas, proyecto basado en el de Johns Hopkins University)

LA EVOLUCION DE UNA CONCEPCION DE OBJETIVOS DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Ubiratán D'Ambrosio.

Presidente de la Academia Brasileña de las Ciencias.

1. ¿QUE ES LA EDUCACION MATEMATICA?

¿Qué es? Una rama de la Educación. No se puede sacar la educación Matemática de su lugar entre las distintas áreas de la educación. Pero, ¿sería también una especialidad de Matemáticas?: claro, todo tiene que ver con las Matemáticas. Entonces, ¿la distinguiremos como una disciplina autónoma?. ¿No podríamos hablar simplemente de Educación Matemática como un estudio o un desarrollo de técnicas o modos más eficaces para enseñar Matemáticas?. ¿O como estudio de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas?, ¿O como una metodología de su enseñanza en un sentido amplio?. Claro, no se puede negar que la Educación Matemática aborda todos estos y otros desafíos de la Educación. No obstante, hay ciertas características que hacen a la Educación Matemática merecedora de un espacio propio.

La única disciplina que llegó, en los sistemas educacionales, a alcanzar un carácter de universalidad fué la Educación Matemática. A pesar de que, a nuestro modo de ver, la desconceptualización de las Matemáticas sea uno de los mayores equívocos de la educación moderna, lo que efectivamente se constata porque la misma Matemática es enseñada en todo el mundo, con algunas variantes que son más bien estrategias para tener un contenido universalmente acordado como debe ser el bagaje de todo alumno que pasa por un sistema escolar. Las Matemáticas son la única disciplina escolar que aproximadamente se enseña de igual forma y con el mismo contenido a todos los niños del mundo. Es la única disciplina que permite un estudio comparativo de evaluación del rendimiento escolar y donde los Instrumentos de evaluación son los mismos (como fué el SIMS: Second International Study of Mathematics Education y debería ser el TIMS: Third International Study of Mathematics and Science). La crítica a esta postura está en el origen del Programa Etnomatemática.

Se ha procurado dar a las Ciencias el mismo carácter de universalidad, sobre todo debido a su creciente estilo matemático, pero las dificultades han sido muy grandes. El TIMS está intentando hacer frente a esa dificultad con la elaboración de unos instrumentos únicos de evaluación, integrando las Matemáticas en las Ciencias. Hay grandes dificultades pero la integración parece ser una tendencia. En otros términos, es posible que veamos desaparecer las Matemáticas como disciplina autónoma en las evaluaciones globales y consecuentemente en las evaluaciones generales.

Aparentemente el final del párrafo anterior se contradice con el tono del inicio de este trabajo. Si la Matemática es de tal forma abarcante y la Educación Matemática tiene tantas especificaciones, ¿cómo pensar en la eliminación de test específicos de Matemáticas, su integración en las Ciencias y su no posible desaparición de los currículos escolares como disciplina autónoma?. En verdad no hay contradicción. Hay un nuevo tipo de desafío que es el reconocimiento de su total presencia en el sistema escolar, de su importancia en todas las capas de la sociedad pero sin una identidad disciplinar restrictiva. Obviamente estaremos así encaminando nuestras reflexiones en dirección a una postdisciplinaridad. Sorprendentemente la Historia nos enseña que esta fase está muy próxima a la predisciplinaridad que prevaleció hasta el siglo pasado y que alcanza, principalmente, a los sectores de conocimiento de mayor importancia, como es el caso de las Matemáticas. Su desaparición de los sistemas escolares refleja su integración total en la sociedad. La artificialidad de un tratamiento disciplinar en los sistemas escolares se vuelve incompatible con su presencia natural en el día a día.

Esta interpretación de las disciplinas cambia radicalmente el papel de los educadores, transmisores de conocimientos, para facilitar el aprendizaje. Este nuevo papel es evidentemente el ambicioso Proyecto 2061 de la American Association for the Advancement of Science. Véase AAAS (1989).

2. LAS MATEMÁTICAS COMO UNA FORMA DE CONOCIMIENTO Y ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE COGNICIÓN

Las Matemáticas representan la esencia de lo que se ha llamado pensamiento moderno y que a partir del siglo XVII se extiende gradualmente por todo el mundo con creciente importancia. Esta naturaleza, que algunos se sentirían más cómodos si yo dijese simplemente naturaleza de lo que se ha llamado ciencia moderna y tecnología en vez de pensamiento moderno, se manifiesta a partir del siglo XVIII.

Hoy es imposible trabajar en ciencias bio-médicas, por ejemplo, sin un instrumental matemático sofisticado. La sociedad, como todo, está impregnada de las Matemáticas. Como ejemplo tenemos un famoso artículo publicado en la década de los setenta en la revista The Economist de Londres con el título "you can't be a citizen of the XXth century without mathematics". Con la llegada de la Informática, esta importancia se acentúa más. Y esto no es menos verdad en las llamadas ciencias humanas. Las vertientes más ricas de la Antropología tienen en las Matemáticas un importante instrumento de trabajo, así como la Psicología. De la misma manera la Historia, incluida la Prehistoria y la Paleohistoria, así como la Lingüística. También la Historia del Arte recurre frecuentemente a las

Matemáticas, así como el propio arte. Estaremos entrando en lo que Michèle Emmer llama un nuevo renacimiento (1992). Y las religiones siempre han tenido mucho que ver con las Matemáticas, siendo las adivinaciones (técnicas divinas que nos aproximan a los dioses conocedores del futuro) casi siempre basadas en ideas matemáticas. Existe así mismo, una Geometría Sagrada y una Aritmética Sagrada. Y no encontramos, en lo cotidiano de todos los pueblos y todas las culturas, actividades que no tengan de alguna forma relación con las Matemáticas. Repito, alguna forma de Matemática. Pero no necesariamente la matemática que está en los currículos. Y así renocemos el espacio para la Etnomatemática.

Ha habido, a lo largo de la Historia, grandes polémicas sobre la naturaleza de la Matemática, siendo causa de las más acérrimas controversias. Consecuentemente, la Matemática es también, de todos los sectores del conocimiento, la que causa mayores controversias filosóficas. Y en la que hay mayor discordancia epistemológica. Desde posiciones radicalmente constructivistas a empiristas naturales, así como idealistas puros y materialistas irreductibles, los especialistas en Filosofía de la matemática han sido muy intransigentes en sus posiciones. La llamada Filosofía de la matemática tal vez ha sido el área que sugiere las mayores contradicciones en varias ramas de la Filosofía. Desde la antigua Grecia en la que los (impulsos) de lo irracional y de lo infinito fueron dominantes, hasta nuestros días, las corrientes filosóficas han encontrado en la Matemática sus mejores armas para su confrontación. El propio concepto de verdad está asociado con la Matemática y esto tiene notables influencias en la educación del individuo, como cita Borba (1992). Esto llega hasta tal punto que los sistemas políticos y sobre todo económicos se basan en teorías matemáticas.

No se puede negar que enseñar una disciplina con unas características tan peculiares como es la Matemática abre un enorme espacio para consideraciones específicas de cognición, de organización intelectual y social del conocimiento y de la política, en definitiva de formas de explicación, de entendimiento y de manejo de la realidad. No es sin razón que la raíz de la cual se origina la palabra Matemática es la raíz griega matema que significa justamente eso: explicación, entendimiento, manejo de la realidad, que son objetivos más amplios que los simples de contar y medir. En verdad, alcanzó un aprendizaje "superior" y por eso los estudios matemáticos -en sentido de teorías abstractas como las organizadas por los griegos- eran destinados a la preparación de las elites dirigentes, como se ve claramente en la "República de Platón".

La complejidad de la Matemática, sobre todo por sus relaciones con otras áreas de conocimiento y por sus implicaciones sociales, políticas y económicas, justifican, desde la antigüedad, reflexiones, teorías y estudios sobre su enseñanza. A pesar de que las matemáticas en formas diversas, en

verdad etnomatemática, sean partes de todas las culturas, ellas tienen una posición privilegiada en el mundo griego. Son por excelencia ejercicios de reflexión, la forma más alta de pensamiento, algo como un juego tan bien ilustrado por Hermann Hesse en su gran obra "El juego de los abalorios".

3. ALGUNAS CONSIDERACIONES DE NATURALEZA POLITICA

La importancia de la Matemática es efectivamente considerada en el sistema escolar como un avance de la ciencia moderna y la tecnología, sobre todo a partir del siglo XVIII y gana un importante espacio en la educación cuando se alcanza la modernidad europea. En el siglo pasado la preocupación por la enseñanza de la Matemática tiene un gran impulso gracias a la obra de Felix Klein. Realmente es también desde esa época, mediados del siglo XIX, cuando la disciplina Educación se establece como una disciplina académica. Con la llegada de la Educación para todos, consecuencia natural de la industrialización, y con la aparición de la universidad moderna en Alemania, es cuando surgen las primeras cátedras de Educación. Casi al mismo tiempo se inician reflexiones sobre la Matemática como un tema escolar con tales especificaciones que justificaban las reflexiones sobre su enseñanza.

La importancia de la industrialización es evidente en el esfuerzo de Felix Klein, uno de los más distinguidos matemáticos del siglo pasado, consagrado por sus investigaciones en las áreas abstractas de Análisis. El defiende la integración de varias modalidades de escuelas superiores en Alemania justamente como un objetivo de incentivar las ciencias y la industria y ve en la Matemática Aplicada y elemento esencial para ello. Así propone una preparación uniforme de Matemáticas en las escuelas secundarias que permitiría, en todas las modalidades de escuelas superiores, un elevado nivel de estudios matemáticos. Las escuelas secundarias deberían introducir Matemáticas más avanzadas, como Geometría Analítica y Cálculo, tratadas con patrones de rigor. Pero esos asuntos solamente eran tratados con rigor en los cursos universitarios, una modalidad iniciada en las décadas de 1820 y 30 por Agustín Cauchy. Un tratamiento riguroso, en la enseñanza secundaria, no era posible.

Felix Kline se propone crear un currículo de Matemática moderna, incorporando los avances de la época. Naturalmente, entonces como hoy, la formación de los profesores era esencial y un profesor debe dominar el asunto de sus aulas desde un punto de vista crítico y más avanzado. El curso de Felix K. fue publicado en forma de libro y se convirtió en un clásico, tratando la Matemática elemental desde un punto de vista avanzado. La preocupación por la enseñanza de la Matemática entre los matemáticos era tal que el 1908, durante el Congreso Internacional de Matemática que se celebró en Roma, fué fundada la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática, precursora de la actual Comisión Internacional de Instrucción

Matemática (ICMI: International Commission of Mathematics Instructions). A partir de entonces, la Comisión se reúne durante todos los Congresos Internacionales de Matemática, que se realizan cada cuatro años. Solamente en 1968 se acordó realizar, también cada cuatro años, Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME: International Congress of Mathematics Education), organizados bajo las responsabilidades del ICMI, nuevo nombre de la comisión fundada en 1908 y que en 1950 se transforma en una comisión especializada de la Unión Matemática Internacional (IMU: International Mathematical Union) es una de las ONG's (organizaciones no gubernamentales) bajo la tutela de la UNESCO.

4. LA EDUCACION MATEMATICA COMO UNA DISCIPLINA

Desde el inicio del siglo, investigaciones en Educación Matemática ya habían encontrado eco en los medios académicos. Una síntesis histórica de las investigaciones en Educación Matemática fue recientemente publicada por Jeremy Kilpatrick (1992).

La aparición de una literatura propia, con libros y revistas especializadas, bien como de grados académicos (clases) o de Departamentos de Educación Matemática, son indicadores decisivos en el reconocimiento de una nueva disciplina. A partir de ese momento las especialidades se comienzan a caracterizar. Áreas de investigación son definidas y se reflejan en las programaciones de los propios congresos internacionales. El trabajo de la Comisión de Programa de un congreso es efectivamente un trabajo de investigación donde se intenta analizar la literatura o lo que ha recibido mayor atención por parte de los investigadores y naturalmente quienes han sido los propulsores de esas nuevas direcciones. Los resultados de esta investigación se traducen en el programa del congreso.

El tercer Congreso Internacional de Educación Matemática -ICME 3- estableció una distribución de áreas bastante significativa con un tronco vertical por tramos de edad y otro horizontal por áreas de investigación. Estas clasificaciones, con un total de 13, constituirán las sesiones y los capítulos de las actas del congreso, publicadas por la UNESCO (1976) y de hecho constituyen un elenco de áreas de investigación en educación Matemática. Naturalmente todavía reflejan mucho de tradicional.

Un paso muy importante en la definición de áreas de investigación fue propuesto por Edward G. Begle (1979). No se preocupa por el orden matricial propuesto por Karlsruhe y propone capítulos que sintetizan las áreas de investigación más intensas a partir de la literatura especializada. La clasificación de E.G. Begle es:

1. La Naturaleza de la Matemática y de los objetos matemáticos.
2. Metas para la Educación Matemática.

3. Docentes (componentes afectivas, entrenamiento, conocimiento, evaluación).
4. Variables curriculares.
5. Variables discentes (afectivas, cognitivas, comportamiento).
6. El ambiente (escuela, aula, familia, contexto natural).
7. Variables instrumentales (calculadoras y computadoras, juegos, laboratorio matemático, instrucciones programadas).
8. Tests.
9. Resolución de problemas.

Como dijimos anteriormente el estudio de Begle refleja la situación actual, siendo un análisis crítico del estado de la cuestión en aquel momento. El hecho de que los capítulos 3,4 y 7 sean dominantes, con 20 a 25 páginas cada uno de un total de 150, nos demuestra el gran tradicionalismo identificado por Begle. Al final, Begle dice que "las investigaciones futuras deben ser precedidas por una revisión cuidadosa de la literatura disponible" (p. 152), lo que en verdad justifica su libro y su importancia hoy día. Su libro es una guía para esa revisión sistemática. Sin embargo, su influencia fue menor de lo que se esperaba y en mi opinión la propuesta de Karlsruhe aun prevalece, a pesar de que serán necesarios cambios en un futuro cercano. El manual de investigación Grouws (1992) sintetiza las áreas concurrentes mas importantes y es un instrumento fundamental para el investigador en Educación Matemática.

Vamos a considerar la Propuesta de Karlsruhe como punto de partida para nuestras consideraciones y reflexionar un poco sobre el futuro.

El tronco vertical, esencialmente subordinado a los tramos de edad escolar nos da:

1. Niveles pre-elementales y primarios.
2. Primer ciclo de enseñanza post-elemental y enseñanza secundaria.
3. Ciclo Superior de la escuela secundaria y transición a la universidad.
4. Niveles universitarios.
5. Educación de adultos y educación continuada.
6. Formación y vida profesional de los profesores de Matemática.

Ahora que son aceptadas universalmente estas divisiones nos preguntamos: ¿Qué hay de "sagrado" en la distinción entre 1º, 2º y 3º grado de enseñanza?. Hoy casi 20 años después Karlsruhe se cuestiona la propia idea de la finalidad de los grados. El desenvolvimiento del joven de hoy las presiones para que más pronto adquiera autonomía y establezca una familia, con responsabilidades de su manutención y que tenga participación política efectiva, como es el caso de Brasil, donde se ha concedido el derecho al voto a partir de los 16 años, son características que cuestionan la estratificación tradicional de los grados..

Las posibilidades de entrar en un sistema de producción (esto es, empleo) más rápidamente con una reconquista de estudios después de algunos años de experiencia y un concepto de la educación permanente aparece con mayor frecuencia en los estudios sobre el futuro de la educación. El reciente libro de David York, nos da una visión amplia de los principales factores determinantes de la vida de un niño o de un joven de hoy. La conclusión es que al alcanzar los 18 años, el joven ha pasado en la escuela el 8% de su vida. Y nos preguntamos: ¿Qué aprendizaje será dominante?

¿En los bancos escolares (cerca de 12,000 horas) o las casi 145.000 restantes?. Las teorías más recientes de cognición revelan que el aprendizaje es un proceso que se da continuamente y reposa en experiencias variadas que se incorporan a la historia del individuo (Varela y col. 1991).

Básicamente este informe coincide con el que propongo en D'Ambrosio 1988 y D'Ambrosio 1990. Lo esencial es reconocer que en todo momento, en cualquier ambiente se está aprendiendo. Ahora, eso afecta enormemente al concepto de escuela y en particular a la Educación Matemática, aun siendo influenciada por el mito de la jerarquización del aprendizaje. Discutimos todo esto en D'Ambrosio (1991a).

5. LA EDUCACION MATEMATICA EN EL CONTEXTO DE LA EDUCACION EN GENERAL

El párrafo anterior deja bien claro que la Educación Matemática tiene mucho que ver con la estructura del sistema educacional. Los resultados dependen mucho de la población objeto de las evaluaciones y esto se manifiesta principalmente en los estudios comparativos que comentaremos seguidamente.

La gran expansión de la educación a partir de finales del siglo pasado, y que en los países menos desarrollados se realiza a partir de mediados del presente, lleva a la universalización de la Educación matemática. Universalización en el pleno sentido: para todo el mundo es la misma Matemáticas a enseñar. El punto de partida para esto se había iniciado en el periodo colonial, intensificándose a partir de los años 50. El concepto de una "matemática para el trabajo" se hace dominante. En Brasil, este hecho se manifiesta en el énfasis de la profesionalización. Recomendando especialmente la lectura de la colección organizada por Mary Harris (1990).

Pero a la vez, más sutilmente, tenemos una preocupación con la colocación de la producción, esencialmente para la supervivencia de los imperios coloniales. El cambio del perfil del consumidor considera esencial el movimiento "matemáticas para todos", paralelo al gran énfasis en alfabetización en las lenguas de las antiguas metrópolis coloniales. La agresión cultural y la renovación de la capacidad crítica a través de las

Matemáticas es manifiesta como bien analizan Marilyn Frankenstein (1989) y S-J Shan y P. Bailey (1991), a propósito de la integración del diseño curricular en el momento socio-cultural del sistema escolar. Igual posición toma Sergio Nobre (1989). En verdad, estos tres trabajos fundamentales se hacen eco a través de las Matemáticas, al pensamiento de Paulo Freire que propone una educación crítica y no alienante, es decir ve la educación como un acto político, reconocido y asumido. En verdad la postura de Paulo Freire en relación con la alfabetización y la ideología reconocida por Michael Apple al introducir el concepto de currículo oculto, trazan, en simbiosis, un componente que afecta más al mundo desarrollado, que es la crítica al consumismo implícito. Naturalmente es así como se manifiestan las grandes distorsiones culturales de la Educación Matemática y que nos llevan a reconocer su dimensión política. Ver, a este respecto, D'Ambrosio (1990a).

Volviendo al ICME-3, en Karlsruhe, el tronco horizontal, con las otras siete clasificaciones referentes a áreas de investigación:

- I. Análisis crítico del desarrollo curricular.
- II. Métodos y resultado de la evaluación.
- III. Metas y objetivos generales (aspectos socio-culturales).
- IV. Investigación relacionada con el proceso de aprendizaje.
- V. Análisis crítico del uso de la tecnología educativa.
- VI. Interacción con otras disciplinas.
- VII. Papel de los algoritmos y de las computadoras.

Esencialmente, todas estas áreas son hoy fundamentales en la investigación en Educación matemática, haciendo cruzar esta clasificación de tronco horizontal con las 6 clasificaciones verticales y podríamos caer en la tentación cartesiana de clasificar las áreas de Educación matemática en un esquema matricial de 6x7.

6. METAS Y OBJETIVOS GENERALES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS, SU POSICION EN EL CURRICULO Y LA NUEVA PRACTICA DOCENTE

Vamos a destacar, en especial, un capítulo relativo a metas y objetivos generales. De hecho, a partir de Karlsruhe, las discusiones de por qué se enseña Matemáticas ganaron una importante dimensión socio-cultural y se puede decir que representan el inicio de un pensamiento más amplio sobre Educación matemática. Este pensar más amplio es sintetizado en el reconocimiento de la contextualización de la Educación Matemática. Considerada, tradicionalmente, como camino universal en el sentido de que cruza diferentes culturas y representa el único eslabón absolutamente inter-cultural, las Matemáticas son vistas, más o menos, como un producto cultural.

Los trabajos pioneros de A. Kroeber y L.A. White, debidamente reconocidos por R. Wilder (1981), tardaron en ser reconocidos como esenciales para la Educación Matemática. Igualmente, el dominio de la investigación conducida por J. Piaget y sus discípulos daban poco espacio para reflexiones culturales. El reconocimiento más tardío de los trabajos desarrollados en la década de 1930 por Lev S. Vygotsky y sus discípulos solamente es reconocido más tarde y su componente socio-cultural reforzará su importancia.

En 1984, se realizó en Adelaida (Australia) el ICME-5. Sin duda este Congreso dio a la dimensión socio-cultural una importancia fundamental. Ver D'Ambrosio (1985). En el Congreso siguiente, el ICME-6, realizado en Budapest en 1988, esta importancia se consolidó. En 1985 se había creado el International Study Group on Ethnomathematics (ISGEm), sirviendo de canal de comunicación entre educadores matemáticos de todo el mundo, teniendo como eje director los aspectos socio-culturales. La etnomatemática sintetiza este eje. Afortunadamente aún consolidándose como un área de investigación, la etnomatemática penetró en las consideraciones de la Educación matemática por varios frentes. Encontró su reconocimiento en la comunidad matemática, alcanzando una situación de área de investigación en las dos revistas básicas de referencia, la *Mathematical Reviews* y en *Zentralblatt für Mathematik*. También es un área en la importante revista de investigación en Educación Matemática "*Journal for Research in Mathematics Education*" y constituye un capítulo en "*Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*" de 1992, ambos publicados bajo la responsabilidad del National Council of Teachers of Mathematics. Recientemente, la American Mathematical Society abrió, en su periódico mensual "*Notices of the AMS*" un espacio para etnomatemática. Filosófica e históricamente todo esto representa una nueva postura en relación a las Matemáticas y consecuentemente con repercusiones en la Educación Matemática.

Inevitablemente la práctica docente sufrirá modificaciones profundas. Hay poco espacio para un currículo definido a priori, basado en contenidos acordados como los más importantes. La postura normativa será claramente superada. La propia concepción de lo que es importante resultará de consideraciones de naturaleza socio-cultural. Tanto para la investigación como para la docencia será esencial una postura etnográfica y un comportamiento correspondiente. El docente tradicional, cuya misión es enseñar, no encontrará ya su lugar en el aula y dará lugar a un animador de actividades. El docente, en su nuevo papel, será efectivamente el docente/investigador y el resultado de su acción saldrá del aula. Para este respeto hay que ver el trabajo de Beatriz S. D'Ambrosio (1993). También hay que ver para un enfoque más general S.L. Lytle y M. Cochran-Smith (1992). La actuación profesional del docente será muy diferente y creo que ahí es donde está el quid de la cuestión.

El futuro de la Educación matemática no depende de revisiones de contenidos sino de la dinámica de la propia matemática, procurando llevar nuestra práctica a la generación de conocimientos.. Tampoco depende de una metodología "mágica", depende esencialmente de que el profesor asuma su propia posición, reconozca que es un compañero de los alumnos en la búsqueda de conocimientos y que la matemática es parte integrante de ese conocimiento. Un conocimiento que se renueva día a día y que se enriquece por la experiencia vivida por todos los individuos de este planeta.

APENDICE HISTORICO

Reflexiones, teorías y estudios sobre la Educación Matemática existen desde la antigüedad. A pesar de que las Matemáticas en diversas formas, las verdadera etnomatemática, aunque forman parte de todas las culturas, en el mundo griego es donde tienen una situación privilegiada.

Son ejercicios de reflexión por excelencia, la forma más alta del pensamiento, algo como un juego que fue muy bien ilustrado por hermann Hesse en su gran obra "El juego de los abalorios". A pesar de no tener otra justificación que la de ser un ejercicio intelectual, la matemática griega encontró algunas utilidades entre los propios griegos. No se observa utilidad en la matemática abstracta de los griegos. Claramente era un juego de motivación dominante. de otra forma no se puede justificar la importancia de "regla y compás" en la resolución de ciertos problemas. Naturalmente, explicaciones de naturaleza estética en busca de la perfección, hablan en favor de la falta de practicidad de la matemática abstracta. La matemática práctica, aquella que sirve para el día a día, coexistía con otras formas de conocimiento. Arquímedes es tal vez el primer matemático en usar sus conocimientos, de forma un tanto marginal, en sus ingenios.

Entre los romanos, el libro de Marcus Vitruvius Polio De Architectura (aprox. 100 a.C.) ilustra la utilización de los resultados matemáticos, algunos razonablemente sofisticados, pero sin la preocupación de "probar" la validez de los resultados.

Los arabes son considerados como continuadores del pensamiento matemático griego, su contribución por lo tanto es modesta. Es sorprendente que para enfrentarse a problemas prácticos, en el día a día del mundo islámico, la Matemática abstracta de los griegos es rechazada. Al-Kwarizmi (780-850) es el más importante matemático árabe, autor del famoso tratado Hisab al-jabr wa'l-muqabalah (literalmente, ciencia de la reducción y de la confrontación como método de resolución de ecuaciones), que dio origen a la palabra álgebra, así como el propio nombre del científico dio origen a la palabra algoritmo. En el libro, destinado esencialmente a las cosas prácticas, como herencias y división de propiedades, se niega a utilizar fuentes griegas

como Diofante y Euclides. Además de una postura culturalmente nacionalista, busca fuentes más prácticas y recorre solamente las fuentes hindues y hebreas.

De hecho, dos formas de matemáticas se identifican en el mundo griego, las matemáticas de la ingeniería y las matemáticas de la inteligibilidad, usando la terminología de R. Thom (1990: *Apologie du Logos*. París: Hachette, pág. 325). La primera es asimilada por el mundo romano y prevalece en la Edad Media y la segunda es llevada a delante por los propios griegos, bajo la dominación romana, y posteriormente por el mundo islámico, llegando a su agotamiento en el siglo X. Con el Renacimiento, esa matemática retoma su importancia y con la llegada de la ciencia moderna va ganando la posición de "patrón de rigor" siendo ya considerada como un criterio de verdad. "Tan cierto como la matemática" es una expresión incorporada al lenguaje moderno y refleja un criterio de verdad en el que se moldeó la matemática: rigurosa, precisa y desprovista de emocionalidad. De ahí la definición de Gustave Flaubert "Matemática: la que seca el corazón". (1987: Bouvard et Pecuchet with the Dictionary of received Ideas. London: Penguin Books).

BIBLIOGRAFIA

- A.A.A.S. (1989). *Science for All Americans*. American Association for the Advancement of Science. Washington.
- BEGLE, Edward G. (1979). *Critical Variables in Mathematics Education. Findings from a Survey of the Empirical Literature*. Ed. Mathematical Association of America and National Council of Teachers of Mathematics. Washington.
- BORBA, M. C. (1992). "Teaching Mathematics: Challenging the Sacred Cow of Mathematical Certainty" in *Clearing House*, vol. 65, nº 6, pp. 332-3.
- D'AMBROSIO, B. S. (1993). Para publicar en *PRO-Posições*.
- D'AMBROSIO, U. (1985). *Socio-cultural bases for Mathematics education*. Ed. UNICAMP. Campinas.
- D'AMBROSIO, U. (1988). *Da Realidade à acção: Reflexões sobre Educação (e) Matemática*. 2ª Ed. Ed. Summus Editorial. Sao Paulo.
- D'AMBROSIO, U. (1990). *ETNOMATEMATICA. Arte ou técnica de explicar e conhecer*. Ed. Editora Atica. Sao Paulo.
- D'AMBROSIO, U. (1990 a). "The role of mathematics in building up a democratic society and the civilizatory mission of the European powers since the discoveries". *Political Dimensions of Mathematics Education: Action & Critique PDME.1*. Proceedings of the First International Conference (London, April 1-4 1990). Ed. Richrad Noss et al. London.

D'AMBROSIO, U. (1991). *Several Dimensions of Science Education: a Latin American Perspective*. Ed. CIDE/REDUC. Santiago de Chile.

D'AMBROSIO, U. (1991 a). "What does it mean to be Modern in Mathematics Education?". Para publicar en *Thrid International Conference on Mathematics Education, University of Chicago School Mathematics Project*.

EMMER, M. (1992). "Special Issue" on *Visual Mathematics*, Guest Editor Michele Emmer. LEONARDO: Journal of the International Society for the Arts, Sciences and Technology, vol. 25, ner. 3/4.

FRANFENSTEIN, M. (1989). *Relearning Mathematics. A Different Third R-Radical Maths*. Ed. Free Association Books. London.

GROUWS, D.A. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Ed. Macmillan Publishing Company. New York.

HAMBURG, D.A. (1992). *Today's Children. cretating a Future for a Generation in Crisis*. Ed. Times Books. New York.

HARRIS, M. (1991). *Schools, Mathematics and Work*. Ed. The Falmer Press. Basingstoke.

KILPATRICK, J. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Ed. Macmillan Publishing Company. New York.

LYTLE, S.L. y COCHRAM-SMITH, M. (1992). "Teacher Research as a Way of Knowing". *Harvard Educational Review*, vol. 62, nº 4, pp. 447-474.

NOBRE, S.R. (1989). *Aspectos Sociais e Culturais no desenho Curricular da Matemática*. Ed. Dissertação de Mestrado. Rio Claro.

SHAN, S-J y BAILEY, P. (1991). *Multiple Factors: Classroom mathematics for equality and justice*. Ed. trentham Books. Taffordshire.

UNESCO (1976). *Nuevas tendencias en la enseñanza de las Matemáticas*. ED. UNESCO. París.

VARELA, F.J.; THOMPSON, E. y ROSCH, E. (1991). *The Embodied Mind. Cognitive Science and Human Experience*. Ed. The MIT Press. Cambridge.

WILDER, R.L. (1981). *Mathematics as a Cultural System*. Ed. Pergamon Press. Oxford.

MITOS Y REALIDADES DE LA EDUCACION MATEMATICA EN ESPAÑA

D. Luís Rico

Catedrático de Universidad de Didáctica de las Matemáticas

Universidad de Granada

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Quiero comenzar expresando lo que, en el momento actual, me parece un sentimiento legítimo: la situación hoy día de la Educación Matemática en España admite razonablemente una valoración positiva, una lectura optimista. Parece evidente que hay motivos para sentirnos orgullosos del trabajo que han realizado los Profesores de Matemáticas de este país en los últimos quince años. Quizás el dato más emblemático sea el VIII ICME de Sevilla, del año 96, que va a permitir globalmente una conexión de los Profesores de Matemáticas españoles con la comunidad internacional. Esta situación no se ha conseguido gratuitamente, lleva detrás muchas horas de esfuerzo, de documentos elaborados, de trabajo; lleva el desarrollo y sostenimiento del movimiento asociativo español, con nuevas sociedades que están surgiendo en los últimos años; lleva una serie de publicaciones y revistas, la consolidación de publicaciones propias y el inicio de publicaciones internacionales; comienzan a aparecer en los índices de las revistas internacionales profesores e investigadores españoles; lleva una serie de encuentros y jornadas, como el que estamos realizando estos días, hasta el punto de que ya empieza a ser complicado encontrar una fecha adecuada para conseguir que un congreso no coincida con otro. Tiene que ver con la institucionalización de la Didáctica de la Matemática en la Universidad, con la iniciación de programas de investigación académicos en Educación Matemática, programas de investigación que han existido con anterioridad pero que, en la Universidad, son de implantación oficial reciente, en concreto los programas de doctorado, las tesis doctorales. Tiene que ver con que la formación inicial y permanente del profesorado avanza hacia nuevas perspectivas, y de ello es prueba el Simposio recientemente realizado en Granada. Tiene que ver con la propia reforma del Sistema Educativo, con los diseños curriculares, con la participación de profesores destacados en la organización y elaboración de nuevos materiales. Hay datos para un balance optimista y, seguramente, la lista anterior se podría ampliar sin mucha dificultad.

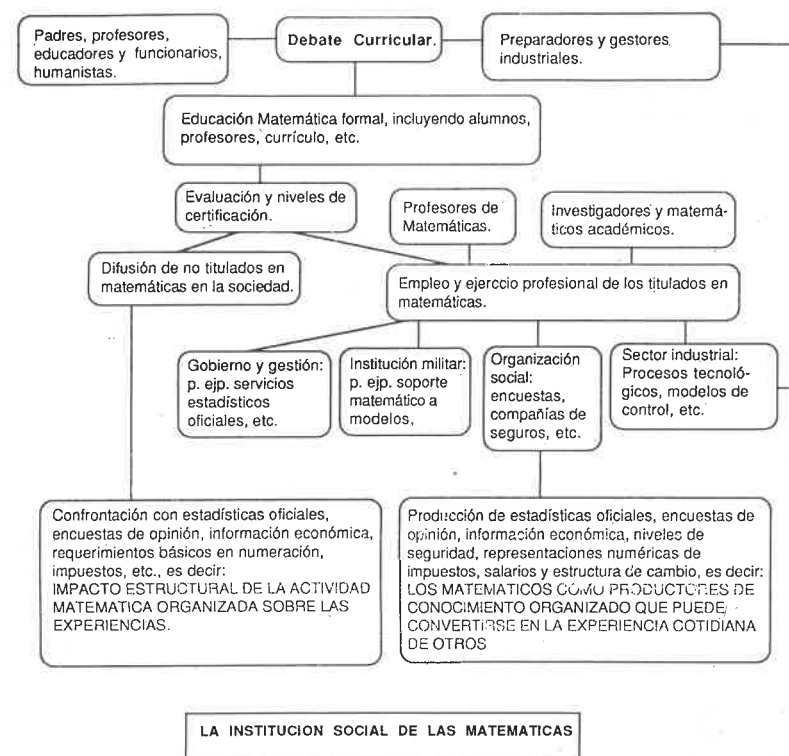
La perspectiva histórica en la que se quiere situar el balance anterior tiene cierto grado de complejidad, con varias dimensiones; en esta perspectiva las Matemáticas no son una asignatura más del Sistema Educativo, sino que desempeñan un papel destacado y se les asignan determinadas funciones sociales de carácter formativo. Como consecuencia se ha producido una diferenciación progresiva de un colectivo de docentes, que ha ido adquiriendo

cierta autonomía profesional y que ha participado considerablemente en la reforma del sistema educativo. En esta perspectiva, la emergencia y consolidación de una comunidad de educadores matemáticos es un dato importante y destacable; en esta comunidad sus miembros han delimitado grandes áreas de trabajo, ninguna de ellas excluyente, casi todas ellas con participación de docentes de todos los niveles. Estas áreas las podemos denominar: docencia, investigación, relaciones de comunicación y difusión, y extensión de la cultura matemática. También aparecen problemas de gestión y organización internas; estamos viendo que un acontecimiento como el que se está realizando estos días en Badajoz necesita de una infraestructura, necesita de unos compañeros que dediquen y empleen su tiempo en permitir que los demás estemos asistiendo a una serie importante de actividades de formación.

Igualmente cabe considerar en esta perspectiva histórica una pluralidad de niveles de institucionalización; entre los más destacables podemos señalar: asociaciones, grupos de trabajo, equipos de asesores, departamentos universitarios y equipos de investigación, sin que esta lista agote todas las posibilidades reales de trabajo en Educación Matemática. La institucionalización se presenta conjuntamente con la aparición de una corriente de pensamiento autónomo organizado; se publican libros, artículos, tesis doctorales, tesinas, hay proyectos, informes y otros documentos, que empiezan estar conectados con la comunidad internacional. Todas estas realizaciones no son de hoy, vienen gestándose y desarrollándose desde hace tiempo, y eso permite este balance optimista al que hacía referencia.

Sin embargo, me gustaría centrar mi reflexión apartándome de una autocomplacencia excesiva; quizás no somos tan magníficos ni lo estamos haciendo todo maravillosamente. Hay datos globales positivos, pero un análisis más detallado puede hacer ver determinadas deficiencias, carencias o faltas de rigor, descoordinación, necesidad de una mayor profundidad, a veces excesivos apresuramientos, dispersión de esfuerzos, falta de autocritica; creo que todos somos conscientes de esto, por ello quisiera centrar mi reflexión en lo que debemos realizar para continuar el avance antes señalado. Entiendo que la comunidad de educadores matemáticos españoles debe reflexionar frecuente y seriamente en su realidad actual, en sus recursos y potencialidades, en un mejor modo de realización y desarrollo, y sobre cuáles son sus problemas más urgentes. Ayer, en la mesa redonda sobre Investigación, surgieron algunos de estos problemas, pero cualquier otro tema que planteemos podría dar lugar a una multitud de enunciados mediante los que se concretarían problemas de este tipo. Por tanto, debemos conocer qué medios y recursos tenemos ya que, a veces, el panorama no termina de estar claro. Valorar nuestras necesidades, establecer prioridades, tomar decisiones adecuadas y, luego, una vez tomada una decisión, evaluar los logros críticamente para modificar y reorientar las líneas de actuación.

Entrando en uno de los aspectos mencionados, Abraham y Bibby (1988) han reflexionado sobre la Institución Social de las Matemáticas y han resumido esas reflexiones en el siguiente cuadro:



Los autores plantean que el debate curricular sobre matemáticas, que afecta a padres, educadores y gestores sociales, surge porque la educación matemática formal -que incluye a alumnos, profesores y currículo- después de poner en práctica un sistema de evaluación, que produce unos niveles de certificación, da lugar a dos grandes categorías de usuarios de la matemática, no a un sólo tipo de usuario como muchos parecen pensar. Una de estas categorías está formada por los no titulados en matemáticas, que van a tener una serie de actividades -descritas en el cuadro-, y la otra categoría constituida por aquellas personas que van a ejercer sus conocimientos matemáticos profesionalmente, y los van a ejercer bien como profesores o como investigadores, pero también en actividades de gobierno y gestión, en instituciones militares, en organizaciones sociales, encuestas, compañías de seguros, y también en sectores industriales. Ahora mismo, un índice de progreso de este país es que bastantes titulados en matemáticas no trabajan ya en la enseñanza, estamos empezando a cubrir otras áreas de trabajo del

ejercicio profesional de los licenciados en matemáticas. Hay pues unas competencias profesionales y unas competencias no profesionales, y todas ellas hacen que la Institución Social de las Matemáticas sea importante; por eso también es importante el debate curricular puesto que lo son las funciones sociales que se le asignan a la matemática.

La cuestión que surge de inmediato es: ¿Hasta qué punto asumimos esa pluralidad de funciones sociales?

No sólo son necesarios unos profesionales con competencias como productores de conocimiento organizado (que permite explicitar la experiencia cotidiana de los demás) sino también hay que preparar y formar matemáticamente a nivel de usuario, de ciudadano. Cuando hablamos de que hay que formar ciudadanos debemos pensar en todos los campos de posibilidades enumerados. Las diferentes funciones atribuidas a las matemáticas plantean, obviamente, necesidades distintas y cada una de esas necesidades se satisfacen en niveles diferentes del sistema educativo, de forma prioritaria; ésto conlleva transiciones difíciles: el paso de la Primaria a la Secundaria y, sobre todo, el paso futuro de la Secundaria al Bachillerato van a crear bastantes distorsiones, desajustes y contradicciones, y éste es un problema que hay que asumir.

Obviamente, conviven visiones distintas de la enseñanza de las matemáticas; simplificando mucho, en lenguaje coloquial, nos podemos referir a la enseñanza tradicional y la enseñanza actual. Es un tópico muy manido que todo lo que ocurrió antes de que nosotros llegáramos al sistema educativo, y lo mejorásemos, es "la enseñanza tradicional", luego viene el "después de nosotros", que es "la enseñanza actual". En el *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (1992), hay un capítulo, "Visión Pedagógica y Contexto Social", en el que se plantean estas dos visiones de las matemáticas que su autora caracteriza como visión formalista y visión abierta, sobre los que da una serie de descriptores para diferenciar la visión formalista de la visión abierta.

La consideración de las matemáticas como conjunto de verdades inmutables, a la espera de ser descubiertas, o las matemáticas como proceso de crecimiento y cambio; énfasis en la enseñanza mecánica de hechos y habilidades o bien, como implicación pedagógica, mediante énfasis en la generación de teorías e hipótesis; la enseñanza de las matemáticas organizada en temas lineales y trabajo exclusivo de papel y lápiz o bien mediante resolución de problemas y procesos de investigación y discusión. Esto, inevitablemente, incardinado en un contexto social, en donde los fenómenos de transmisión parecen ser importantes en una de las visiones, mientras que la participación en la discusión y negociación de reglas es lo más importante en la otra. ¿Hasta qué punto quedan claras estas diferencias en nuestro ejercicio diario?, ¿hasta qué punto somos conscientes de todas las

implicaciones que lleva el paso de una visión a otra?; ¿hasta qué punto, creyéndonos en una visión, colectivamente todavía estamos de modo prioritario en otra?

Quisiera, en esta reflexión sobre cómo va la enseñanza de las matemáticas y cómo se plantea, recordar una idea que a mí me resulta muy querida e importante: la consideración de la educación matemática como campo de problemas. Creo que la discusión sobre el carácter científico o no científico, teórico o no teórico, de la educación matemática es una discusión de segundo grado, ya que lo que interesa inicialmente en relación con la educación matemática es su naturaleza real de campo de problemas. Todos los que trabajamos en educación matemática, en cualquier nivel del sistema educativo, sabemos que hay multitud de dificultades, multitud de campos problemáticos.

Sin establecer prioridades podemos enumerar algunos de los problemas más destacables en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, comenzando por los de naturaleza epistemológica. Algunas de estas cuestiones aún cuando se refieren a la naturaleza del propio conocimiento matemático, tienen que ver con la educación y tienen implicaciones para la enseñanza.

¿Cómo se conectan las matemáticas con la experiencia?; la matemática y el mundo de las experiencias, ¿son campos totalmente disjuntos?. Aunque esta cuestión se refiere, fundamentalmente, a la naturaleza del conocimiento matemático, tiene implicaciones educativas. Enseñaremos de una manera o de otra, utilizaremos materiales y recursos o emplearemos sólo la simbolización y el razonamiento deductivo, sin hacer ningún uso de la intuición y de la experiencia, de modelos y representaciones, según la respuesta que demos a esta primera cuestión, según consideremos la naturaleza de los conceptos y nociones matemáticas, si como objetos que existen por sí mismos o como objetos que son contruidos por la mente humana; trabajaremos con nuestros alumnos de una manera o de otra. Igualmente ocurre respecto de la fundamentación de las matemáticas y con la dimensión cultural e histórica del conocimiento matemático, que ya puso de manifiesto el Profesor D'Ambrosio.

También aparecen una serie de cuestiones problemáticas en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Algunas de las cuestiones para mí más importantes son: el desnivel entre la habilidad de ejecución y la capacidad de comprensión -¿por qué hay alumnos que operan correctamente pero no saben qué es lo que están haciendo? -; el papel de la transferencia del aprendizaje y el papel de la práctica -¿qué cuestiones son las que hay que enseñar prioritariamente?, ¿qué núcleos son aquéllos que van a producir un efecto de difusión?; ¿qué función tienen las representaciones mentales en el aprendizaje?; ¿hasta qué punto hay que elaborar el conocimiento y darlo preparado a nuestros alumnos, en vez de permitir que ellos lo elaboren?;

¿qué diferencias existen entre los sujetos relativas a sus conocimientos matemáticos? -¿cómo hay que articular esto en la enseñanza con nuestros alumnos y en nuestras aulas?; ¿qué selección de conocimientos es la más adecuada? -¿cuáles deben de ser los núcleos prioritarios?.

Todas estas cuestiones, contextualizadas o no dentro de una teoría concreta, son problemas reales a los que hay que dar respuesta.

Hay que dar respuesta también a la pregunta **¿por qué se enseñan matemáticas?**. En el año 1976, en el ICME de Karlsruhe, el Profesor D'Ambrosio hizo el resumen de los tipos de respuestas más importantes que se habían dado a esta pregunta y, de manera explícita, reconocía dos prioridades, dos puntos de vista predominantes: el punto de vista utilitario -las matemáticas se enseñan porque son útiles, porque son prácticas, porque capacitan para el ejercicio profesional-, y el punto de vista especulativo - las matemáticas se enseñan para formar mentes, para formar mentes creativas-. En un artículo reciente, traducido al castellano y publicado por la *Revista de Educación*, Romberg señala las justificaciones más usuales sobre el por qué de la enseñanza de las matemáticas: justificaciones funcionales y justificaciones basadas en otros motivos (el desarrollo personal, entre otros). En este trabajo, Romberg pone de manifiesto los problemas relativos a las justificaciones, las contradicciones y las deficiencias que tiene cada tipo de justificación y cómo, a veces, la pretensión de cubrir diferentes finalidades mediante un mismo programa puede llevar a contradicciones e interferencias entre unas finalidades y otras. La propia delimitación de la pregunta "¿por qué enseñamos matemáticas?" no es neutra ni ingénua, es una cuestión problemática y difícil.

Plantear que la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas constituye un campo de problemas fue objeto de debate en la década de los 80. En el año 1981 aparece un artículo de Freudenthal, *Major Problems in Mathematics Education*, en el que sostiene que el problema más importante de la educación matemática es: ¿por qué Juanito no sabe sumar?; éste es el problema fundamental para Freudenthal. Luego lo reconvierte y dice, bueno, no seamos sexistas, podemos enunciar ¿por qué Jennifer no sabe sumar?; y continua, "tampoco Jennifer, estoy pensando en una niña concreta, ¿por qué aquella niña no sabía sumar?", lo que le lleva a considerar: "¿cuál es el proceso por el que las personas comprenden?", ¿por qué un niño se ve bloqueado en sus procesos de comprensión de una operación tan básica como la suma y que va a ser tan útil para su desarrollo personal y profesional? y ¿por qué no se le puede ayudar a comprender?. La lista de problemas principales en educación matemática elaborada por Freudenthal sigue siendo, hoy día, un instrumento de reflexión muy valioso.

A mediados de la década de los 80 se genera un debate en el que se utiliza como referencia de comparación lo que ocurrió en el Congreso de

Matemáticas de París del año 1900, al enunciar Hilbert los 23 problemas de investigación más importantes no resueltos en matemáticas, y que sirvió para promover un avance de las investigaciones de su época. En este contexto surge la siguiente cuestión: ¿no seríamos capaces de enunciar los **problemas fundamentales de la educación matemática**?, ¿existen cuestiones similares para la educación matemática?. En 1984, en la revista *For the Learning of Mathematics*, un editorial firmado por D. Wheeler se dirige a los especialistas internacionales en educación matemática preguntándoles por enunciados de los problemas fundamentales de la educación matemática, y recibe 35 respuestas, que se van publicando durante el año 85 en la revista. Mediante un análisis de contenidos he localizado en esas respuestas 126 enunciados distintos, que plantean uno o varios de los problemas fundamentales de la educación matemática. Una clasificación posterior, siguiendo el criterio de algunos de los especialistas consultados, permite establecer las siguientes ocho categorías de problemas:

Teóricos (4); Epistemológicos (7); Sociológicos (9) ; Curriculares (15); Cognitivos (62) ; Enseñanza de tópicos concretos (16); Formación del profesorado (11); Metodología de investigación (3).

Los números entre paréntesis corresponden a las frecuencias de enunciados diferentes dentro de cada una de las categorías, sin atender a distintos planteamientos y fundamentaciones teóricas subyacentes, en muchos casos fuertemente dispares.

De acuerdo con los datos anteriores, el 50% de los enunciados que los especialistas más cualificados del momento dan para los problemas fundamentales de la educación matemática, son problemas de aprendizaje, problemas de carácter cognitivo con raíces en la psicología de las matemáticas. Otro 25% (curriculares mas enseñanza de tópicos) son problemas de enseñanza, de naturaleza didáctica. Y luego, minoritariamente, algo menos del 10% los de orden teórico y epistemológico; otro 10% para los de Formación de Profesorado; algo menos del 8% los sociológicos y un 2% para los metodológicos. Es muy significativo que el 75% de los enunciados de los problemas hacen referencia a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, muy secundariamente, hacen referencia a otro tipo de consideraciones.

Esta discusión y este debate sobre la enseñanza de las matemáticas como campo de problemas prácticamente concluye en el año 86. A partir de esta fecha no se vuelve a entrar en él. Cuando en el año 86 Davis, editor de la revista *Journal of Mathematical Behavior*, quiere retomar el tema y vuelve a pedir a la comunidad que enuncie de nuevo cuáles son los problemas fundamentales de la educación matemática, mediante una carta abierta en la revista, en la que solicita respuestas a esta cuestión, no le contesta nadie. En ese momento parece que el debate sobre cuáles son los problemas más

importantes de la educación matemática está cerrado y empieza el debate sobre cómo resolver esos problemas fundamentales.

Me interesa destacar la idea de que la enseñanza de las matemáticas es un campo de problemas y que en ese campo de problemas todos los educadores matemáticos, todos los que estamos aquí, estamos implicados de una manera o de otra. Para mí resulta necesario asumir positivamente esta problematicidad de la educación matemática porque, a veces, en un debate como el que mantuvimos ayer o el de antes de ayer, o como los que vayamos a sostener en los próximos meses, puede parecer que el hecho de que tengamos posturas distintas es algo negativo, una especie de indicador de que algo no funciona, y no, lo que podría ser un indicador de que nuestro campo no marcha sería que nos encastillásemos en nuestras posiciones y que hiciésemos un problema de que tenemos problemas. No; tenemos problemas, vayamos a resolverlos. Una de nuestras características profesionales es que el profesor de matemáticas trabaja en la resolución de problemas y hay que establecer que gran parte de los problemas que tenemos que resolver son los problemas de nuestro propio campo: la educación matemática.

En otro orden de reflexión, para mí el reto que en este momento propone la sociedad a la educación matemática está en enunciar claramente un campo de trabajo con problemas reales que resolver e iniciar la resolución de algunos de ellos; no queremos ni podemos quedarnos en simples especulaciones.

La educación matemática ofrece estudios e investigaciones ya realizados en los que se presentan temas, métodos y procedimientos ya ensayados, con resultados contrastados; seguramente algunos no nos resultarán aceptables, y otros sí. A veces tendremos que buscar la información, integrándola desde distintas fuentes, pero eso forma parte de lo ya realizado, de lo ya planteado y sobre lo que se han avanzado respuestas.

También presenta una organización disciplinar viable y dispone de una comunidad de profesionales que están estableciendo su campo de responsabilidad y autonomía. En este sentido quiero retomar otra idea que ya he enunciado en ocasiones anteriores, es la idea del **educador matemático y la comunidad de educadores matemáticos**. Porque puede entenderse que muchas veces podemos parecer matemáticos frustrados, y creo que no, que tenemos y ejercemos otra profesión distinta. Venimos del campo de las matemáticas, pero nuestro trabajo profesional ya no es la investigación en matemáticas, nuestro trabajo profesional es enseñar, formar e instruir, transmitir y, en definitiva, educar mediante las matemáticas; en este sentido somos educadores matemáticos. Luego podremos tener otro tipo de aficiones, pero nuestra profesión de enseñantes nos caracteriza como educadores matemáticos. Esa es la dimensión que aquí nos une a todos y esa es la comunidad de la que formamos parte.

Y es una comunidad no trivial, es una comunidad bastante numerosa, de la que yo me he permitido hacer algunas estadísticas, sobre la base de los datos del Ministerio de Educación y Ciencia, correspondientes al curso 90-91.

Niveles Docentes	Total Prof.	Coefic.	Total Estimado
Educación Preescolar	39.513	50%	19.756
E.G.B 1º y 2º Ciclo	114.343	75%	85.757
E.G.B. 3º Ciclo	76.693	25%	19.173
Educación de Adultos	6.878	25%	1.719
Educación Especial	12.908	25%	3.227
BUP y COU	81.498	10%	8.150
Formación Profesional	52.521	10%	5.252
Total	384.354		143.034

Sobre el total de profesores de los niveles de Educación Preescolar, E.G.B., Educación de Adultos, Educación Especial, B.U.P. y C.O.U., Formación Profesional (denominaciones anteriores a la LOGSE), totales que vienen indicados en una de las columnas, establecemos unos coeficientes multiplicadores que nos darían aquella parte del total de cada uno de estos colectivos que, de un modo o de otro, enseña matemáticas, tiene que ver con la educación matemática. Obtenemos así un total estimado de casi 144 000 profesores que enseñan matemáticas o educadores matemáticos, dentro del Sistema de la Educación no universitaria; y podríamos cifrar aproximadamente en unos 5 000 profesores, entre funcionarios y no funcionarios, el total de profesores universitarios que tienen que ver con la enseñanza de las matemáticas dentro de la Universidad. De todo lo anterior obtenemos un total estimado en este país de 150 000 profesores que, en un nivel u otro del Sistema Educativo, tenemos que ver con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Si comparamos las cifras anteriores con las de los colectivos de los que formamos parte, también son cifras aproximadas, señalan un total de unos 3 000 socios:

Sociedades Españolas de Profesores de Matemáticas

Sociedad	Socios
Sociedad Andaluza "Thales"	1.300
Sociedad Canaria "Newton"	700
Sociedad Aragonesa "Pedro Ciruelo"	100
Sociedad Navarra "Tornamira"	100
Sociedad Castellonenca	150
Sociedad Extremeña "Ventura Reyes"	150
Sociedad Alicantina	100
Sociedad Madrileña "Emma Castelnovo"	100
Sociedad Castellano Leonesa "Puig Adam"	150
Sociedad Gallega	150

Resulta que solamente el 2% de los educadores matemáticos de este país pertenecemos a movimientos asociativos y eso es un dato importante; pero también es un dato que marca de algún modo todo el campo de desarrollo que nos queda por realizar. Se habla muchas veces de la falta de integración social en este país, de la escasez de personas comprometidas en los movimientos sociales, y creo que también eso ocurre en el movimiento de la educación matemática. Un 2% es un índice aún muy bajo de participación, que nos plantea retos a las sociedades, a las Juntas Directivas y a todos los que estamos implicados. Hay muchos compañeros que debieran formar parte de este sector más comprometido con la educación matemática, que son las Sociedades de Profesores.

¿Cuáles son las necesidades, a mi entender prioritarias, que actualmente se dan en la comunidad de educadores matemáticos?. Creo que es importante que aumentemos la conciencia de nuestra valía social, de la valía social de nuestro trabajo y de nuestra dimensión cultural. Esto es fácil decirlo y difícil de ejecutar diariamente, y creo que todos somos conscientes de ello. Pero eso no nos quita responsabilidad; tenemos que buscar cualquier resquicio, cualquier oportunidad para poner de manifiesto estos datos. Tenemos, por tanto, que potenciar también la organización de nuestra comunidad y mejorar la calidad de nuestros trabajos, porque lo que nos va a dar credibilidad son los productos que presentemos, los resultados que consigamos.

Un tema importante, y creo que también preocupante, es la inevitable reforma en profundidad de **la formación inicial y permanente del educador matemático**, entiendo que siguiendo una línea que equilibre el utillaje matemático con el utillaje psicopedagógico, la formación matemática con la formación psicopedagógica. Complementario con lo anterior, es importante promover actuaciones conjuntas, como este tipo de reuniones, contribuir a la creación de un estado de opinión sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En relación con la formación del profesorado un dato clave es que los actuales educadores matemáticos procedemos de dos culturas distintas, de dos culturas muy diferentes.

El profesor de educación general básica que es, por derecho propio, educador matemático y educador matemático muy importante porque está en la base del sistema educativo, tiene una formación matemática poco sólida y una formación psicopedagógica amplia y continuada, con un nivel académico de Diplomatura. El profesor de bachillerato, en el futuro de Secundaria, tiene una formación matemática comparativamente amplia y profunda, sin embargo su formación psicopedagógica es rudimentaria y su preparación didáctica prácticamente inexistente, con un nivel académico de Licenciatura.

La perspectiva actual, la situación a la que nos dirigimos en los próximos años, quizás no suponga una mejora en relación con la situación del momento, y de alguna manera habría que empezar ya a preparar ese futuro. Las cuestiones relevantes hacen referencia a la formación inicial y permanente del profesorado, y quizás un dato importante sea implicarnos nosotros, los propios educadores matemáticos, en el ejercicio de nuestra autonomía, implicarnos en esa formación inicial y permanente del profesorado, en un aumento de nuestra propia profesionalización. Creo que las Sociedades de profesores de matemáticas, las Sociedades de educadores matemáticos tienen bastante que decir, y poco dicho hasta ahora, en relación con estos temas.

¿Cuáles son las cuestiones en formación inicial?. Estas cuestiones, en su mayor parte discutidas en la reciente reunión de Granada, hacen referencia a la dicotomía que se establece entre formación académica y formación profesional, a la necesaria conexión entre teoría y práctica (necesaria pero actualmente inexistente conexión entre teoría y práctica), a la diferenciación en la formación según etapas y niveles del Sistema Educativo. Seguramente la formación del profesor de primaria no tiene porqué ser idéntica a la formación del profesor de secundaria, porque son campos profesionales distintos, pero lo que no debiera de existir es un divorcio tan fuerte como el actual, una diferencia de formación tan acusada. Debiéramos de discutir, porque todavía no lo hemos hecho, cuál es la formación matemática del profesor de matemáticas; es una ficción suponer que todos los licenciados

que enseñan matemáticas tienen la misma formación, cuando están asumiendo estas competencias licenciados en Química y en Biología. También, en el momento actual, las licenciaturas de matemáticas, al configurar los nuevos planes de estudios universitarios, están favoreciendo la tendencia a incluir asignaturas que hace bien poco formaban parte de los programas de doctorado como materias obligatorias u optativas del segundo ciclo. En esta orientación ¿cabe pensar que la formación matemática que van a recibir los licenciados en matemáticas es la más adecuada para ser profesores de matemáticas en los niveles no universitarios?, ¿qué formación psicopedagógica debe tener el profesor de matemáticas?, ¿qué partes de pedagogía, de psicología o de sociología y con cuánta extensión?, ¿qué formación en didáctica de la matemática debe tener el profesor de matemáticas?. Son, todas ellas, cuestiones de las que se está empezando a hablar, son problemas abiertos y son problemas que nos comprometen a todos, forman parte de nuestra responsabilidad. La solución actual, la solución para el futuro no la del pasado, es que el profesor de primaria seguirá con la diplomatura, tendrá entre 8 y 12 créditos de formación específica en matemáticas; aquellos centros, aquellas facultades de Ciencias de la Educación o Escuelas de Magisterio que tengan 12 créditos de Didáctica de la Matemática se están considerando actualmente privilegiadas.

Por otro lado, el profesor de secundaria y bachillerato recibirá su formación en una licenciatura, con un curso postgrado de 60 créditos de capacitación didáctica. Este curso posterior a la licenciatura obligará a que la formación del profesor de matemáticas tenga que hacerse forzosamente en seis años, en dos etapas totalmente diferentes : una cuestión será la licenciatura en matemáticas y otra distinta la capacitación para la enseñanza de las matemáticas, a la que seguramente accederán titulados de otras licenciaturas con formación matemática diferente, como ya viene ocurriendo en la actualidad. No hay planes claros para esa formación inicial, hay un debate insuficiente, y este es un problema que afecta a esta comunidad.

También es un problema que afecta a esta comunidad la formación permanente. Y me permito exponeros algunas de las cuestiones que yo me planteo. Creo que el modelo basado en Centros de Profesores está en crisis, está en crisis y no termina de superarla. La mayor parte de las razones de esta crisis no son imputables a los propios centros, son imputables a su ubicación dentro del organigrama de la Administración, a la falta de dotaciones, de medios, de recursos, a la carencia de una definición clara sobre las funciones de los asesores. Este modelo que, potencialmente, es interesante, en el que muchos creísteis, ahora mismo no parece viable y hay que reconducirlo. Hay una carencia de sistematicidad en los cursos de la Administración, unas veces los coordina A, otras B, hay veces en que es muy importante la Historia y otras es muy importante la Estadística. Hay una inhibición bastante fuerte de

la Universidad, de la Universidad como institución, no de este o aquel profesor, pero sí de la Universidad como institución que todavía no ha querido asumir la formación permanente, porque la solución que -en general- se le ha dado al CAP pone de manifiesto que no se quiere entrar en las dificultades de una formación inicial digna y coherente. También hay una confusión entre la necesidad de formación y actualización permanente y las necesidades derivadas de la reforma de la LOGSE que, a veces, pueden coincidir pero entre las que hay que establecer diferencias ya que las necesidades de formación van a permanecer por encima de la coyuntura actual y una vez que haya concluido. Se hace necesaria una valoración y regulación administrativas de la formación permanente y esto es un reto para el movimiento asociativo, porque hay que asumir en profundidad la responsabilidad de esa formación permanente del profesorado de matemáticas.

Quiero también hacer alguna referencia, en otro orden de ideas, a lo que puede denominarse relaciones de comunicación dentro de la comunidad de educación matemática. Creo que hay datos que conviene conocer y sobre los que se pueden hacer reflexiones importantes. Por ejemplo, el Congreso en el que nos encontramos en este momento es el 6º de una serie que se inicia en Barcelona en el año 81, con una estructura de 3 conferencias, 23 comunicaciones y 2 mesas redondas y que ocupó, en mayo del 81, a un grupo de profesores y profesoras cuyo número no se ha conservado en los documentos editados por la organización.

Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas - JAEM

EDICION Y LUGAR	FECHA	ASISTENTES	CONFERENCIAS	COMUNICAC	TEMAS *	OTRAS ACTIV.
I Barcelona	Mayo 81	---	3	23	C: 2 I: 2, M:18	Mesas Redon 2
II Sevilla	Abril 82	434	3	44	I: 2, M:30 C: 6, E: 7	----
III Zaragoza	Marzo 83	875	2 y 3 Ponencias	50	M:23, E:16 I:1, C:5, G:5	Zoco con 10 Actividades
IV Tenerife	Sept. 84	550	9	28	I: 5, E: 8 C:1, M:14	
V Castellón	Marzo 91	410	1	59		10 Expos., 1 Mesa 14 Grupos Trab.

(*) I = Investigación M = Metodología C = Currículum E = Experiencias G = Generales

Desde el 81 hasta el 84 hay una eclosión, hay unas expectativas sociales de reforma educativa, hay un interés, un lanzamiento de la comunidad de educadores matemáticos; en Sevilla ya hay 434 asistentes, en Zaragoza 875 - un listón que todavía no se ha superado y que difícilmente se va a volver a superar- la presencia de Freudenthal en Zaragoza fue un revulsivo importante; el hecho de que en Tenerife en el 84 asistieran 550 personas también fue un dato importante, llevar y reunir en Tenerife tal número de profesores constituyó un gran logro. En Castellón se retoman estos encuentros, después de un largo paréntesis, pero con 410 asistentes; estamos avanzando y recuperando aquí una tradición casi perdida.

Me interesa destacar las comunicaciones, que igualmente van creciendo en magnitud; en Castellón llegaron a presentarse 59 comunicaciones, número que seguramente se va a superar en este encuentro. También es importante observar que los temas de investigación empiezan a tener mayor presencia. He codificado en la tabla con I los temas de investigación, con M los de Metodología, con C los Curriculares, con E las experiencias de aula y con G los temas generales; con estos criterios he realizado una clasificación de las comunicaciones publicadas en las Actas de cada uno de los Congresos, y creo que resulta interesante observar cómo, progresivamente, los temas de Investigación van tomando fuerza, van adquiriendo relieve.

Las JAEM no son las únicas Jornadas que se han venido realizando en España en los últimos años. Los Congresos Internacionales organizados por la Revista Enseñanza de las Ciencias también proporcionan datos interesantes:

Congresos Internacionales sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas

EDICION Y LUGAR	FECHA	TOTAL COMUNIC.	COMUNIC. EN DIDAC. MATEM.	% COMUNIC. DID. MATEM.	TOTAL TALLERES	TALLERES DID. MATEM.	% TALLERES DID. MATEM.	% TOTAL DID. MATEM.
I Barcelona	Sep. 85	95	18	18 %	---	---	---	18 %
II Valencia	Sep. 87	195	42	21 %	26	3	10 %	20 %
III Santiago	Sep. 89	140	21	14 %	120	27	22 %	18 %

Podemos observar que las Comunicaciones en Didáctica de la Matemática van de 18 a 42 y luego a 21, aunque este último dato hay que completarlo con el número de Talleres, que comienzan a aparecer en las II Jornadas, dando un total de 18, 45 y 48 trabajos presentados en cada Jornada, respectivamente. En relación con el total de trabajos presentados en cada encuentro, la producción en Didáctica de la Matemática se encuentra alrededor del 20% de las participaciones en estos Congresos

Internacionales sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas. Es una participación importante y digna.

Por lo que se refiere a mi comunidad autónoma y a las actividades que organiza la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", también se aprecia un progreso en el desarrollo de las distintas Jornadas:

EDICION Y LUGAR	FECHA	ASISTENTES	CONFER.	COMUNIC.	TEMAS	OTRAS ACTIV.
I Cádiz	Sept. 83	192	6	23	I : 4	-----
II Almería	Sept. 85	250	7	32	I : 10	Grupos de Trab.: 3
III Huelva	Sept. 87	324	7	24	I : 6	Grupos de Trab.: 5 Mesa Redonda: 1
IV Benalmádena (Málaga)	Sept. 89	226	3	19	I : 4	Talleres: 8 Exposiciones: 6 Mesa Redonda: 1
V Granada	Sept. 91	349	3	30	I : 7	Grupos Trab.: 3 Talleres: 3 Exposiciones: 4 Mesa Redonda: 1

El número de asistentes, el número de comunicaciones, el número de temas de investigación que se presentan no tienen un crecimiento lineal uniforme, pero sí se puede apreciar un avance sostenido, una consolidación de grupos de trabajo y de grupos de investigación, que participan sistemáticamente en este tipo de actividades.

Igualmente, se podría hacer este análisis con muchas otras reuniones, eventos, congresos o jornadas que se organizan a lo largo de este país; creo que estos datos son importantes porque de alguna manera van dando -con números muy generales- un sentido de la fuerza, de la dimensión y del tamaño de participación que tiene la comunidad y cuál es la dimensión de la producción que la comunidad va generando. De 349 participantes en las últimas Jornadas de la Thales todavía son menos del 10% de los asistentes los que presentan algo, de manera que quede constancia de cuál ha sido su trabajo mediante una comunicación o un póster publicado en las actas finales. Por ello, aunque las cifras generales vayan en aumento, todavía los resultados globales se pueden mejorar bastante.

Otro tipo de reflexión en las relaciones de comunicación podemos hacerlo con las Revistas publicadas sobre enseñanza de las matemáticas.

Revistas de Enseñanza de las Matemáticas

TITULO	EDITOR	PERIODO	NUMEROS REVISADOS	TOTAL DE TRABAJOS	CLASIFICACION
Numeros	Sociedad Cana. I. Newton Prof. Matem.	1981-1990	20	171	M: 45 E: 12 I: 13 C: 6 G: 66
Thales	Sociedad Andal. Profesores de Matemáticas	1984-87	10	89	M: 23
Epsilon (1ª Epoca)	Asoc. Prof. Matemáticas de Andalucía	1984-87	9	100	E: 12
Epsilon (2ª Epoca)	Soc. Andaluza Ed. Matemática "Thales"	1988-90	9	93	M: 13 E: 12
Enseñanza de las Ciencias	ICE Autónoma de Barcelona	1985-91	26 (3 por año)	32 en Did. Mat.	I: 20 G: 12
Suma	Federación de Soc. Profesores de Matemáticas	1988-91	8	113	M: 45, C: 8 E: 11, G: 24

En la tabla no están todas, pero hay bastantes de las publicaciones que mayor difusión e influencia están teniendo en los últimos años. Entre la Revista Números de la Sociedad Canaria, la Revista Thales editada por la Sociedad Thales en su primera época, la Revista Epsilon editada entre el año 84 y el año 90, la Revista Enseñanza de las Ciencias y la Revista Suma en su primer periodo, hasta el año 91, dan un total de 600 artículos y trabajos, en un plazo de 10 años, relativos a Didáctica de la Matemática. Ayer estábamos preguntándonos ¿cuál es nuestra producción?, ¿qué cosas hay?, ¿donde buscar información?, esta información ¿llega o no llega al aula?. Puedo asegurar que la revisión de esos 600 trabajos daría muchas sorpresas, encontraríais seguramente que algunas de las cosas sobre las que estais reflexionando últimamente o sobre las que estais preocupados en relación con vuestro trabajo en el aula, algunas de las investigaciones que estais iniciando, ya ha habido algún compañero que ha hecho un trabajo, un trabajo interesante sobre ese mismo tema.

Alguien hace un estudio, y ahí está; otro compañero hace otro trabajo parecido y también queda ahí, y es posible que también existan un tercer y un cuarto trabajo sobre ideas y tópicos conectados. Sin embargo no existe un cuerpo común de especialistas, no existen grupos que retomen y que avancen las producciones hechas por otros compañeros anteriormente.

No quisiera dejar de referirme a la institucionalización en la Universidad, a la aparición del Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática. Ayer, se hacían ya peticiones sobre producción inmediata a esta Area de Conocimiento y, seguramente, hay que hacerlas con regularidad y mayor frecuencia. Pero también conviene que conozcamos cuál es la situación actual. La situación actual derivada de la Ley de Reforma Universitaria, dice que la organización científica en la Universidad se hace por áreas de conocimiento; actualmente en el catálogo de áreas de conocimiento hay 172 áreas distintas; una de esas 172 es el área de Didáctica de la Matemática.

Sin embargo, la organización, a efectos administrativos y de gestión, de la docencia e investigación en la Universidad se hace a través de los Departamentos universitarios. Todos sabeis que para constituir un Departamento universitario hacen falta al menos 12 profesores de un área, y si no hay número suficiente hay que convenir con profesores de otra u otras áreas para constituir un Departamento. Actualmente, entre todas las universidades hay 1651 Departamentos Universitarios (datos de 1990), y la situación de la Didáctica de la Matemática a efectos administrativos y de gestión es muy variada, es muy dispar. De hecho, conviven actualmente dos grandes modelos. Podemos decir que el área de conocimiento Didáctica de la Matemática, en España actualmente, se acomoda a dos tipos de agrupamiento: hay un primer modelo en donde el Area de Didáctica de la Matemática se agrupa con áreas de matemáticas.

Modelo Primero: agrupamiento con Areas de Matemáticas	n*
Departamentos de Matemáticas, junto con el resto de Areas: Alcalá de Henares, Autónoma Madrid, Cantabria, Islas Baleares, León, Oviedo, Navarra, Zaragoza:	8
Departamentos de Matemáticas, junto con Matemática Aplicada exclusivamente: Castilla la Mancha, Córdoba, Las Palmas.	3
Departamento de Análisis Matemático: La Laguna, Valladolid.	2
Departamento de Economía Aplicada: Alicante.	1

Modelo Segundo: agrupamiento con Areas de Didáctica	n
Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales: Autónoma de Barcelona, Barcelona, Extremadura, País Vasco, Salamanca, Santiago, Sevilla.	7
Departamento de Didáctica de la Matemática y Ciencias Sociales: Murcia.	1
Departamento Formación de Profesorado - junto con resto de áreas educativas -: Cádiz.	1
Departamento Didáctica de la Matemática - Ciencias Sociales y Experimentales: Málaga.	1
Departamento Didáctica de la Matemática (Exclusivamente): Complutense, Granada, Valencia.	3

Así, hay ocho Departamentos, que se denominan Departamentos de Matemáticas, en los que los profesores de Didáctica de la Matemática conviven con compañeros del resto de áreas de matemáticas -Álgebra, Análisis, Geometría y Topología y Matemática Aplicada-, esto ocurre en Alcalá de Henares, Autónoma de Madrid, Cantabria, Baleares, León, Oviedo, Navarra y Zaragoza, en donde hay grandes Departamentos de Matemáticas y dentro de esos grandes Departamentos son miembros los profesores de Didáctica de la Matemática. Hay Departamentos de Matemáticas junto con Matemática Aplicada, exclusivamente, y eso ocurre en Las Palmas, Castilla-la Mancha y Córdoba. El caso de las Palmas es muy peculiar, forman parte del Departamento profesores de Didáctica y profesores de Matemática Aplicada, pero los únicos licenciados en matemáticas que hay en ese Departamento son los de Didáctica de la Matemática, ya que los profesores de Matemática Aplicada son ingenieros todos ellos. Hay Departamentos de Análisis Matemático de los que forman parte los profesores de Didáctica de la Matemática, como son los casos de La Laguna y Valladolid. Y hay un Departamento, como es el caso de Alicante, en donde los profesores de Didáctica de la Matemática están junto con los de Economía Aplicada. En total en 14 Universidades los profesores de Didáctica de la Matemática conviven con los profesores de otras áreas de matemáticas.

Un segundo modelo es el agrupamiento con áreas de Didáctica. Hay universidades en las que el departamento es de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales - o recíprocamente- como, por ejemplo, en la universidad de Extremadura (donde nos encontramos), la de Barcelona, la Autónoma de Barcelona, la del País Vasco, Salamanca, Santiago y Sevilla. Hay un departamento en Murcia de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Sociales. En Cádiz hay un gran Departamento de Formación del Profesorado, en el que intervienen la casi totalidad de áreas educativas, donde están todas las Didácticas. Hay un Departamento de Didáctica de la Matemáticas, de las Ciencias Experimentales y de las Sociales en Málaga. Finalmente, hay tres Universidades en las que sólo los profesores de Didáctica de la matemática constituyen Departamento: esto ocurre en la Complutense de Madrid, en la Universidad de Granada y en la de Valencia.

¿A qué es debida esta dispersión? A muchas razones: a la historia de cada universidad, al número de profesores que hay y a la formación previa que han recibido, a las relaciones personales e institucionales con profesores de la Facultad de Matemáticas o de las Escuelas de Magisterio, a los intereses existentes, a la relación de fuerzas, etc. Pero no cabe duda que no será lo mismo un Departamento en donde los profesores de Didáctica convivan con otros profesores de Didáctica de otras disciplinas, que un Departamento en donde los profesores de Didáctica de la Matemática estén junto con profesores de matemáticas; en cada caso habrá ventajas e inconvenientes.

Las funciones de los departamentos de Didáctica de la Matemática son variadas, tienen que ver con la docencia, tienen que ver con la investigación, tienen que ver con la extensión y difusión universitaria y tienen que ver con la responsabilidad en el gobierno y gestión de cada Universidad. El balance es muy desigual; estamos en una situación de transición, en la que hay que hacer grandes esfuerzos para consolidar Departamentos de los que emerjan líneas de investigación, en los que se produzca investigación homologable. Muchos estamos convencidos que la Didáctica de la Matemática es un gran campo de investigación, pero eso hay que demostrarlo, eso hay que probarlo mediante una producción coherente, sostenida y de calidad científica reconocida por los especialistas internacionales, por la comunidad internacional; se trata de un reto importante, que nos afecta a todos los que estamos en ello.

Que la Didáctica de la Matemática es un gran campo de investigación me voy a permitir resumirlo rápidamente enumerando una serie de líneas de investigación que he encontrado en documentos, en revistas y en los libros que edita la comunidad. Un primer campo es el denominado **cognición matemática**, conectado con la psicología y relacionado con la investigación en educación matemática; en este campo he encontrado investigaciones sobre desarrollo cognitivo; investigaciones sobre aprendizaje matemático; e investigaciones sobre resolución de problemas. Investigaciones sobre desarrollo cognitivo que estudian o bien las capacidades cognitivas invariantes en amplios periodos, siguiendo líneas de estudio de corte piagetiano, o bien problemas de cambios en las capacidades cognitivas, y todos ellos en general haciendo análisis sobre ideas que se adquieren de modo natural; son investigaciones relativas a la formación de conceptos matemáticos, a la adquisición de conocimientos matemáticos en amplios periodos. También he encontrado investigaciones sobre aprendizaje de las matemáticas relativas a ideas que se adquieren en niveles intermedios, a factores y procesos que producen o facilitan la transición o la transmisión desde un nivel a otro; investigaciones relativas a procesos y capacidades ligadas a la comprensión de un contenido concreto y, también, relativas a ideas que no se desarrollan de un modo natural. Las investigaciones sobre resolución de problemas las resumo en tres grandes apartados, siguiendo ideas puestas de manifiesto por Schoenfeld en el año 85 en Madrid; hay investigaciones sobre problemas en forma escrita durante los primeros años de escolaridad, de los que los famosos problemas aritméticos constituyen un gran campo; resolución de problemas también desde la matemática aplicada y el uso de modelos matemáticos; estudios sobre procesos cognitivos seguidos en la resolución de problemas; y estudios sobre habilidades para resolver problemas matemáticos complejos. Esta es una clasificación de carácter muy general.

Además de investigaciones sobre cognición matemática hay **investigaciones curriculares**, entre las que encontramos estudios comparativos y longitudinales, o bien estudios sobre movimientos y programas e investigaciones sobre enseñanza de las matemáticas; también son de carácter curricular las investigaciones sobre evaluación, sobre formación del profesorado y los estudios sobre materiales didácticos. Cada uno de estos apartados constituye un cuerpo de estudio diferenciado, tiene por sí mismo entidad como campo de investigación.

La verdad es que hasta ahora, hasta el momento, nuestra aportación, la aportación de nuestra comunidad es en algunos de estos campos prácticamente vacía, y en otros solamente incipiente.

Además de las investigaciones curriculares, que constituyen una parte muy considerable dentro de los estudios en educación matemática, hay otros campos de investigación importantes, como es el caso de las **investigaciones epistemológicas y sobre fundamentos**, que han tenido una influencia determinante; los trabajos de Piaget, los trabajos de Vigotsky, los trabajos del IDM de la Universidad de Bielefeld, los trabajos de la Universidad de Georgia, de algunas universidades francesas. Estudios sobre **contexto social y cultural de las matemáticas**. Y, finalmente, lo que los americanos llaman **agendas de investigación**, de las cuales el *Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics*, recientemente aparecido, ofrece una amplia panorámica.

¿Cuáles son las expectativas de futuro?. Creo que se dan condiciones interesantes en la actualidad en España para el desarrollo de la Educación Matemática. El papel de las matemáticas en la sociedad, no el de la educación matemática, sino el papel de las matemáticas en la sociedad es un dato importante para que exista desarrollo de la educación matemática. Hace 25 años no había matemáticas en este país, no había producción propia en matemáticas; comenzaron a salir al extranjero los primeros investigadores, para formarse en universidades y centros de otros países; hoy día, sin embargo, podemos decir que tenemos una comunidad de matemáticos españoles, respetable y conectada con grupos internacionales de investigación matemática. Pero hasta que no ha existido una comunidad de matemáticos, de algebristas, de analistas, de geómetras, de estadísticos, no podemos considerar que se hayan dado las condiciones para el desarrollo de la educación matemática. Las matemáticas que recibíamos con anterioridad eran de importación, no había producción propia de matemáticas. Creo que esta es una condición importante, que hoy día ya sí se da en nuestro país, lo cual permite la existencia de un pensamiento y una literatura propios en matemáticas, trabajos de investigación y divulgación, seminarios de matemáticas a los que podemos asistir y, de este modo, completar nuestra formación en otros campos. Por eso entiendo que la presencia de una

comunidad sólida de matemáticos es un dato importante ya que, aunque tengamos una profesión distinta, estamos obligados a entendernos y a trabajar conjuntamente en muchas ocasiones.

Igualmente, hay una comunidad de profesores con conciencia de su comunidad de intereses. Hay una voluntad para reflexionar sobre la enseñanza de las matemáticas, se están constituyendo sociedades fuertes que, a pesar de algunas de las debilidades señaladas, tienen un peso considerable en el campo de la educación y tienen que adquirir aún mayor fuerza eliminando esas debilidades. Creo que las aportaciones de los educadores para sostener el movimiento asociativo hacen que la comunidad de profesores, la comunidad de educadores matemáticos, hoy día, desempeñe funciones sociales importantes. Es una condición imprescindible para el desarrollo de la educación matemática la existencia de tal comunidad con un grado de lucidez considerable sobre los intereses que representa y que debe defender.

También es importante un clima social, económico, cultural y político adecuado para mantener el desarrollo de la educación matemática. Debemos de participar en la gestión y en el sostenimiento del sistema educativo, debemos comprometernos en los diseños curriculares, debemos estar presentes en los lugares donde se tomen las decisiones que afecten a la educación matemática. Hay que disponer de mecanismos, ayudas y apoyos de fundaciones externas para realizar actividades que tengan que ver con la educación matemática. Esa dimensión social y política de la educación matemática, que muchas veces se ha descuidado, o que en ocasiones se ha planteado ingenuamente, es una de las condiciones emergentes en el momento actual, de importancia considerable para nuestro trabajo.

Institucionalizar la educación matemática dentro de la universidad y también sentirnos comprometidos con esa institucionalización, en el sentido de exigir, de participar, de demandar que los resultados de las investigaciones nazcan y se concreten en la práctica docente, son todas ellas cuestiones importantes. Pero sin una institucionalización dentro de la vida académica universitaria, la educación matemática tendría un desarrollo limitado e insuficiente.

He realizado un breve repaso por un amplio campo de trabajo que tenemos por delante, que es extenso, que es profundo, que es diversificado y que, en muchos casos, está aún por construir. Entiendo que es necesario aunar esfuerzos, aunar muchos esfuerzos, mantener una continuidad, potenciar un trabajo coordinado, y eso es responsabilidad de todos nosotros, es tarea para un desempeño profesional que puede ocuparnos seguramente la mayor parte de nuestra vida profesional y es un trabajo de todos.

Volviendo al comienzo de esta exposición, entiendo que sí hay motivos para hacer un balance optimista; no quisiera haber transmitido ningún tipo de pesimismo, sino sólo una serie de consideraciones críticas ineludibles. Creo

que sí, que se puede hacer un balance optimista, pero también que debemos tener conciencia de que el esfuerzo debe ser continuado y que no nos van a regalar nada que nosotros no hayamos buscado y trabajado adecuadamente. Pocas veces una generación ha tenido ante sí tantas oportunidades para contribuir a un desarrollo científico digno de la profesión y los campos de trabajo que tiene encomendados.

BIBLIOGRAFIA

Abraham, J., Bibby, N. (1988) *Mathematics and Society: ethnomathematic and a public education curriculum*. For the Learning of Mathematics, Vol.8 nº 2, pp. 2-11.

Consejo de Universidades (1990) *Guía de Departamentos Universitarios*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

D'Ambrosio, U. (1979) *Metas y objetivos generales de la Educación Matemática*. Cap. IX en Nuevas Tendencias en la Enseñanza de las Matemáticas, International Commission Of Mathematical Instruction. Vol. IV París: UNESCO.

Davis, R.S. (1986) *Status Report*. Journal of Mathematical Behavior, Vol. 5, pp. 111-112.

Freudenthal, H. (1981) *Major Problems of Mathematics Education*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 12, nº 2.

Grouws, D.A. (edt.) (1992) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Ministerio de Educación y Ciencia (1992) *Estadística de la Enseñanza en España, Niveles de Preescolar, General Básica y E.E.M.M. 1989/1990*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Rico, L. ; Sierra, M. (1991) *La Comunidad de Educadores Matemáticos*, en Gutiérrez, A. (edt.) *El Area de Conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.

Romberg, T. (1991) *Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas*. Revista de Educación nº 294, pp.323-406.

Wheeler, D. (edt.) (1984) *Research Problems in Mathematics Education*. For the Learning of Mathematics, Vol 4, nº 1 pp. 40-47; nº 2 pp. 39-44; nº 3 pp. 22-29.

ANALISIS COMPARADO DEL CURRICULO DE MATEMATICAS (NIVEL MEDIO) EN IBEROAMERICA

M^a José Rodríguez Conde. Facultad de Educación. Universidad de Salamanca; D. Miguel de Guzmán. Presidente de la Comisión Internacional de Educación Matemática; M^a José García Sípido, Miembro de la Organización de Estados Iberoamericanos

La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI), ha hecho suya una de las recomendaciones emanadas de la Reunión de la Asamblea General de Ministros de Educación Iberoamericanos, celebrada en Madrid del 28 al 30 de noviembre de 1990, en la que se sugería llevar a cabo un profundo análisis y estudio de los Sistemas Educativos de los países sobre los que tales Ministros tienen competencias, es decir, sobre todos los países cuya lengua oficial es el castellano o el portugués.

La anterior recomendación se ha puesto en marcha, desde el año 1991, a través del PROYECTO IBERCIMA, diseñado por la OEI, con el patrocinio del Ministerio de Educación y Ciencia y la Sociedad Estatal Quinto Centenario, del Gobierno Español, y con la colaboración de los Ministerios de Educación de todos los países iberoamericanos.

Este Proyecto se diseñó con objeto de estudiar y analizar, de forma exhaustiva, la situación actual de la enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas, en el nivel medio, en los países iberoamericanos.

Conviene resaltar que una de las primeras decisiones tomadas, a la hora de diseñar el Proyecto, fue la de ceñir el estudio a las materias de Ciencias y de Matemáticas y, dentro de ellas, al denominado nivel medio. La razón de elegir estas dos áreas se fundamenta en la idea de seleccionar asignaturas "objetivas"; es decir, sujetas a pocas interpretaciones fuera de sus correspondientes ámbitos de actuación; como un primer paso para armonizar, de alguna manera, los currícula de los países iberoamericanos. Por otra parte, centrar el análisis de estas dos áreas en el denominado nivel medio se justifica en el hecho de ser una de las etapas educativas que adquiere, cada vez, mayor importancia en todos los sistemas educativos. Esta etapa educativa es la etapa intermedia entre la Educación Básica y la Universidad, formada por los seis años anteriores al ingreso en los estudios superiores y corresponde, aproximadamente, a aquella en la que los alumnos tienen una edad que oscila entre los 12-13 y los 17-18 años. En ella se completa la formación general de muchos ciudadanos y se decanta su futuro profesional, lo que, sin duda, influye decisivamente en el desarrollo social, cultural y económico de cada país. El diseño de su curriculum es, por tanto, difícil y decisivo.

En el desarrollo de este Proyecto se han considerado varias líneas de actuación. Cada una de ellas tiene su propia ejecución temporal y los aspectos tratados, son los siguientes:

- "*Estudio de los Planes y Programas vigentes en Ciencias y Matemáticas*" (año de comienzo: 1991).

- "*Elaboración de una Base de Datos en la que se almacenarán todos aquellos aspectos relacionados con los diferentes programas: Especialistas Científicos y en Didácticas Específicas, Instituciones, Recursos, Materiales Didácticos, Bibliografía, etc.*" (año de comienzo: 1991).

- "*Estudio sobre la Formación y Capacitación de los Docentes en Didácticas Especiales*" (año de comienzo: 1992).

- "*Estudio del Diseño de Libros de Texto, Materiales Didácticos y Equipamientos*" (año de comienzo: 1992).

Los cuatro programas anteriores, incluidos en el Proyecto IBERCIMA, se complementan con otro más dedicado a Actividades Extracurriculares (Olimpiadas, Simposios, Exposiciones de Material Didáctico, Cursos de Formación, etc.).

Los programas mencionados ya se han puesto en marcha y acaba de concluirse la primera etapa del primero de ellos, es decir, el relativo al análisis de los diferentes planes y programas de estudio, en Ciencias y Matemáticas, para el nivel medio. Este hecho es el que hace posible presentar aquí los primeros resultados obtenidos.

Sin embargo, aunque haya concluido el análisis para Ciencias y Matemáticas, los resultados que aquí se presentan sólo harán referencia a los aspectos relacionados con las Matemáticas.

En el diseño del Proyecto IBERCIMA se contempla como objetivo general, para el programa que aquí se comenta, el siguiente:

"Analizar el estado de la situación de la enseñanza de la Matemática [...] en el nivel medio y definir pautas orientadoras para el diseño de políticas y estrategias que sirvan como recomendación a los Ministerios de Educación y permitan avanzar en un proceso de innovación y armonización curricular".

Este objetivo se concreta en las siguientes líneas de actuación:

1ª. "Analizar los planes y programas de estudio de Matemáticas [...] en el nivel medio, a fin de contar con un diagnóstico sobre los contenidos de la enseñanza y el aprendizaje de los mismos y sobre los métodos que se emplean para evaluar el rendimiento en los países iberoamericanos".

2ª. "Determinar el grado de conocimiento que cabe esperar de los alumnos que ingresan y egresan de los niveles básico y medio".

3ª. "Definir pautas orientadoras dirigidas al mejoramiento de los métodos y programas para la enseñanza de la Matemática [...]".

ESTUDIO DE LOS PLANES Y PROGRAMAS VIGENTES EN MATEMATICAS

La metodología empleada para llevar a cabo el estudio de los diferentes planes y programas vigentes de Matemáticas, de nivel medio, en los países iberoamericanos se concretó en los siguientes pasos:

1º. RECOGIDA DE MATERIAL

Se solicitó a las Direcciones de Relaciones Internacionales de los Ministerios de Educación Iberoamericanos, toda la documentación que hiciera referencia a los diferentes planes y programas vigentes en cada uno de los países.

2º. ELABORACION DE UN INFORME DIAGNOSTICO PREVIO

Con objeto de elaborar un Informe Diagnóstico sobre la situación de los diferentes planes y programas vigentes en los países iberoamericanos, se encargó a un equipo de investigación de la Universidad de Salamanca (España) la redacción del mismo. Simultáneamente, se solicitó la elaboración de un informe sobre "Tendencias y Experiencias Innovadoras en Educación Matemática" con objeto de tener un marco de referencia con vistas a posibles reformas de los planes de estudio.

El equipo de investigación, para llevar a cabo el análisis que se le había encomendado, diseñó los siguientes objetivos y metodología:

1º. Objetivos de la Investigación:

- a.- Analizar los currícula de matemáticas vigentes de cada uno de los países iberoamericanos, en el nivel medio.
- b.- Comparar los currícula analizados en cada una de las regiones geográficas.
- c.- Valorar globalmente estos currícula, a tenor de las nuevas tendencias en Educación Matemática.

2º. Metodología de la Investigación:

- a.- Plantear los aspectos que deberían aparecer en una definición operativa de currículum de matemáticas, y que serán los que el equipo buscará en los diferentes planes y programas.

Tales aspectos son los relativos a:

- 1) Fundamentación de los currícula.
- 2) Objetivos didácticos.
- 3) Contenidos de aprendizaje.
- 4) Orientaciones didácticas.
- 5) Procesos de evaluación.

- b.- Analizar los documentos enviados por los Ministerios de Educación Iberoamericanos a la OEI.

Con respecto a la documentación recibida, se debe señalar que era escasa en muchos aspectos y que parte de la misma parecía obsoleta.

c.- Dada la cantidad de países que se iban a analizar, el gran volumen de documentación aportada y la conveniencia de obtener conclusiones más locales, se procedió a dividir la comunidad de los 22 países iberoamericanos en cuatro zonas, en función de sus características geográficas, con objeto de analizar cada una de ellas por separado y teniendo como objetivo final la comparación de los currícula de todos los países.

Estas regiones geográficas fueron las siguientes: Países del Cono Sur (Argentina, Brasil, Chile, Paraguay y Uruguay), Países Andinos (Bolivia, Colombia, Ecuador, Perú y Venezuela), Países de Centroamérica, El Caribe y México (Costa Rica, Cuba, El Salvador, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Puerto Rico y República Dominicana) y Países Ibéricos (España y Portugal).

d.- Con la documentación recogida, se elaboraron informes subregionales provisionales, que se presentaron a tres talleres subregionales.

Estos informes se elaboraron analizando los documentos aportados por los diferentes Ministerios de Educación. En ellos se buscaron los aspectos del curriculum señalados anteriormente, elaborando una ficha para cada uno de los países, donde se contemplaban los siguientes temas:

1) Ubicación de la asignatura de matemáticas en los planes de estudio.

Para ello se buscaron datos relativos a:

- Organización de la educación en el nivel medio.
- Año del plan de estudios.
- Reformas previstas e implantadas de los planes.

Así como las respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Hay matemáticas en todos los cursos?
- ¿Son obligatorias las matemáticas para todos los alumnos?
- ¿El programa es común o diversificado?
- ¿Cuál es su dotación horaria?
- ¿Qué lugar, según las horas asignadas, ocupan las matemáticas

respecto de otras áreas clásicas?

2) Fundamentación del curriculum de matemáticas.

Para determinar el grado de fundamentación de cada uno de los currícula, se analizó la presencia, explícita o implícita, en los documentos oficiales aportados por los diferentes Ministerios, de aspectos epistemológicos, pedagógicos, psicológicos y socio-culturales. Cada uno de ellos matizado por las siguientes reflexiones:

Aspectos epistemológicos: ¿por qué se deben enseñar matemáticas?, ¿cuál es la naturaleza y significado de los contenidos y de los métodos matemáticos?, ¿qué necesidades de educación matemática tiene un joven para desenvolverse en la vida cotidiana, en el trabajo, o en los estudios

superiores?, ¿cómo se relacionan las matemáticas con otras materias?, ¿cómo influyen y cómo influirán las nuevas tecnologías en la educación matemática?

Aspectos pedagógicos: ¿qué estrategias de enseñanza son más adecuadas?, ¿cómo tratar la diversidad de rendimientos, de capacidades y de actitudes que manifiestan los estudiantes?, ¿cuál es la formación del profesorado?

Aspectos psicológicos: ¿qué características psicológicas tienen los estudiantes de este nivel educativo?, ¿cómo aprenden las personas?, ¿cuál es el proceso de aprendizaje más eficaz en la escuela?

Aspectos socio-culturales: ¿cuáles son los conocimientos y las capacidades que la sociedad demanda al sistema educativo?, ¿qué valores y actitudes contribuyen al desarrollo social y cultural?, ¿qué modelo de persona se desea formar?, ¿cuándo debe separarse la formación profesional de la académica?

Se buscaron, entonces, respuestas a preguntas como las siguientes:

- ¿Están incluidos planteamientos epistemológicos sobre el tipo de matemáticas que se pretende enseñar?
- ¿Existen alusiones de tipo cognitivo referidas a cómo aprende el alumno?
- ¿Cuál es el peso que se da a las necesidades sociales en el diseño del curriculum?

3) Objetivos didácticos en matemáticas.

Después de analizar la fundamentación de los currícula, el equipo de investigación pasó a estudiar uno de sus componentes más importantes: los objetivos. Estos se analizaron desde cuatro campos distintos de aprendizaje:

Información: hechos, conceptos y estructuras conceptuales que pueden expresarse y transmitirse verbalmente.

Habilidades conceptuales y psicomotrices: aptitudes, reglas o procedimientos para realizar tareas de carácter intelectual o comportamientos motores cuya consecución requiere práctica. En el caso de la educación matemática se concretan en ciertas rutinas o algoritmos.

Estrategias cognitivas: capacidades generales que gobiernan el aprendizaje del individuo, su retentiva y su conducta de pensamiento. Entre ellas figuran las estrategias heurísticas (procedimientos no algorítmicos que guían la resolución de un problema), la búsqueda de relaciones conceptuales y el desarrollo de una demostración.

Actitudes: instancias que predisponen y dirigen los hechos de la realidad y representan una síntesis personal que filtra percepciones y orienta el pensamiento, facilitando la adaptación de la persona al contexto. En el caso de la educación matemática comprenden, también, una valoración de la naturaleza y del poder de las matemáticas.

Para tener una visión clara de la importancia y cualidades que se otorgan a los objetivos, se buscaron las respuestas a las siguientes preguntas:

- ¿Hay diseñados objetivos de ciclo, de curso, de unidad temática, etc.?

- ¿Cómo se presentan estos objetivos?, ¿cuál es su grado de especificación?

- ¿Se refieren a todos los campos del aprendizaje?
- ¿Cuál es el nivel cognitivo que se exige en cada objetivo?

4) Contenidos de aprendizaje en matemáticas.

Para llevar a cabo un análisis de los contenidos presentes en los diferentes currícula, se buscaron las respuestas a preguntas como las siguientes:

- ¿Cuáles son los criterios que se utilizan para la selección de los contenidos?

- ¿Estos criterios aparecen explícitos en el currículum?
- ¿Qué bloques temáticos se eligen?
- ¿Cómo se organizan los bloques temáticos (secuencia, unidades, etc.)?
- ¿Cómo se representan los contenidos?
- ¿Se tienen en cuenta los procedimientos y las actitudes?

5) Orientaciones didácticas para la enseñanza de las matemáticas.

Con objeto de estudiar la posible presencia de actividades y orientaciones didácticas en los diferentes currícula, se plantearon las cuestiones siguientes:

- ¿Se sugieren actividades instructivas?
- ¿Se asigna un tiempo determinado para cada unidad?
- ¿Se dan orientaciones metodológicas a los profesores?

6) Procesos de evaluación.

Por último, con objeto de analizar la presencia de criterios, procedimientos o actividades para llevar a cabo la evaluación, se buscó si en los documentos aportados por los diferentes países se daba respuesta a la siguiente pregunta:

- ¿Se dan criterios o algún tipo de información para llevar a cabo la evaluación?

3º. REALIZACION DE TALLERES SUBREGIONALES

Una vez elaborado este informe provisional, se desarrollaron tres talleres de carácter subregional con objeto de reunir a los miembros del equipo de investigación con los responsables de desarrollo de currículum de cada uno de los países asistentes a cada uno de los talleres. Estos talleres tuvieron lugar en Montevideo (Uruguay) del 9 al 12 julio de 1991 para los Países del Cono Sur; en Santafé de Bogotá (Colombia) del 17 al 20 de septiembre de 1991, para los Países Andinos e Ibéricos y en Santo Domingo (República Dominicana) del 22 al 25 de octubre de 1991 para los Países de Centroamérica, El Caribe y México.

El objetivo de cada uno de los talleres fue el de presentar tanto el Informe de Diagnóstico, como el de Tendencias Innovadoras, y desarrollar un diálogo sobre los mismos, a tenor de las peculiaridades propias de los países asistentes.

En estos tres talleres se recogió nueva información, aportada por los responsables de desarrollo de currículum de cada uno de los países asistentes, para completar el informe de diagnóstico previo.

4º. ELABORACION DEL ANALISIS COMPARADO DE LOS CURRICULA

Después de realizarse los diferentes talleres subregionales, el equipo de investigación retomó el trabajo de elaborar el Informe de Diagnóstico, utilizando la información aportada por los responsables de currículum de los Ministerios de Educación de los países asistentes a cada uno de los talleres celebrados. La metodología empleada por este equipo fué la misma que ya se ha señalado anteriormente.

Este equipo de investigación presentó a la OEI su informe final, titulado: **"ANÁLISIS COMPARADO DEL CURRÍCULUM DE MATEMÁTICAS (NIVEL MEDIO) EN IBEROAMÉRICA"**, en el que se recoge la investigación que se llevó a cabo y en el que se incluyen una serie de conclusiones relativas a cada uno de los elementos que definen un currículum de matemáticas. Estas conclusiones son las siguientes:

a. Aspectos generales:

Hemos observado, en primer lugar, que prácticamente todos los países iberoamericanos dividen el sistema educativo del nivel medio en dos etapas de tres cursos cada una. La primera de ellas (de 12-13 a 14-15 años) tiene, en general, un único currículum de matemáticas, obligatorio para todos los estudiantes, lo que es un acierto por cuanto representa una intención de dotar a todos los ciudadanos de una misma educación matemática y, por lo tanto, de contribuir a la democratización de la cultura y a la integración de la sociedad con las mismas oportunidades. Sería deseable, además, que la escolarización real de todos los ciudadanos llegara, al menos, hasta esta etapa educativa. En la segunda etapa (de 15-16 a 17-18 años) existen, en muchos países, demasiadas modalidades de estudios. Una reestructuración de éstas y una adecuación del currículum a las necesidades reales contribuiría, en muchos casos, a concentrar recursos y a rentabilizar la eficacia del sistema docente.

En segundo lugar, hemos constatado que la mayoría de los currícula están concebidos de una manera restringida. Frente a la concepción amplia del currículum como proyecto que indica de modo coherente qué, cómo y cuándo enseñar y qué, cómo y cuándo evaluar, la mayoría de los currícula analizados consisten en un listado de temas precedidos por unos objetivos didácticos y completados, en el mejor de los casos, con sugerencias metodológicas muy puntuales. Existe una ausencia casi generalizada de los elementos que configuran un auténtico currículum: Fundamentación, Objetivos didácticos, Contenidos de aprendizaje, Orientaciones didácticas y Procesos de evaluación.

b. Fundamentación de los currícula.

No se recoge en los currícula un análisis riguroso de los aspectos epistemológicos, pedagógicos, psicológicos y socio-culturales que condicionan y fundamentan cualquier decisión curricular. Se transmite, a partir de los escasos elementos que los configuran, algunas ideas ocultas sobre estos aspectos. En concreto, percibimos una visión excesivamente cerrada y fija de la matemática, basada en la estructuración y en la organización lógico-deductiva que hizo de esta ciencia la llamada "matemática moderna". Estructuración que resulta perjudicial cuando se trasvasa directamente a la educación como se ha puesto de relieve en los últimos veinte años. La matemática es concebida sólo como un producto cultural y no como un proceso en el que los sujetos van construyendo el sentido y el significado de sus propios aprendizajes, a la vez que adquieren estrategias de pensamiento cuyo alcance va más allá de los conceptos o de los procedimientos asimilados, los cuales pueden dejar de ser relevantes a medida que evolucionan otras ciencias y la tecnología.

Se intuye también una concepción simplista del proceso de enseñanza-aprendizaje basado en la transmisión, deductivamente ordenada, de los contenidos de la ciencia matemática, que el estudiante aprende mediante la práctica rutinaria o la aplicación a problemas formulados en contextos abstractos. En este sentido, tampoco se aprecia una referencia a la evolución histórica de la matemática, modelo y fuente, no sólo para contextualizar el origen de los conceptos y de los procedimientos, sino para aprenderlos significativamente.

c. Objetivos didácticos.

Prácticamente en todos los currícula aparecen formulados objetivos generales (de etapa o de cursos) y, en algunos casos, específicos (de unidades didácticas). Los primeros se refieren a aprendizajes de conceptos, de procedimientos algorítmicos, de estrategias de pensamiento y de actitudes. En cambio, muchas veces, al pasar a la formulación concreta de los objetivos específicos, éstos tan sólo se refieren a conceptos y procedimientos rutinarios, como si el aprendizaje de estrategias o de actitudes se obtuviera automáticamente con la consecución de los otros objetivos. Esta incoherencia nos hace pensar que, tal vez, existieron dos equipos de redactores del diseño curricular: los pedagogos y los matemáticos, cuya desarmonía se refleja también en la elección y secuenciación de contenidos como veremos más adelante. En general, se aprecia un predominio real de los aprendizajes que se refieren al dominio de ciertas rutinas o procedimientos algorítmicos, con el riesgo que esto representa en una sociedad cambiante, donde calculadoras y computadoras realizan, cada día con mayor eficacia, todo este conjunto de tareas.

d. Contenidos de aprendizaje.

Debemos aclarar, en primer lugar, la diferencia entre un "tema" y un "contenido de aprendizaje": los temas son el asunto sobre el cual se desarrollan distintos contenidos de aprendizaje (conceptos, procedimientos, estrategias cognitivas, etc.). La matemática, como ciencia, está hecha de temas; la educación matemática los utiliza para que los estudiantes, a través de ellos, alcancen distintos contenidos de aprendizaje. Ahora bien, hemos visto que la mayoría de los currícula presentan sus contenidos en forma de un listado de temas y subtemas, agrupados y secuenciados en unidades didácticas monotemáticas. Así, los contenidos de aprendizaje se presentan como un reflejo del contenido de la ciencia matemática. En algunos casos, al lado de cada unidad temática, una lista de objetivos especifica los aprendizajes que han de conseguir los alumnos, con lo que la función orientadora del diseño curricular queda cumplida ya que los profesores sabrán discernir los hechos, los conceptos, las estructuras conceptuales, los procedimientos algorítmicos, las estrategias cognitivas y las actitudes que deben enseñar a sus alumnos. Pero, en otros casos, tal lista no existe, y el profesor sólo encuentra un enunciado temático del tipo "La función lineal. Gráfica" y, por lo tanto, habrá de escoger los contenidos de aprendizaje para sus alumnos a partir de ese tema: el concepto de función lineal, procedimientos para distinguir si dos magnitudes están relacionadas mediante una función lineal, estrategias de generalización, apreciación de la matemática como un lenguaje preciso en la cuantificación y simbolización de las relaciones, etc. Los dos procedimientos son válidos. Uno obedece a un modelo curricular más flexible que el otro. Ahora bien, dado que los profesores tienden a pensar más en términos de contenidos que de objetivos, sería más útil, de cara a la planificación educativa, una presentación de los contenidos de aprendizaje mediante una lista suficientemente detallada de hechos, conceptos, estructuras conceptuales, procedimientos algorítmicos, estrategias cognitivas y actitudes, agrupados en grandes bloques temáticos que, cíclicamente, podrían repetirse en cada curso. Los objetivos específicos pasarían a ser pautas de evaluación de esos contenidos de aprendizaje.

Como consecuencia de nuestro análisis, hemos obtenido una lista de temas propuestos mayoritariamente para ser tratados en la primera etapa de este nivel medio:

- NUMEROS NATURALES (Definición. Ordenación. Operaciones)
- NUMEROS ENTEROS (Definición. Ordenación. Operaciones)
- NUMEROS RACIONALES (Definición. Ordenación. Operaciones)
- NUMEROS REALES (Extensión de **Q** a **R**. Valores aproximados. Ordenación y representación en la recta. Operaciones con radicales)
- PROPORCIONALIDAD
- MEDIDAS (Longitud, superficie, volumen, capacidad, masa, peso y tiempo)

- GEOMETRIA DEL PLANO (Rectas. Angulos. Elementos y clasificaciones de triángulos, cuadriláteros y polígonos. Circunferencia y círculo. Perímetros y áreas. Semejanza. (Teorema de Pitágoras)

- GEOMETRIA DEL ESPACIO (Descripción, elementos, áreas y volúmenes de sólidos elementales)

- POLINOMIOS (Conceptos. Operaciones. Divisibilidad)

- ECUACIONES Y SISTEMAS DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO

- FUNCIONES LINEALES Y CUADRATICAS (Conceptos y representación gráfica)

- ESTADISTICA DESCRIPTIVA (Distribución de frecuencias. Representaciones gráficas. Medidas de tendencia central)

¿Esta lista es adecuada para todos los alumnos?, ¿representa un núcleo común de temas obligatorios a partir de los cuales pueden elaborarse contenidos de aprendizaje diferenciados según las características y las necesidades de los alumnos?, ¿quién debería hacer esa selección, los profesores o la administración educativa?, ¿con qué criterios?, ¿responden estos temas a las demandas sociales de educación matemática para hoy y para el futuro?, ¿son significativos dentro de la propia ciencia matemática actual?

Parece evidente que casi todas estas preguntas deben ser contestadas desde los distintos contextos culturales, socioeconómicos y políticos. No es igual una situación en la que se ha alcanzado un grado de escolarización obligatorio y gratuito a los 12 años, que a los 14 ó a los 16. También influye la decisión política sobre cuándo comienza un curriculum diversificado entre una formación académica y una formación profesional, si las matemáticas son para todos o sólo para una élite que luego va a ocupar los centros de poder de cada país, etc. A nosotros nos parece que esta lista de temas puede ser la adecuada siempre que en la selección de contenidos de aprendizaje se tengan en cuenta los siguientes criterios:

- En el aprendizaje de procedimientos algorítmicos debe enfatizarse más el aprendizaje de las estrategias heurísticas que conducen a su construcción que el dominio rutinario del procedimiento. El dominio sin errores de estas destrezas es cada vez menos importante cuando se plantean en contextos abstractos como un fin en sí mismos; por ejemplo, resolver un sistema de ecuaciones, factorizar un polinomio dado, operar con radicales, calcular la media y la desviación típica de una tabla de números abstractos, etc. La razón de esto se encuentra en el uso cada vez más extendido de calculadoras y computadoras que realizan estos procedimientos rápida y eficazmente. Ahora bien, lo que sigue teniendo sentido es plantear una situación problemática cuya resolución exige, tras una necesaria exploración, escoger, plantear y aplicar un procedimiento algorítmico. En resumen, es más importante saber cómo se construye un procedimiento algorítmico y cuándo hay que utilizarlo que dominar su aplicación sin errores en contextos absolutamente abstractos y formales.

- El tema de los polinomios y algunos aspectos de las ecuaciones y de las funciones, quizá, no deben ser desarrollados por todos los alumnos; algunos conceptos y procedimientos (como la divisibilidad de polinomios, por ejemplo) sólo deberían ser aprendidos por los alumnos más capacitados. Si deseamos que el álgebra tenga sentido y significado para los estudiantes, necesariamente ha de presentarse como un lenguaje que resuelve problemas, que simboliza fórmulas, etc. El límite en el dominio de sus procedimientos algorítmicos probablemente debe estar en el uso que de ellos se hace en otras materias (como la Física, por ejemplo).

- Los temas de medidas y de geometría deberían ser utilizados para desarrollar aprendizajes de estrategias generales y de actitudes, dada su vinculación con la realidad, fuente de problemas sugerentes y variados. Conjetura y evaluación, razonamiento inductivo y deductivo, simbolización y analogía, etc., son estrategias que podrían aprenderse tanto en la construcción de los modelos matemáticos como en su aplicación.

En la segunda etapa del nivel medio (15, 16 y 17 años) la mayoría de los Planes de Estudio ofrecen una gran diversidad de opciones que pueden clasificarse en dos grupos: profesionalizantes y académicas. Las primeras preparan al joven para desarrollar un trabajo y las segundas para ingresar en los estudios superiores. Es evidente que, en ambos casos, la selección de temas y de contenidos de aprendizaje está muy condicionada por el contexto de necesidades concretas. De manera que parece poco adecuado intentar proponer una lista determinada.

e. Orientaciones didácticas.

En la mayoría de los currículos analizados no encontramos un planteamiento metodológico completamente elaborado. Lo frecuente es hallar algunas recomendaciones puntuales relativas, por ejemplo, a cómo presentar ciertos contenidos del curriculum y otras de carácter más general, como remarcar la importancia de la resolución de problemas. Sin embargo, en este último aspecto, no se aclara muy bien la diferencia entre una situación donde el alumno ya conoce un procedimiento que tan solo debe aplicar -con más o menos dificultades añadidas- y de aquella otra, novedosa y desafiante, frente a la cual, de entrada, desconoce el camino para abordarla. Se infiere, por el tipo de actividades instructivas que en algunos currículos se proponen, que el modelo metodológico subyacente en la mayoría de los casos se centra en la exposición de los conceptos y procedimientos por parte del profesor (siguiendo la estructura deductiva de la ciencia matemática) y la práctica posterior por parte de los alumnos con ejercicios más o menos rutinarios. A veces se observa una contradicción entre las orientaciones

didácticas que preceden al programa, donde se sugiere una metodología heurística (redescubrimiento, investigación, etc.) y la propia secuencia de contenidos y actividades que luego se proponen.

No hemos encontrado referencias explícitas sobre el papel que la calculadora y las computadoras deben jugar en la enseñanza de las matemáticas, así como otros recursos materiales. Creemos que, sobre este punto, el diseño curricular debería señalar ciertos principios orientadores para el profesorado.

En general, notamos que el modelo deductivo trasvasado desde la propia ciencia matemática por la actividad explicativa del profesor, impregna la mayoría de estos currícula. Creemos, sin embargo, que el profesor debe ser el guía que oriente el aprendizaje de los alumnos mediante la utilización de estrategias activas que permitan desarrollar tanto el pensamiento inductivo como el deductivo, la capacidad de formular conjeturas y de evaluarlas, de manera que el estudiante, no sólo aprenda conceptos y procedimientos, sino que desarrolle sus estrategias cognitivas y genere actitudes positivas hacia la matemática.

f. Procesos de evaluación.

Son muy pocos los currícula que señalan algunos principios o criterios orientadores del proceso evaluador. En la mayoría no encontramos ninguna referencia a este elemento curricular, cuya importancia como diagnóstico de todo el proceso educativo es muy significativa. Sugerimos una mayor atención a este aspecto dentro de los currícula futuros o en el desarrollo de los actuales.

Sabemos que muchos países están inmersos en un proyecto de reforma educativa cuyo grado de diseño y de implementación varía de unos a otros. En este estudio no hemos tenido en cuenta tales proyectos en los casos en que todavía no eran una realidad en todos los centros educativos. Esperamos que el análisis realizado en este estudio constituya un elemento de discusión para quienes tengan responsabilidades en las políticas educativas y de todos aquellos profesionales interesados en los procesos educativos: profesores de distintos niveles, investigadores, directores de centros escolares, etc. Nuestra intención última es la de contribuir a la mejora de la calidad de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas de todos los jóvenes iberoamericanos.

5º. ELABORACION DE SUGERENCIAS A LOS MINISTERIOS DE EDUCACION IBEROAMERICANOS

Dado que uno de los aspectos contemplados en el objetivo general del Proyecto IBERCIMA era el de proponer sugerencias a los diferentes Ministerios de Educación de todos los países iberoamericanos, con el fin de lograr algún tipo de armonización en los currícula, a través de la innovación; la OEI convocó a diferentes expertos en Educación Matemática, con objeto de que

tal grupo de expertos elaborara una serie de recomendaciones para presentar a los Ministros de Educación de todos los países implicados, a partir del estudio realizado por el equipo de investigación y a tenor de las nuevas tendencias surgidas en el mundo sobre Educación Matemática.

· Tales recomendaciones son las siguientes:

1ª.- Considerando la ausencia casi generalizada de los elementos que configuran un curriculum en los planes y programas de los países iberoamericanos y considerando que la documentación que expresa un curriculum debe presentar una coherencia interna y ser un instrumento útil para su conocimiento e implantación, se recomienda:

Elaborar y presentar currícula completos (no sólo programas), que incluyan: Fundamentación, Objetivos, Contenidos, Orientaciones Didácticas y Procedimientos de Evaluación, con un planteamiento globalmente coherente. Para ello se deberían tener en cuenta las necesidades y expectativas socio-culturales, así como los desarrollos recientes en Educación Matemática.

2ª.- Considerando que los primeros grados de la Educación Media tienden, en la mayoría de los países iberoamericanos, a formar parte de la educación ofrecida a todos los estudiantes, y que esta situación representa una contribución a la necesaria equidad de los sistemas educativos, se recomienda:

Proponer un curriculum de Matemáticas común para los primeros grados de la Educación Media.

3ª.- Considerando que en los grados superiores de la Educación Media en los países analizados tiene modalidades diferenciadas y que, actualmente, los currícula matemáticos para subpoblaciones especiales suelen ser una simple atenuación de los elaborados para la rama científica, se recomienda:

Elaborar un curriculum diferenciado en los últimos grados del Nivel Medio para estudiantes que no necesariamente van a ingresar en la Universidad, fundamentado en las características y necesidades específicas de aquellos a quienes va dirigido.

4ª.- Considerando que, del análisis de los currícula iberoamericanos, se infiere una concepción excesivamente cerrada y fija de la Matemática y teniendo en cuenta que la imagen de esta disciplina se transmite en la actuación del docente, en los libros de texto y en las manifestaciones del curriculum, influyendo en la forma en que los estudiantes aprenden y sienten acerca de las Matemáticas, se recomienda:

Poner de relieve, a través del curriculum, el carácter abierto y en construcción de la Matemática, como quehacer humano y no como cuerpo de conocimientos fijo y cerrado.

5ª.- Considerando que, en los currícula analizados, la enseñanza de la Matemática se basa, fundamentalmente, en un entrenamiento para aplicar definiciones y procedimientos algorítmicos, y otorga, en algunos casos, un

énfasis excesivo al carácter deductivo de la Matemática, y dada la conciencia creciente acerca del papel del alumno como constructor de su propio conocimiento, se recomienda:

Asegurar, a través del curriculum, que el trabajo intuitivo y la deducción se complementen adecuadamente, y que la resolución de problemas no rutinarios tenga un papel importante.

6ª.- Considerando que la mayoría de los currícula analizados están inspirados en las corrientes de los años 70 y que en la actualidad, existen nuevas tendencias en la Educación Matemática, se recomienda:

Iniciar o intensificar a corto plazo un proceso de revisión de los currícula, especialmente en lo relativo a los contenidos, dándoles una fundamentación que tenga en cuenta, entre otras, las recomendaciones precedentes y haciendo explícitos los criterios de selección de los contenidos de manera que no se transmita la idea de una simple acumulación de temas.

7ª.- Considerando la ausencia de los aspectos relativos a la evaluación en la mayoría de los currícula analizados y la importancia que ésta tiene en el proceso de enseñanza-aprendizaje, así como sus implicaciones sociales, se recomienda:

Incluir, en los currícula, procedimientos variados de evaluación coherentemente integrados en el proceso educativo.

8ª.- Considerando que el diseño y la puesta en práctica de un curriculum no debe hacerse aisladamente, sino teniendo en cuenta los diversos factores que lo motivan y lo hacen posible, se recomienda:

Desarrollar e implementar un nuevo curriculum enmarcado dentro de una estrategia global que incluya la formación y capacitación de los profesores, la elaboración de textos, la producción de materiales didácticos de apoyo, la creación de condiciones favorables de trabajo para el profesorado y mecanismos de evaluación periódica; todo ello sustentado por la concertación de los distintos agentes sociales involucrados.

9ª.- Considerando la complejidad de los procesos de cambio en los currícula y la existencia de Organismos dedicados a la cooperación internacional y otros dedicados al desarrollo de la Educación Matemática, se recomienda:

Instar a los gobiernos para que, en colaboración con organismos internacionales, propicien reuniones de trabajo en Iberoamérica para analizar los currícula existentes, examinar las tendencias actuales, intercambiar experiencias y sugerir líneas de acción realistas que inicien o intensifiquen cambios progresivos en los currícula; todo ello enmarcado en un plan sostenido de cooperación internacional.

MESA REDONDA

LA INVESTIGACION EN EDUCACION Y SU INCIDENCIA EN EL AULA

Moderador: D. Luis Balbuena, Secretario de la F.E.S.P.M.

Participantes: Dña. Carmen Azcárate Giménez, Directora el Dpto. de Dca. de las Matemáticas de la Universidad de Barcelona y fundadora del Grupo Zero; D. Juan A. García Cruz, asesor de Matemáticas en el CEP de La Laguna D. Luis Rico Romero, Catedrático de Universidad de Dca. de las Matemáticas de la Universidad de Granada; D. Manuel Alcalá, Profesor de EGB de Málaga y miembro del colectivo Movimiento Cooperativo de Escuela Popular

Con el fin de saber de qué estamos hablando podemos entender por Educación Matemática (EM) aquella disciplina que se ocupa, tanto de la labor que realiza el profesor dentro del aula, como de todos aquellos factores que intervienen y hacen posible que la matemática se enseñe y se aprenda, por ejemplo, el diseño y desarrollo de los currículos, los libros de texto, las metodologías, los marcos teóricos para la investigación educativa, etc.

No obstante, si nos fijamos en las dos palabras que forman el término de Educación y Matemáticas, quizás podría entenderse también como la relación existente entre el saber matemático y los fundamentos de la educación que permiten su transmisión (filosofía, pedagogía, psicología, sociología...).

La primera es una concepción realista, más práctica y más de los que estamos en el día a día de la actividad educativa. La segunda es más teórica, más de los que elaboran teorías que luego nosotros tenemos que ver si son o no útiles para el objetivo fundamental de enseñar y de aprender.

En cualquiera de los casos, es algo que el hombre ha creado y recreado a lo largo de los siglos.

Nosotros sin embargo, nos vamos a fijar más en la primera concepción que es la que más directamente afecta a nuestra profesión de enseñantes.

Se trata de una investigación de uso inmediato. No son teorías más o menos abstractas que se plasman en una tesis que, en el mejor de los casos, tal vez en alguna ocasión se utilizarán para algún fin. No. Aquí hablamos de una investigación que será aplicada, casi de inmediato, nada menos que con nuestros alumnos, sujetos concretos que esperan que nosotros, los profesores, lo hagamos cada vez mejor.

Permanentemente flotan en el ambiente preguntas relacionadas con el qué enseñar, cómo, por qué, para quién, para qué, por quién, etc...

Creo que son preguntas cuyas respuestas no suelen causar ni angustia ni ansiedad en la mayoría de los enseñantes.

Cuando Freudenthal inauguró un congreso sobre investigación en educación matemática a principios de los años sesenta ya expuso, a mi juicio, un principio clarificador. Dijo que lo importante hoy no es discutir la necesidad de por qué enseñar matemáticas sino cómo enseñarlas.

Es evidente que esta no es una tarea fácil ni creo que haya tenido respuestas cerradas ni en el tiempo ni en el espacio. Como en tantas otras facetas existe un considerable número de "ismos" que penetran en el entramado en el que actúan profesores y alumnos sin que en la mayor parte de los casos sean conscientes de cuál o cuáles son los ísmos que le guían. Así intuicionismo, formalismo, logicismo, constructivismo, empiricismo, estructuralismo, realismo, mecanismo, etc... Todos tienen sus defensores y sus detractores.

Todos los que construyen la teoría pretenden aportar soluciones que casi siempre consideran definitivas a los problemas que plantea la educación matemática, sin embargo, lo cierto es que en todos los casos se aportan soluciones parciales que actúan con mayor o menor intensidad y en función de ello dejan una huella más o menos profunda.

Sin embargo, al usuario, al que necesita las respuestas a sus problemas diarios es al que corresponde escoger lo que mejor de respuestas a sus problemas y seguramente no se parará a pensar si es de uno u otro "ísmo".

En nuestro país la investigación en educación matemática es algo nuevo lo cual no quiere decir que el concepto también lo sea; es bien conocida la problemática que ha tenido que superar la investigación en este campo frente a los llamados investigadores matemáticos que la miran con recelo en la mayoría de los casos.

En algún país como Canadá y otros de nuestro entorno cultural, la batalla entre unos y otros se inició hace unos treinta años; hoy es algo totalmente normalizado. Existe un respeto mutuo entre ambos campos de investigación y espero que a la vista de esa y otras experiencias, tardemos mucho menos en romper esas barreras que existen en la Universidad y consigamos pronto que la educación matemática sea algo importante dentro del curriculum, sobre todo de aquellos que, más tarde van a enseñar matemáticas. Es un hecho constatable que se están dando pasos importantes en este sentido y en estas jornadas se ha destacado varias veces.

Pues bien, para hablarnos de este tema, y de sus experiencias concretas, están en esta mesa cuatro personas que han trabajado en ese campo en épocas en las que incluso había una cierta hostilidad institucional; hoy las cosas están cambiando, en parte, gracias al tesón de personas como ellos y otras muchas que están hoy aquí y que posiblemente podrían también aportar su experiencia.

En primer lugar les presento, a **Carmen Azcárate** que es Profesora Titular de Didáctica de las Matemáticas de la Autónoma de Barcelona, ella es fundadora del Grupo Zero de Barcelona, allá por el año 75 en una época en

la que, como les digo, esto de la investigación en educación matemática sonaba extraño. Incluso había inspectores celosos que llegaban a perseguirlo. El Grupo Cero en el que ella trabajó fue un grupo que recorrió prácticamente todo el país; no había encuentro de profesores de matemáticas a los que no se les invitara porque era la punta de lanza que más sonaba en este campo.

Manuel Alcalá, es profesor en activo de E.G.B. del Colegio Virgen del Rosario en Málaga, lleva 15 años ejerciendo y desde entonces pertenece al Movimiento Cooperativo de Escuela Popular cuyo ámbito es estatal.

Luis Rico, es Catedrático de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, lleva 25 años en la docencia, primero en Institutos, (fue profesor agregado de Instituto en Almería) y luego profesor de la Escuela de Magisterio; hoy es coordinador del Programa de Doctorado de la Universidad de Granada.

Tampoco necesita muchos **Juan Antonio García Cruz** es profesor de Instituto en activo desde el año 75 en La Laguna, él fue asesor de la primera etapa de la reforma educativa que se inició allá por el curso 83-84 y desde entonces trabaja prácticamente de forma ininterrumpida en temas relacionados con la reforma de la que es un gran conocedor; en estos momentos es un profesor coordinador del CEP de La Laguna.

Cada uno de ellos va a intervenir exponiendo durante algunos minutos, sus experiencias concretas o sus ideas sobre este tema y una vez que ellos terminen pasaremos a un turno de palabra. Doy la palabra a Carmen Azcárate.

Carmen Azcárate: Cuando se me propuso participar en esta mesa, me pareció que el tema era un tema de reto: "incidencia de la investigación en el aula", y me gustó, y entre otras cosas precisamente porque me lo pedía Luis en el marco de las JAEM.

Las primeras JAEM, fueron en el 81 en Barcelona y me parece que fue en una reunión un fin de semana de 8 de Diciembre en Sevilla a la que asistimos Luis y yo, incipientes asociaciones y grupos que en ese momento estábamos trabajando.

Daré mi visión como miembro del Grupo Zero, que, efectivamente, se creó en el 75, y por lo tanto en el año 80 llevábamos cinco años trabajando; somos posteriores al Grupo Cero de Valencia que llevaba por lo menos un año más que nosotros, algo después se creó el Grupo Azarquiel en Madrid, y no voy a seguir porque faltaría gente. La cuestión es que yo creo que sería interesante ver qué eran esos grupos autodenominados grupos de investigación, muchos de los cuales estaban en el ámbito del ICES, concretamente el Grupo Zero de Barcelona, era un grupo llamado de investigación del ICE de la Autónoma de Barcelona.

¿Qué es lo que nos caracterizaba?, yo diría que en primer lugar era la conciencia de que las cosas no funcionaban; es decir que no conseguíamos el objetivo de enseñar matemáticas, de que los alumnos aprendieran

matemáticas, una cierta conciencia de fracaso. Otra característica es que era uno de los grupos en los que no había responsables; eran grupos enormemente voluntaristas. Lo que nos preocupaba era la clase de mañana, qué podemos hacer, qué materiales podemos preparar, cómo replantearnos las cosas, en un momento, al principio, en el que la matemática moderna todavía era protagonista.

No teníamos ningún contacto con lo que ahora llamamos expertos, es decir, pedagógos, psicólogos, o con una cosa que no sabíamos que podía existir que eran didácticas, con el exterior, es decir, estábamos muy metidos en nuestro mundo de preocupación. Fuimos viendo fue la necesidad de comunicarnos entre nosotros, no, de hablar sólo dentro de los grupos, sino con otros grupos y de ahí la iniciativa de las Jornadas, éstas y de otros encuentros que ha habido durante estos años. Creo que había deseo de un cambio de rumbo que en el tiempo coincide con las pre-reformas, o sea con todo lo que ha llevado a la reforma; no creo que haya una relación de causa y efecto, pero seguramente tiene causas comunes. En esta segunda etapa, creo que sí ha habido un cierto reconocimiento de que, existía un cuerpo de conocimiento que se llamaba, bueno que ahora se llama Educación Matemática; otras veces se habla de Didáctica de las Matemáticas y creo que, internacionalmente, también son las dos maneras de denominarlo. Fuimos sabiendo que esto era una cosa importante, es decir, en Francia existían los IREMS que eran unos institutos que sólo se dedicaban a pensar y a tratar de los problemas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas. En Holanda, en Inglaterra, en EEUU, en Canadá, existían entes parecidos y el hecho de que esto existiera y de que había mucho escrito, yo creo que nos fue despertando una serie de preocupaciones y abriendo horizontes.

En este marco aparece por una parte la LRU con la creación de los Departamentos de Didáctica de las Matemáticas en las Universidades, con lo cual se despierta una inquietud y por otro, todo el fenómeno de formadores de formadores de asesores, etc. yo fui formadora de formadores, porque había esta necesidad de formación y entonces ¿por qué formadora de formadores de formadores? pues por antigua, porque yo hacía más tiempo que estaba metida en el rollo, procedía de la secundaria y después fui a parar a un Departamento de Didáctica.

Los problemas nuevos que se van planteando tienen un cariz diferente, es decir, antes era qué materiales, e incluso nos planteábamos qué programas; pero empezó a surgir la pregunta de "cómo aprenden los alumnos", cuáles son los factores que intervienen en el aula, es decir, el pensamiento del profesor, la influencia del profesor, el problema del alumno, el problema de la materia, el problema del contorno, es decir, los problemas que están, que condicionan todo lo que es la Didáctica de las Matemáticas.

Hay Departamentos de Didáctica de las Matemáticas y por lo tanto sus miembros son los investigadores en Didáctica de las matemáticas. Algún

producto se debe estar cociendo allí, y ahí está el tema: incidencia de esa investigación en el aula. Hace tiempo que Gimeno Sacristán, pedagogo, planteaba el problema de esta falta de incidencia en el aula, separación que hay entre la teoría y la práctica. Unos piensan acerca de lo que es la enseñanza, otros deciden lo que hay que enseñar y otros hacen el trabajo práctico. Yo creo efectivamente que esta separación existe.

Me gustaría hablar de mi Departamento; creo que el problema de la separación de teoría y práctica es un reto, pero el hecho de que la gente que investiga, investigue sobre problemas reales, puede ser una forma de superar la separación. Yo misma he trabajado sobre problemas que tienen los alumnos en su aprendizaje de las realidades. Dos veces a la semana voy a un instituto donde discutimos y preparamos material para las aulas, donde tengo ocasión de ver lo que hacen los alumnos donde una vez a la semana también tengo un encuentro con profesores de instituto. Es decir, creo que sí puede haber incidencia si le echamos unas horas y nos dedicamos realmente al contacto con los profesores.

Juan Antonio: Bueno, como Luis me ha presentado soy un profesor de Instituto, que en un determinado momento (1978) tuve la suerte de estar en Tenerife donde se crea la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.

Al poco tiempo de haberse creado y haber tenido las primeras reuniones entre nosotros, las primeras jornadas, miembros de la Sociedad asisten al IV ICME (California, 1980) y empieza a aparecer una gran cantidad de información internacional en la biblioteca que empezamos a crear en la sociedad. Me lleve una gran sorpresa al descubrir la existencia de un mundo, totalmente desconocido para mí, que ni en la Universidad ni en ningún otro sitio me habían hablado de él: el mundo de la Didáctica de la matemática (educación matemática). Esa gran cantidad de información o de reflexiones que hacían personas que habían dedicado mucho tiempo a la práctica docente. Muchos de aquellos documentos, revistas, etc. ni siquiera se podía llamar investigación, pero me sirvió para empezar a penetrar en un mundo que, como dije, desconocía por completo y que de alguna forma comenzó a explicarme y a hacerme pensar sobre determinadas cosas que yo hacía en el aula, el por qué las hacía e incluso ver que se podían hacer las cosas de forma distinta.

Con respecto a lo que sería la producción en didáctica de la matemática o de la investigación en didáctica que tenga que ver con la labor diaria que realiza un profesor en el aula, yo distinguiría entre la tesis o informes resúmenes de tesis, que después de llevar muchos años leyendo algunos de ellos me cuesta entenderlos debido a su super especialización y a lo estrecho del campo de la investigación al que se ciñen, de los documentos surgidos de grupos de investigación que contienen reflexiones sobre la enseñanza de la matemática, que muestran y documentan mediante actividades un determinado enfoque de la enseñanza. Estos últimos permiten una puesta en

práctica, en las aulas, de ideas innovadoras, y nos permiten comprobar y experimentar si lo que se propone ocurre realmente en nuestras aulas, y si nos produce el mismo efecto que les produjo a las personas que lo elaboraron y experimentaron. Este tipo de trabajo, en fin, es el que sirve de ayuda al profesorado en su práctica diaria y creo que es mucho más interesante y se puede sacar más partido que el puro y duro informe de la investigación. En definitiva, hablo de mi experiencia como profesor que ha utilizado ese tipo de material y tengo que añadir que muchas de las ideas que se me han ocurrido tienen que ver con reflexiones leídas, con otras hechas por mi mismo y con conversaciones tenidas con los compañeros sobre los trabajos como los mencionados.

Manolo Alcalá: El objetivo de hablar ante tanta gente, es simplemente tratar de animaros o animar a unos poquitos a que trabajen en la escuela, en el grado en que estéis desde el punto de vista de la investigación.

Lo que voy a decir es nada menos que una propuesta de trabajo, que se aficionen o estén aficionados ya, como es mi caso, una manera de hacer las cosas en el aula desde el punto de vista de la investigación, es decir, de investigar tú y los chavalillos que tienes allí. Pero, antes de entrar en ese tema, quisiera referirme al concepto de investigación en educación, y desde mi punto de vista, distinción entre la investigación externa hecha por gente ajena a la enseñanza, es decir, es una investigación no docente. Y es por eso por lo que yo la llamo externa. En ese ámbito es en el que se plantea la pugna entre los modelos de los grandes paradigmas de investigación cuantitativos, positivistas, etc... De eso no es de lo que yo quiero hablar, simplemente lo digo para precisar o ubicar mi intervención.

Me centraré en el otro tipo de investigación: en la investigación interna, es decir, aquella que se hace en la escuela y tiene como finalidad mejorar tu práctica. Quisiera destacar también la separación, el iato existente entre la investigación a la escuela, si es que algo llega; claro que habrá gente que diga que esa investigación tiene que incidir en el aula, pero habría que ver, cómo, por qué vías y de qué manera incide esa investigación en el mejoramiento de la enseñanza, en este caso de las matemáticas. La que sí incide directamente en el mejoramiento de la enseñanza, es la investigación interna, que incide en dos cosas: una, en su preparación profesional, y dos, en mejorar su trabajo. Por lo tanto incide en el mejoramiento del aprendizaje de los chiquillos.

Habría que distinguir también entre la investigación en la escuela, de la escuela como investigación, es decir que no es lo mismo investigar en la enseñanza de las matemáticas que, enseñar matemáticas desde la óptica metodológica de la investigación, y ahí es donde vamos a situarnos. Es que a veces las palabras nos confunden, según los planos donde uno se mueva en este mundillo de la enseñanza.

Yo quisiera ahora delimitar la investigación interna. La entiendo como una forma de trabajo que parte de unas premisas que te inducen a organizar la clase de una manera muy especial. Voy a dar dos o tres connotaciones.

La primera premisa es que si pretendes que los chavales participen en la elaboración de su conocimiento, de su propio conocimiento, tienes que establecer unas relaciones y una dinámica en el aula que dé posibilidad para ello.

Segundo: si pretendes investigar, tienes que tener claro también ciertas connotaciones de la investigación en matemáticas. En la escuela, en el nivel que yo me muevo, cuando hablamos de investigación casi todo el mundo se refiere al área de naturales o sociales o conocimiento del medio, parece que investigar es salir a la calle o ir a ver un parque o recoger piedras, en diseccionar una rana. Las matemáticas o el lenguaje están ajenos a estas actividades. Pero en matemáticas también se puede investigar.

Ahora bien, la investigación que se hace en matemáticas se distingue del que se pueda hacer en ciencias naturales en dos aspectos, a mi modo fundamentales; el primero es que cuando los chavales están investigando en naturales, investigan sobre algo observable, investigan sobre lo pasado o lo presente, pero concreto: sin embargo, cuando están investigando sobre matemáticas no se investiga sobre algo observable, sino que se investiga sobre algo que no se ve, sobre erres, sobre números, relaciones, propiedades.

Desde el punto de vista de la escuela, otra diferenciación importante es que el trabajo investigativo en naturales y sociales es diverso y suceptible de globalización, sin embargo, el trabajo investigativo de matemáticas es muy preciso, se trabaja sobre un algoritmo, la estructura de un número, unas cuantas propiedades, la construcción de un concepto, y eso es una cosa muy precisa y aislable. Digo esto para precisar una forma de encarar el trabajo, una vez que tu ves o tienes una cierta concepción del aprendizaje en matemáticas. Tratas de encarar un sistema de trabajo, ese sistema que es el que yo quiero proponeros tiene cuatro pasos, muy simples, muy sencillos que voy a tratar de describir en dos o tres minutos. El primer paso es la elección del objetivo de investigación, por parte de los niños y lo que los niños quieran investigar será lo que tú encares desde el punto de vista de la investigación. Luego, te preparas un itinerario, unos materiales, una forma de llevarlo a efecto. Si es la primera vez que vas a trabajar de esa manera, quizás seas incapaz de establecer una hipótesis de partida. Lo más importante de la planificación de la investigación es la elaboración de un hilo conceptual en el que tú vas a tratar de llevar a los niños, se recopilan materiales y se establece un guión, un guión para ti y otro para los niños.

Los pasos que prevés que vas a dar normalmente no te salen pero, al término de la sesión, en tu casa o donde fuere, registras por escrito lo que has hecho. De modo que el último paso de esa forma de trabajo, dicho así groso modo, sería el de aquellas que realmente has hecho. Si estableces

hipótesis o conclusiones acerca del aprendizaje tienes la oportunidad de comprobarlas, puesto que se crea un clima de diálogo que permite que tú vayas conociendo dos cosas importantes: un clima de motivación de los chavales en el aula y otra, si van aprendiendo o no, sin necesidad de recurrir a pruebas específicas estándares.

Bueno, eso es una forma de trabajo que a la larga redundará en tu mejoramiento personal al ir acumulando una serie de recursos, elaborando materiales, conociendo este, conociendo aquel, etc., que te permiten tener ciertas habilidades y mucha seguridad a la hora de abordar determinados temas en el aula. Y bien vale por ahora.

Luis Rico: Creo que si algo podemos aportar los que estamos aquí, es fundamentalmente la experiencia que hemos adquirido a lo largo de los años. Luis ha dicho que este año mi promoción cumple 25 aniversario desde que acabamos la licenciatura por lo tanto mi experiencia..., la información que yo puedo dar es extensa en el tiempo y, espero que pueda resultar.

Cuando yo empecé en la Universidad de Granada hace 24 años, estaba en la Escuela Normal, no era ni siquiera Escuela de Formación del Profesorado, y hoy día, me encuentro en un Departamento que tiene un programa de Doctorado de Didáctica de las matemáticas inserto en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada; por tanto, el panorama es totalmente distinto, al menos desde el punto de vista académico e institucional; creo que las oportunidades de hoy día, permiten trabajar dentro del área de Didáctica de las Matemáticas o al menos ofrecen desde la Universidad una oportunidad para trabajar en este área, que antes apenas se vislumbraba.

Mi trayectoria como investigador, comienza en el año 71, cuando comenzamos un estudio de carácter longitudinal y positivista; una experiencia que se llamó "Granada Más", y que intentaba estudiar un programa, un programación mediante objetivos operativos de los cuestionarios del año 70, con un análisis de dificultades; hoy día, 24, 23 años después estamos comprometidos en un campo de trabajo con carácter interpretativo, con análisis de errores y simulación y control de las dificultades de los alumnos.

Creo que las coordenadas académico-institucionales han variado mucho en este país, y han variado para la Didáctica de las matemáticas y pienso, presiento, que están variando dentro de la comunidad de profesores de matemáticas en la que aquí nos encontramos.

Bien, en cuanto a coordenadas disciplinares, yo concibo la educación matemática como un campo de problemas con pluralidad de aportes; no me parece aceptable hoy día el grado de elaboración de las defensas de carácter teórico, que hablan de la teoría de que explica todos los problemas de la Didáctica de las matemáticas, entiendo que la sociología, la epistemología, la lingüística, la psicología, las propias matemáticas, la teoría curricular y

seguramente me olvido de alguna importante, son todas ellas disciplinas que contribuyen a analizar y a trabajar en profundidad el campo de la educación matemática.

Cuando analizo cuáles son mis intereses, tengo que explicar que en matemáticas me interesa fundamentalmente el análisis, me interesan los números, me interesan los sistemas numéricos. Prioritariamente yo he trabajado en esos campos, he trabajado en número enteros, números naturales, números reales, números racionales, pero eso es una dimensión. Si me preocupa el aporte psicológico, me interesan los errores y me interesan las representaciones, y me interesan temas como la visualización de los conceptos numéricos y no puedo desligar mi interés por el número natural de mi interés por las representaciones numéricas o mi interés por los errores en los conceptos y en los procedimientos relativos a números.

Si hago referencia a la teoría curricular me preocupa especialmente el tema de la evaluación, si me parece que la evaluación es el "caballo de batalla" de la reforma educativa. Seguimos identificando la evaluación con exámenes, evaluación con prueba, aprendizaje de las matemáticas con promoción de los alumnos, y que todo eso tiene que ver con la clarificación de los problemas que subyacen a la noción de valoración y de promoción.

Si me refiero a la psicología, me preocupa la dimensión cultural del currículum y me preocupa la comunidad de educadores matemáticos y son temas que tienen que ver con la investigación. Creo, básicamente, que esas son mis coordenadas disciplinares y que aún cuando haya trabajado con distintos paradigmas o con distintas metodologías, sí puedo reconocer una línea continua desde mis primeros trabajos en investigación a los últimos. Creo que es importante y ya se ha dicho, pero yo voy a insistir la dimensión que nos interesa, en la conexión teoría-práctica. Es lamentable que no haya más debate. Creo que en eso estamos todos de acuerdo.

Todo lo que un investigador en Didáctica de las matemáticas, en educación matemática, haga que no se aplique, que no pueda ser comprobado, que no pueda tener una repercusión en el aula, que no pueda ser contrastado con lo que realmente hacen los alumnos, creo que puede tener interés como investigación básica pero, que no tendría de inmediato mucha aplicación. Tenemos una tradición de compartir poco los conocimientos, de contar en pocas ocasiones nuestras ideas a los demás. Después de contar nuestras ideas a los demás, eso debe ser sometido a la crítica y al debate que más trabajo cuesta al comunicar. El compartir y el aceptar la crítica en aquello que sea aceptable y rechazarla en aquello que sea de rechazable, me parece que son características importantes de la investigación.

La investigación en este campo, opino que debe ser individual, debe ser producto de trabajo en equipo, aunque a veces luego el formato académico

que haya que darle es que el responsable es una sola persona. Esa indagación también debe de estar conectada con la comunidad internacional y eso tiene ciertas y ciertos impuestos, que a veces son molestos, como expresarse en otro idioma, escribir en otro idioma, asistir a congresos fuera de nuestro país, pero tiene la evidente ventaja de unas relaciones de comunicación que son importantes. Hoy día no se puede concebir la investigación ni en Didáctica de la matemática, ni en química analítica ni en ningún campo del conocimiento si no están conectados con la comunidad internacional. Eso además nos permite apreciar que el desnivel actual entre la producción de investigación en este campo en nuestra comunidad y la producción de investigación en este campo fuera de nuestro país, no es tan grande, no es tan acusada, como podría ser hace 10 ó 12 años.

A efecto del debate, me parece importante ajustar algunas dificultades actuales, por lo menos con las que yo me encuentro, algunas dificultades actuales que tiene la investigación en este campo. Por un lado los trabajos de investigación son asquerosamente concretos, es decir, tienen que llegar a un grado de concreción.

La carencia de escuelas propias es otro problema, se puede caer fácilmente en la tentación de, yo me apunto a la escuela griega, pues yo me apunto a la escuela nigeriana y crear y reproducir aquí problemas entre la griega y la nigeriana, que parece que estaría fuera de lugar y estaría fuera de lugar porque nos haría perder muchísimas energías en resolver cuestiones por repetir debates que en cierto modo no son de esta sociedad. Yo creo que los debates o los temas que se deban resolver en educación matemática o en cualquier otro tema, deben de ser las cuestiones propias del sistema educativo español, abiertos a la reflexión de un campo de trabajo y a las aportaciones que nos hagan otros, pero sin mimetizar o repetir planteamientos externos.

También para mí, es un problema grave, la inexistencia actual de una fuente de publicaciones específicamente dedicada a la educación, la investigación en educación matemática y a didáctica de las matemáticas, hay aportaciones muy buenas de las revistas actuales que intentan formentar las publicaciones en este campo, pero todavía no existen revistas ni instrumentos propios de comunicación.

DEBATE

Carmen Azcárate: Repasando la historia de la que hablaba antes, cuando estaba preocupada porque las clases no funcionaban, mientras estaba preocupada, yo sola, eso más bien me producía un bloqueo; cuando te reunes con otra gente compartes en cierto modo el bloqueo, cuando decides hacer un material, es decir, cuando tienes unos elementos para llevar al aula, entonces las cosas empiezan a cambiar porque tienes algo que puedes llevar

al aula y a mí una de las cosas que a veces me preocupa en encuentros como este, es ir a una comunicación en la que te explican una cosa preciosa, que todo el mundo sale diciendo que maravilla pero yo ¿Cómo podría hacer yo esto?, es decir, que a veces, se produce esa especie de esquizofrenia que padecemos los profesores, los profesores de Matemáticas en particular, entre lo que creemos que habría que hacer y lo que hacemos realmente en nuestra aula.

La investigación no es la solución de los problemas, no es toda la solución a los problemas, pero yo creo que sí es una aportación que sí es útil, porque puede haber el peligro de ser siempre inventores de la sopa de ajo, es decir, hay cosas que ya se han estudiado y que si se saben pues se utilizan.

Por lo que hace referencia a las ideas de los alumnos, yo creo que no hay que confundir lo que es la experiencia del profesor con la experiencia colectiva del área de Didáctica de las matemáticas son dos cosas.

Aprovecho para referirme a una cosa que ha dicho Luis, se ha referido a las revistas, y esto tiene una doble lectura, es decir, también me preocupa, o sea me preocupan revistas de investigadores, me preocupan las revistas y creo que las necesidades más bien de que se lean, que se escriban revistas, tipo Suma, revistas en las cuales se expliquen experiencias de aula y se expliquen también experiencias de investigación, experiencias de investigación con sus consecuencias en el aula.

Manuel Alcalá: El problema es la transmisión de ese supuesto conocimiento, como llega. Si miramos los libros de texto de los últimos treinta años, que es el material más usado por el profesor, ahí se nota el cambio. No sé si a bien, pero, en algunos sitios más que en otros, en algunos temas más que en otros.

El problema creo que es de canales de información, de la búsqueda y el acceso directo a la información. Sobre todo hay otra cosa que yo quisiera apuntar, en las aulas de E.G.B. y de Bachillerato y en los libros de texto se ha cambiado bastante en los últimos treinta años, pero yo tengo la seguridad de que donde yo me formé, prácticamente se sigue explicando las matemáticas como me las dieron a mí.

Asistente: Carmen ha dicho y ha repetido que ella, su investigación la comienza tomando contacto con compañeros del centro, y vuelve a ello y se reúne una y otra vez. Después se ha dicho que una vía de acceso podrían ser las revistas, pero debemos tener en cuenta que las revistas llegan como mucho a tres mil personas y ese no es el profesorado del país.

Curiosamente donde menos pueden investigar los profesores es en el aula porque nunca es hora. Habría que exigirle a la administración que canalice esa investigación.

Yo creo también, que debería exigirse a los investigadores que se las apañen para que sus trabajos nos lleguen y sobre todo que nos marquen unas líneas de investigación en el aula.

Luis Rico: La investigación debe surgir en el aula y en ese sentido coincido con el planteamiento de Carmen. La investigación tiene que salir de equipos interdisciplinarios, tenemos tendencia a confundir el aspecto académico y formal que da lugar a un grado, que da lugar a una titulación doctoral con la investigación. Creo que eso es muy interesante, eso forma parte del modo de trabajo interno. Es un trabajo, un esfuerzo y tiene su propia lógica académica y una finalidad: conseguir el grado de Doctor, si no se tiene en cuenta ese tipo de investigaciones reales, de base, puede dar formatos perfectos académicamente pero totalmente inútiles. Creo que es importante que haya un grupo de profesionales en la universidad que se dediquen a esto, pero a esos profesionales se les debe de exigir o se nos debe de exigir que trabajemos en contacto con la realidad del aula y que en cierto modo, ese trabajo tenga que ver y de respuestas a problemas reales de....

Appel hace crítica muy fuerte a los Standares Curriculares porque no atacan el problema de la promoción, es decir porque continúan siendo un elemento de selección, no llegando a soluciones efectivas, no tratando de enfrentarlas y eso es un problema real. Rombers, en la misma revista, le contesta luego a Appel vuelve a hacer una contrarréplica diciendo que las matemáticas son una parte del sistema escolar y que están condicionadas por el sistema solar.

Asistente: Yo creo que hay que cambiar un poco la mentalidad del profesor; un profesor tiene que estar decidido a utilizar una investigación y a modificar su propia forma de trabajar.

A mí me parece que los primeros que tenían que aprovecharse de la investigación en educación serían las Escuelas de Formación del Profesorado, porque es ahí donde empieza la separación.

Moderador: Con ésta última intervención damos por finalizada la Mesa Redonda, agradeciendo la participación y asistencia a todos los presentes.

SEGUNDA PARTE

PONENCIAS DESARROLLADAS EN LAS MESAS DE TRABAJO

MESA Nº 1

MATEMATICAS EN PRIMARIA

Coordinador/Ponente: D. Manuel García Deniz

Secretario: D. Manuel Barrantes López

MESA 1. MATEMATICAS EN PRIMARIA

MATEMATICA BASICA PARA PENSAR MEJOR

Manuel García Deniz, Y Ricardo Lorenzo, miembros de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

El objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas en la Educación Primaria es formar y desarrollar el pensamiento lógico del niño.

Mason, en su libro "Pensar matemáticamente" (LABOR) indica que "El pensamiento matemático es un proceso dinámico que, al permitirnos aumentar la complejidad de las ideas que podemos manejar, extiende nuestra capacidad de comprensión.. La práctica con reflexión es lo que sirve para mejorar el razonamiento matemático. El razonamiento matemático se apoya en una atmósfera de interrogantes, desafíos y reflexión, con abundante tiempo y espacio. El razonamiento matemático es provocado por un desafío, o una sorpresa, o una contradicción, o el descubrimiento de un vacío de comprensión... El razonamiento matemático lleva a un conocimiento más profundo de uno mismo, a un visión más coherente de lo que sabes, a una investigación más eficaz de lo que quieres saber y a una postura más crítica ante lo que oyes y lo que ves. TODOS PODEMOS RAZONAR MATEMATICAMENTE."

El Informe Cockroft reafirma estas ideas cuando expone que "A lo largo de los años de primaria ha de prestarse atención a los diversos métodos de representación y de interpretación gráfica de los datos matemáticos y de interpretación de la información así presentada... Los niños necesitan adquirir experiencia en una gran diversidad de trabajos gráficos. Lo esencial es comentar e interpretar la información contenida... Además de dibujar gráficos que contengan información en forma de datos, algunos alumnos estarán en condiciones de elaborar otros que muestren relaciones matemáticas... Hablar de lógica en relación con niños de corta edad tal vez resulte sorprendente para muchos, pero al hacerlo no se alude a nociones de gran complejidad teórica. Se trata más bien de describir las cosas con precisión, advirtiéndoles sus semejanzas y diferencias y determinando sus relaciones mutuas. En los juegos, los movimientos deben realizarse en función de reglas, y el hecho de efectuar los movimientos idóneos implica un pensamiento lógico. En sus formas más sencillas, la actividad de clasificar objetos y registrar los resultados en un diagrama suele practicarse en las aulas de los alumnos de 5 a 7 años de edad, y constituye la base sobre la que después se erige el concepto mismo de número. A medida que los niños crecen, puede pasarse a actividades más complejas, tales como clasificar formas de diferentes colores, tamaños y espesores con arreglo a sus atributos... Cabe, pues, desarrollar

gran variedad de trabajos de esta índole para fomentar la precisión en el lenguaje y el desarrollo del pensamiento lógico. Los juegos estimulan asimismo el pensamiento lógico: "Si muevo ahí..., él moverá..., luego deberé...".

También Meirovitz y Jacobs, en su libro sobre juegos y pensamiento creativo, escriben que "La mayoría de la gente confunde las "facultades mentales" con la "inteligencia"... Inteligencia es la aptitud para adaptarse a las situaciones nuevas y para resolver problemas en un medio ambiente mudable, e incluye destrezas mentales muy distintas:

- * LOGICA DEDUCTIVA: cómo ensamblar datos aislados pero relacionados entre sí, eliminar la información imprecisa y llegar a la conclusión requerida.

- * LOGICA INDUCTIVA: cómo descubrir leyes mediante una observación cuidadosa de los elementos similares y distintos entre diversos casos.

- * ESTRATEGIA: cómo trazar planes y organizar las cosas para alcanzar un objetivo determinado.

- * PENSAMIENTO CREATIVO: cómo llegar a ideas nuevas y distintas.

Además de todo esto, lo que alguien es capaz de hacer con su mente depende de las experiencias que haya tenido.

Naturalmente, esas facultades no existen de manera aislada. Para ser creativo, hay que pensar inductivamente; se utiliza la lógica para planear una estrategia, etc. Además, intervienen otras muchas destrezas: toma de decisiones, visión de lo que va a suceder, planteamiento de prioridades, aceptación de los riesgos, predicción, paciencia y rapidez de reacción."

La pregunta a plantear es la siguiente: ¿El currículo de la Educación Primaria, tanto del Ministerio como de las Comunidades Autónomas, contemplan estos aspectos?

Hagamos una búsqueda por los textos legales.

En la Introducción al Área de Matemáticas de los Reales Decretos 1006 (Enseñanzas Mínimas) y 1344 (Currículo del M.E.C.), y casi igual en el Decreto de Currículo de Canarias, aparece la siguiente referencia:

"A través de operaciones concretas como contar, comparar, clasificar, relacionar, el sujeto va adquiriendo representaciones lógicas, y matemáticas, que más tarde valdrán por sí mismas de manera abstracta y serán susceptibles de formalización en un sistema plenamente deductivo, independiente ya de la experiencia directa."

"La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad."

También en la Introducción del Decreto de Currículo del País Vasco aparece esta referencia más explícita que la anterior:

"La enseñanza de las matemáticas tiene un doble carácter, formativo e instrumental. El primero de ellos contempla el desarrollo de las distintas capacidades intelectuales: el razonamiento lógico, la reflexión, la generalización, el análisis, la ordenación, la intuición espacial, los razonamientos por analogía, etc. El trabajo adecuado en esta línea, contribuye a la creación de estructuras mentales y hábitos de trabajo, cuya utilidad e importancia no se limita al ámbito de las matemáticas.

Este componente formativo se favorece especialmente mediante la resolución de problemas, entendiendo por problema aquella situación que, a priori carece de algoritmos o esquemas de solución; la flexibilidad para no encerrarse en una única vía de solución, o para encontrar la adecuada, acrecienta la creatividad y originalidad, ayudándonos así a explorar nuevos caminos y superar bloques."

En el Decreto de Currículo de Navarra se encuentra que "El conocimiento lógico matemático hunde sus raíces en la capacidad del ser humano para establecer relaciones entre los objetos o situaciones a partir de su actividad sobre los mismos, y muy especialmente, en su capacidad para abstraer y tomar en consideración dichas relaciones en detrimento de otras igualmente presentes."

Y en el de Andalucía se lee: "Los conocimientos matemáticos constituyen para los alumnos, un campo idóneo donde ejercitar el pensamiento, contribuyendo a su desarrollo intelectual."

"Dentro de cada núcleo, se concederá especial importancia al tratamiento, representación y organización de datos, utilizando técnicas elementales de observación, medición y recuento y haciendo uso de distintas formas de representación de los mismos."

Después de estos aspectos generales aparecen referencias más concretas de tipo metodológico, de objetivos, de contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales. Como ejemplo véanse los siguientes:

Canarias- "Establecer relaciones y comparaciones en colecciones de objetos y situaciones conocidas."

En los procedimientos del Bloque de contenidos número 1 (Números y operaciones: significado y estrategias.) aparece con el número 7 el siguiente: "Representación matemática de una situación utilizando diferentes lenguajes (verbal, gráfico y numérico), estableciendo correspondencias entre los mismos."

Cataluña- Objetivo general número 3: "Utilizar los lenguajes verbal, visual y simbólico para describir, representar y comunicar situaciones y experiencias reales o simuladas, así como para interpretarlas."

Procedimientos:

"1.2. Observación y reconocimiento de los atributos (cualitativos, cuantitativos, geométricos, etc.) que tienen los elementos y las colecciones.

2. Relaciones y comparaciones.

2.1. Búsqueda de relaciones entre las diversas partes o elementos que componen una situación o los resultados de un fenómeno.

2.2. Determinación del atributo, enumeración de los elementos e identificación de semejanzas y diferencias entre los elementos de un conjunto.

2.3. Ordenación y clasificación a partir de criterios que expresen relaciones entre elementos.

4.3. Familiarización con formas de representación que ayudan a abstraer de situaciones diversas aquello que tienen en común."

Comunidad Valenciana- Bloque 5. Resolución de problemas.

1. Resolución de problemas. Fases. Estrategias y métodos.

2. Juegos. Análisis del juego. Reglas. Estrategias ganadoras y perdedoras. Variación de reglas.

3. Algoritmos. Cotidianos. Construcción de algoritmos. análisis de algoritmos sencillos.

Es evidente que el currículo oficial no sólo permite trabajar estos aspectos, sino que es una exigencia del mismo. Al tratarse de un currículo abierto es el profesorado el que ha de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el sentido que apuntamos en esta ponencia.

La resolución de problemas no es una cuestión de conocimientos matemáticos, sino de poder de razonamiento. Veamos el siguiente ejemplo:

Jaimito sale de casa con un montón de cromos y vuelve sin ninguno. Su madre le pregunta qué ha hecho con ellos y el niño le contesta:

- "A cada amigo que me encontré le dí la mitad de los cromos que tenía más uno."

- "¿Y a cuántos amigos te has encontrado?."

- "A seis."

¿Cuántos cromos tenía Jaimito al salir de casa?

La respuesta a este problema, en un alumno de primaria o secundaria, dependerá del tipo de instrucción que haya recibido en resolución de problemas.

Si este alumno sólo ha resuelto problemas a partir de un modelo previo, o si está en los seis primeros años de la enseñanza obligatoria, difícilmente podrá resolverlo.

Si es de séptimo u octavo nivel tenderá a resolverlo utilizando ecuaciones. Pero la ecuación que resuelve este problema es de muy difícil planteamiento y, desde luego, de mucho más difícil resolución.

Sin embargo, las operaciones que precisa el problema son de muy fácil manejo: sumar 1 y multiplicar por 2. Además las cantidades que se manejan son siempre inferiores a 200.

Si acaso, alguno de nuestros alumnos más despabilados, ¡que siempre los hay, afortunadamente y a pesar de nosotros!, podrán iniciar una búsqueda a través de un tanteo totalmente carente de sistematización. Y, a veces, hasta encuentran una solución...

¿Qué le falta, pues, al alumno para abordar la resolución de este problema de una forma matemática?

Fundamentalmente, seis cosas:

a) El conocimiento de una estrategia general para abordar la resolución de cualquier problema.

b) Utilización de un pensamiento lógico no asociado estrictamente a las operaciones aritméticas.

c) El aprendizaje de unos elementos lógicos de distribución espacial que, en forma gráfica, le ayuden a disponer los datos del problema.

d) El conocimiento de algunos, muy pocos y sencillos, heurísticos específicos que le permitan vislumbrar un camino en la búsqueda de la solución.

e) La sistematicidad de su pensamiento que le haga seguir una línea de trabajo sin cansarse, hasta que consiga una solución o vea que el camino emprendido no le lleva a ningún sitio.

f) El gusto de la exploración matemática, encontrando placer hasta cuando se equivoca, y la ilusión de emprender un nuevo camino distinto al anterior si aprecia que éste no es el correcto.

g) Apertura de pensamiento para llegar a entender que un problema puede tener una, muchas o ninguna solución; sin que por ello sea más o menos valioso.

Volvamos al problema anterior y tratemos de resolverlo. Lo primero que se aprecia es que desconocemos los datos de partida de la situación que define el problema y, sin embargo, sí es conocido el dato final de dicha situación.

Esto nos lleva a pensar que, si queremos seguir una acción lineal, hemos de utilizar un procedimiento que consista en desandar el camino recorrido en la situación descrita, yendo desde el final hacia el principio.

Estos no es otra cosa que el heurístico específico que denominaremos **"empezar un problema desde atrás"**.

Para que este camino sea recorrido sin dificultades, sistemáticamente, necesitamos el uso de otro heurístico básico: **"representar los datos"** u **"organizar la información"**. Para ello podemos utilizar figuras, diagramas, tablas, gráficas, codificaciones, etc.

Nosotros vamos a utilizar una tabla de doble entrada en el que se figura la situación problemática.

Cada línea horizontal de la tabla representa el encuentro con uno de los seis amigos, en el orden en que Jaimito los encontró.

Las tres líneas verticales representan los pasos detallados que resultan de la acción de Jaimito al regalar a cada amigo **"la mitad de los cromos que tenía más uno"**.

Esos pasos son:

ANTES Cuántos cromos tenía antes del encuentro.

¿QUE DA? Cuántos cromos le regala al amigo.

DESPUES Cuántos cromos le quedan después del encuentro.

Esto nos da una situación detallada que, ahora podemos recorrer en cualquiera de los dos sentidos. Primero lo haremos en sentido inverso para la resolución. Al final lo haremos en sentido directo para la comprobación.

De entrada, lo único que conocemos es el dato que debe aparecer en la última casilla (inferior derecha).

Al final de la situación, después de haberse encontrado con los seis amigos, Jaimito vuelve a casa sin ningún cromo.

En este momento el alumno ha de utilizar el razonamiento lógico para completar la fila 6ª, que representa la acción de Jaimito ante el 6º amigo que encuentra.

Si da la mitad más uno de los cromos que tiene, entonces Jaimito se ha de quedar con la mitad menos uno.

Llegar a esta conclusión no es fácil. El alumno ha de estar entrenado en este tipo de pensamiento. Se puede apoyar y verificar experimentalmente. Pero el maestro ha de enseñarlo. No puede confiar en que el niño o la niña adquiera ese tipo de pensamiento de manera intuitiva. Se trata de un aprendizaje difícil y lento, pero ese es el reto del aprendizaje "integral". No basta con formar buenos CALCULISTAS; necesitamos buenos PENSADORES.

Al llegar aquí, ya podemos construir números y rellenar la fila 6ª. Partiendo de 0 -que es la mitad del ANTES, menos 1-, obtenemos 2 -que es el doble de 0 más 1-.

Así, llenamos la columna ANTES con un 2.

De igual manera: la mitad de 2, más 1, es decir 1 más 1, es 2.

Esta cantidad es la que ha de figurar en la casilla ¿QUE DA?, pues representa el número de cromos que Jaimito regala al sexto amigo.

La comprobación es inmediata: lo que tenía antes es igual a lo que regala más lo que le queda. $2 = 2 + 0$.

Prosiguiendo de esta manera hacia arriba, corresponde razonar el paso correspondiente a la fila 5ª. Es la acción de Jaimito ante el quinto amigo. Lo primero es darse cuenta de que la cantidad que figura en la casilla de la izquierda de la 6ª fila es la misma cantidad que ha de figurar en la casilla de la derecha de la 5ª fila.

Lo que tiene Jaimito DESPUES de dejar al 5º amigo es lo que tiene ANTES de encontrar al 6º amigo.

Siguiendo el mismo proceso anterior, se deduce que 2 es la mitad del ANTES, menos 1. Luego el ANTES es 2 más 1, multiplicado por 2. Es decir, 6. Jaimito tenía 6 cromos antes de encontrarse con el quinto amigo y le regaló la mitad de 6, más uno: 4 cromos.

De igual manera comprobamos que $6 = 4 + 2$.

La siguiente fase es trasladar el 6 a la casilla derecha de la fila 4ª.

Reiterando el procedimiento descrito se llega a la casilla izquierda de la fila 1ª.

La cantidad que aparece en dicha casilla (126) es el resultado del problema.

JAIMITO TENIA CIENTO VEINTISEIS CROMOS AL SALIR DE CASA.

El problema tiene aún una última fase. El alumno ha de comprobar que todo el proceso es correcto cuando se parte de 126 cromos y se aplica la acción de Jaimito al regalar los cromos a sus seis amigos de acuerdo con las normas del problema.

En realidad se trata de recorrer ahora la tabla completa desde el principio hasta el final.

Casi se puede considerar que sobra, en este caso, la comprobación. El problema ha sido resuelto comprobando en cada paso los resultados.

En la escuela, generalmente, se enseña QUE PENSAR pero no COMO HACER PARA PENSAR; no se entrena al alumno para pensar.

EN LA ESCUELA HAY QUE FORMULAR EXPLICITAMENTE LOS PROCESOS QUE SE APLICAN AL RESOLVER LOS PROBLEMAS

El currículo oculto en resolución de problemas es insuficiente. Hay que hacer diseños instruccionales para que el alumno se entrene de forma explícita en la resolución de problemas. El alumno no asimila la estructura matemática que está detrás del enunciado.

La ESTRATEGIA de resolución de problemas se puede definir como:

T R A D U C I R y luego R E S O L V E R .

Una ESTRATEGIA es una técnica general de resolver problemas. Las estrategias no garantizan que se encuentre una respuesta, pero guiarán la solución del problema.

Los HEURISTICOS ESPECIFICOS son operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas matemáticos. Son "reglas" o "modos de comportamiento que favorecen el éxito.

LAS ESTRATEGIAS HEURISTICAS BASICAS HAY QUE ENSEÑARLAS COMO UN CONTENIDO MAS.

Hay distintos modelos para guiar el proceso de resolución de problemas. Todos ellos tienen en común las siguientes fases fundamentales:

FASE _____ FASE _____ FASE DE _____ FASE DE
INTRODUCTORIA EXPLORATORIA RESOLUCION REVISION

Uno de los heurísticos específicos más significativos, útil y sencillo de trabajar con los alumnos es:

REPRESENTACION DE DATOS (ORGANIZACION DE LA INFORMACION)

- 2.1. Hacer una figura o un diagrama.
- 2.2. Construir tablas.
- 2.3. Hacer gráficas.
- 2.4. Codificar algebráicamente (ecuaciones) o numéricamente los datos o situaciones del problema.

Este heurístico es uno de los más potentes que se pueden enseñar a los alumnos. Debemos ofrecer continuamente a nuestros alumnos las herramientas de representación que necesita: figuras, diagramas, tablas, listados, codificaciones. En el fondo, la enseñanza de las matemáticas es un ofrecimiento continuo de nuevas herramientas de este tipo. No basta con exponerlas; es importantísimo enseñar a utilizarlas.

Todos los heurísticos son importantes. La oportunidad de enseñar uno u otro depende de los alumnos, de la planificación de nuestras clases y de la batería de problemas que diseñemos.

El pensamiento matemático es un proceso dinámico que extiende nuestra capacidad de comprensión. La práctica con reflexión es lo que sirve para mejorar el razonamiento matemático.

TODOS PODEMOS RAZONAR MATEMATICAMENTE.

La LOGICA en la Educación Primaria es una herramienta para reflexionar, no conceptual y sí eminentemente práctica. La lógica debe convertirse en el lenguaje de uso común a la hora de hacer matemáticas. A través de las colecciones de objetos, se realiza la matematización de algunas formas de razonamiento.

Una COLECCION DE OBJETOS es una alternativa al término CONJUNTO, pero también un cambio en el procedimiento didáctico.

Un correcto aprendizaje consistirá en dar una visión práctica de los diversos recursos lógicos y de las matemáticas como herramienta para reflexionar.

Los contenidos a trabajar deben ser: Distribuciones espaciales, Lenguaje gráfico y Lenguaje lógico.

1. Identificar colecciones.
2. Hacer "distribuciones espaciales" de colecciones de objetos.
3. Reconocer, caracterizar y representar subcolecciones.
4. Clasificar y ordenar objetos.
5. Utilizar los atributos como expresiones enunciativas.
6. Establecer correspondencias entre colecciones y relaciones entre objetos.
7. Introducir problemas de localización en el plano.
8. Utilizar el lenguaje gráfico para analizar situaciones.

Es necesario acostumbrar al alumno a realizar distribuciones espaciales, destacando las ideas de operador y de función, representando la información a través de diagramas y no de símbolos.

Los juegos con tablero y fichas son una herramienta indiscutible en el aula, generadora de múltiples situaciones problemáticas y dotado de un indudable atractivo para el alumno. En cualquier juego de posición se pueden analizar las posibles estrategias y decidir cuáles son los "mejores" movimientos para ganar siempre. El jugador se ve así en la necesidad de realizar un razonamiento lógico y a pensar de una manera matemática.

Los juegos pueden ser utilizados de distinta forma: como actividad previa, como problema a investigar o como ejercicio de aplicación. Incluso hay juegos que pueden ser vehículos de conocimientos matemáticos. La mayor parte de los materiales didácticos para la enseñanza de las matemáticas son, en cierto modo, juegos.

Casi todos cumplen las características que el informe Cockcroft (1982) proponía: "La enseñanza de la matemática a todos los niveles debería incluir:

- exposición por parte del profesor;
- discusión entre el profesor y los alumnos y entre los alumnos mismos;
- trabajo práctico adecuado;
- consolidación y práctica de técnicas y rutinas básicas;
- resolución de problemas, incluyendo la aplicación de las matemáticas a las situaciones de la vida diaria;
- trabajo de investigación."

Bell así lo indica en su libro sobre juegos de tablero (Labor): "Un juego puede proporcionar muy bien el estímulo necesario para trabajar en todos los puntos anteriores. En particular, los juegos pueden ayudar a iniciarse en la

resolución de problemas y en los trabajos de investigación, además de facilitar la discusión y el trabajo práctico que verosímilmente han de producirse al practicar o estudiar un juego.

Pensando en los juegos, esta sucesión será frecuentemente la adecuada. Así, se estudiará, en primer lugar, un caso particular (simplificado) del juego en cuestión, para intentar a continuación generalizar al juego completo; se hará alguna conjetura sobre la estrategia adecuada al juego y, por último, se intentará justificar dicha estrategia.

Ante todo, los juegos tienen que producir diversión y entretenimiento. Un alumno aburrido y desinteresado será un mal investigador. Es de vital importancia que se juegue realmente a un juego antes de analizarlo e investigarlo.

a) Los alumnos generalmente necesitan tanto una dirección clara como unos materiales concretos, de manera que puedan practicar realmente un juego, manejando de manera efectiva el tablero y las fichas al realizar la investigación (este comentario no hace, desde luego, sino confirmar los trabajos de psicólogos como Piaget y Dienes.

b) Sin una cierta práctica y una dirección bien orientada, o al menos sin una de las dos cosas, los muchachos suelen tener dificultades para redactar una exposición por escrito del trabajo realizado. Hay dos situaciones extremas, representadas una por el alumno que es incapaz de redactar correctamente o de seleccionar el material, y que escribe una explicación larga e incomprensible, incluyendo todo lo que ha hecho; y otra por el alumno que destruye todo el trabajo realizado, excepto un breve resumen de conclusiones.

En el proceso de escribir los resultados, la notación elegida es crucial y, para la mayor parte de los alumnos, la tarea comienza por el problema de inventarse un buen método que resulte adecuado para registrar el desarrollo de un juego o para utilizarlo en su análisis. Polya (1957) dice: "una etapa importante en la resolución de un problema es la elección de la notación. Tal elección debe hacerse cuidadosamente y el simple hecho de elegir una notación adecuada puede contribuir de una manera esencial a entender bien el problema".

c) Aunque el hacer una investigación concreta constituye un buen ejercicio individual, los alumnos suelen ganar mucho del intercambio de ideas con otros, especialmente en las primeras etapas del trabajo.

d) Es raro que un trabajo de investigación único propuesto a un grupo numeroso lleve a buenos resultados.

e) Una vaga sugerencia de que se podría investigar sobre algo, no suele dar buenos resultados, mientras que sugerencias concretas, seleccionadas cuidadosamente, pueden despertar fácilmente la curiosidad de los alumnos, y ellos mismos encontrarán después otras direcciones en las que explorar sin

más guía. Por ejemplo, un planteamiento del problema que empiece por la sugerencia: "Investiga el juego del tablut", tiene menos probabilidades de éxito que otro en el que la cuestión se plantee así: 1) ¿cuántos movimientos posibles de apertura hay en el tablut?; 2) ¿cuántas son las posiciones posibles después de dos movimientos?; 3) investiga posibles aperturas; 4) invéntate una versión simplificada del juego. Y así en todos los casos.

En la investigación sobre juegos resulta sorprendente la cantidad de veces que aparece el mismo tratamiento matemático en distintos lugares. En la matemática misma hay muchos ejemplos de estructuras básicas que aparecen en campos muy diferentes (por ejemplo, la estructura de grupo aparece, al menos implícitamente, en la geometría de transformaciones, en la teoría de congruencias y en análisis). A lo largo de este libro hay muchos temas que aparecen repetidamente.

Así pues, los juegos, además de suponer un buen marco para el análisis individual, ofrecen, sin duda, muchas oportunidades de examinar las conexiones entre juegos distintos.

Por otra parte, resulta casi imposible ignorar las posibilidades prácticas que se ofrecen. Casi siempre pueden construirse estos juegos con materiales muy simples y que pueden conseguirse fácilmente. La fabricación de tableros y fichas para los juegos estudiados podría suponer un trabajo manual con madera y decoración artística o, en un nivel más modesto, trabajo con papel, cartulina, cola, tijeras y unos cuantos lápices o rotuladores de colores, materiales suficientes para construir el equipamiento del juego. En el caso de juegos cuyas reglas originales no están del todo claras o en los que el material utilizado nos es desconocido, es posible hacer gala de gran ingenio y originalidad al diseñar tableros y fichas. Si los juegos están ya hechos realmente, puede construirse sin dificultad una colección completa para usar con un grupo concreto de alumnos."

Esta reflexión, en forma de ponencia, ha tratado de fijar la atención sobre cuatro aspectos de la enseñanza de las matemáticas:

A) El desarrollo del pensamiento lógico del niño es la finalidad principal del proceso de enseñanza- aprendizaje en la Educación Primaria.

B) El sistema educativo y el diseño curricular de las matemáticas en el Estado Español permiten y exigen de los profesores de matemáticas la consecución de este objetivo.

C) Los materiales principales para ello no son sólo los conocimientos puramente matemáticos del currículo, sino que debemos utilizar otros elementos del mismo no tan explícitos como los anteriores.

D) Los elementos que proponemos son: la RESOLUCION DE PROBLEMAS, las DISTRIBUCIONES ESPACIALES y los JUEGOS.

Si el profesorado conoce estas herramientas y las utiliza en su trabajo en el aula, pueden evitarse muchas dificultades de aprendizaje y conseguir una mejor formación del pensamiento matemático del niño.

En los tres talleres que complementan esta ponencia se exponen algunas características y modos de utilización de estos materiales para un mejor conocimiento de los mismos.

Al final conseguiremos el objetivo deseado: que nuestros alumnos PIENSEN MEJOR, tal y como nos propone en sus libros Miguel de Guzmán, maestro de todos.

LOS PROCESOS DE APRENDIZAJE EN MATEMATICAS Y SUS CONSECUENCIAS METODOLOGICAS EN PRIMARIA

Carmen Chamorro Plaza, del Dpto. de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid

El contacto con el profesorado en ejercicio nos ha convencido de que las evidencias son a veces más difíciles de asimilar de lo que cabría esperar. Y una evidencia para quien enseña matemáticas en Primaria es que cualquier esfuerzo encaminado a la mejora de su enseñanza, pasa por mejorar nuestra comprensión, la comprensión de los profesores de matemáticas, de los procesos de aprendizaje de los alumnos.

Una de las causas, y evidentemente no la única, que explica los malos resultados de los alumnos en matemáticas, es la utilización en el aula de materiales y métodos que ignoran cómo se aprende o que están en clara confrontación con la construcción de los conceptos matemáticos.

Si bien aún queda mucho para disponer de una teoría coherente que explique completamente todos los fenómenos que se dan en el aprendizaje de las matemáticas, y ponga de manifiesto el papel del conocimiento matemático, del alumno y del profesor, se dispone ya de aportaciones teóricas muy importantes debidas entre otros a **Gerard Vergnaud**, **Guy Brousseau**, y desde luego **Jean Piaget**, que sentó las bases de la psicología genética, proporcionando con su teoría de la equilibración mayorante una explicación sobre la evolución de los conocimientos.

Algunos de estos elementos teóricos pueden ser de gran utilidad para mirar el currículo de Primaria con una visión más penetrante, que nos lleve, casi de la mano, a la elección de los métodos de trabajo más idóneos y presumiblemente más eficaces que mejoren la comprensión y el rendimiento de los alumnos.

Pasaremos revista a las nociones de **esquema y campo conceptual** debidas a Vergnaud, de **obstáculo epistemológico** de Brousseau, y de **conflicto socio-cognitivo**, concepto procedente del campo de la psicología social genética, trabajado en el campo de las matemáticas por **Perret-Clermont**.

La teoría de campos conceptuales de marcado carácter cognitivista supone una mejora de las teorías anteriores de Piaget, y su autor la define como teoría psicológica de la conceptualización de lo real, que pretende explicar las filiaciones y rupturas que se producen entre los conocimientos, especialmente los científicos y tecnológicos. El deseo de tomar en consideración las dos ideas que siguen, se encuentra detrás de la idea de campo conceptual: la interconexión de unos conceptos/procedimientos con otros de los que difícilmente se pueden disociar, y la necesidad de estudiar el desarrollo del

alumno no sólo en un periodo largo de tiempo sino en relación con un amplio campo de conocimientos.

Así, Vergnaud define el campo conceptual como "un espacio de problemas o de situaciones-problema cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos de varios tipos pero en estrecha conexión".

Un concepto hace referencia siempre a un conjunto de situaciones (S) que dan sentido al concepto (C), y así, un campo conceptual puede considerarse como un conjunto de situaciones, entendiendo éstas como combinación de tareas. Se trata por tanto de considerar la acción del sujeto en relación con una situación, observando la organización de su conducta, es decir, si utiliza anticipaciones y reglas de acción, conceptos y teoremas en acto, que son los elementos que permiten analizar la situación en cuestión. Piaget denominó a dichos elementos **invariantes operatorios**, y constituyen los conocimientos contenidos en los esquemas. Uno de los hechos establecidos por la psicología cognitiva es que el desarrollo de la inteligencia se realiza en grandes etapas, etapas que se caracterizan por la consecución de nuevos invariantes operatorios, que vienen a constituir una especie de jalones en el desarrollo del individuo.

Un esquema es un sistema de asociaciones, acciones, ideas, conocimientos y hábitos que pueden ser usados en todo momento, algo parecido a una red de relaciones. A lo largo del aprendizaje de las matemáticas los esquemas se modifican y se enriquecen; así, una mejora puede consistir en la eliminación de ideas erróneas o no pertinentes, o en la elaboración de procedimientos o estrategias más eficaces para resolver una situación. En este sentido, comprender es integrar en los esquemas precedentes a través de los mecanismos de acomodación-asimilación.

Así por ejemplo, los distintos mecanismos de conteo de una colección, o las estrategias de resolución de ecuaciones sencillas del tipo $a + b = ?$ utilizadas por los niños, han sido perfectamente estudiados, así como el paso de un esquema a otro superior, lo que ha permitido detectar que los profesores no enseñan, en contra de lo que pudiera pensarse, la rutina más eficiente propia de un ejecutor hábil, de forma que corresponde a los niños hacer por sí solos la transición de un modelo a otro más eficaz, más automatizado o algoritmizado cuando aprenden.

Por tanto, en un campo conceptual C hay siempre un conjunto de esquemas que son utilizados por los sujetos para resolver las situaciones S. Así mismo, el tratamiento de esas situaciones, la aplicación de los esquemas, lleva implícita la utilización y organización de un lenguaje (L), bien en la vertiente de comunicación o de representación, y una actividad de representación simbólica. El lenguaje natural de los niños constituye al principio una herramienta o útil del pensamiento, en tanto que las verbalizaciones acompañan siempre al razonamiento, y la transformación de éste útil en objeto de pensamiento, en el sentido dado por Regine Douady, forman parte

de la conceptualización matemática. Lenguaje y símbolos matemáticos carecen de sentido considerados fuera de los esquemas y las situaciones.

En resumen, un campo conceptual es el triplete formado por $C = (S, L, S)$

Son campos conceptuales entre otros:

- **las estructuras aditivas**, que incluyen los conceptos de: cardinal, medida, transformaciones por aumento y disminución, composición de medidas, composición de transformaciones, de número natural y número negativo...

- **las estructuras multiplicativas**, que engloban los conceptos de: proporción simple y compuesta, función lineal y multilineal, razones, cociente y producto de dimensiones, fracción, número racional, múltiplo, divisor....

- **las magnitudes espaciales**: longitud, superficie, volumen

- **la lógica de clases**, que constituye la referencia para entender los conceptos de propiedad, relación de inclusión, operaciones de unión e intersección, complementario de clases, conjunción, disyunción y negación de propiedades.

De los estudios de Vergnaud puede desprenderse fácilmente la necesidad de practicar una enseñanza cargada de significados, significados que vengan dados por las situaciones variadas en las que un concepto se forma y adquiere sentido, de manera que se pongan en todo momento de manifiesto las interrelaciones entre un concepto y aquellos que forman parte de un mismo campo conceptual. Tal propuesta es sólo posible si las situaciones presentadas en el aula responden a los criterios de variedad, interés y verosimilitud y guardan relación con las capacidades y actividad intelectual de los niños a los que van dirigidas, actividad sobre lo real que es fuente de construcción de los conocimientos.

El papel del error y su relación con las concepciones de los alumnos constituye una segunda pauta para la reflexión.

Para muchos autores, Brousseau entre ellos, el aprendizaje se produce por adaptación al medio, a una situación concreta, y los conocimientos se adquieren por progresos relativamente discontinuos que suponen rupturas cognitivas, cambios de modelos implícitos y de concepciones.

En particular, la construcción de la ciencia pone en evidencia la ruptura entre los modelos espontáneos de los sujetos y el conocimiento científico, de forma que la historia de la ciencia se halla jalonada de "errores rectificadores". Así, la epistemología científica aparece como una rectificación constante en la que se da la primacía teórica del error en terminología de Bachelard, para quien el error, lejos de ser una laguna o una falta de conocimiento, tiene toda la vitalidad del instinto. Según sus palabras: "Se conoce de hecho contra un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, superando lo que en el espíritu mismo constituye obstáculo".

La construcción del conocimiento en una perspectiva constructora, funciona de forma similar. Un conocimiento no se adquiere sustituyendo una

concepción antigua del sujeto por otra nueva, sino en interacción con aquella, según la dialéctica antigua/nueva.

Una concepción es el producto de estructuraciones, acomodaciones y maduraciones de un sujeto, y por tanto es evidente que una concepción puede ser falsa o incompleta como resultado de un problema de centración-descentración, pues a menudo, el sujeto se centra en un único aspecto de una situación compleja, sin conseguir descentrarse de éste aspecto parcial, lo que le impide lograr una visión global. Otra propiedad de las concepciones es que son dinámicas, pudiendo hablarse de una filiación de concepciones, entendiendo por tal el conjunto de lazos que existen entre una serie de representaciones intermedias.

A veces, el cambio de concepciones da lugar a un conflicto cognitivo; la eliminación de conocimientos falsos se muestran resistente, incluso después que el alumno ha comprobado su falsedad y aparentemente los ha rechazado. En este caso se habla de **obstáculo epistemológico**.

Los obstáculos se repiten y aparecen en la filogénesis y en la ontogénesis.

Un obstáculo es pues un conocimiento, no una falta de conocimiento o una dificultad sin más, que se muestra eficaz en situaciones determinadas, pero que fracasa fuera de ese contexto. Resiste a las contradicciones a las que se confronta, y reaparece de tiempo en tiempo en circunstancias propicias, a pesar del rechazo explícito del sujeto.

Brousseau distingue varios tipos de obstáculos: ontogenéticos, epistemológicos, didácticos y culturales.

Se reconoce así que la cultura, las concepciones culturales pueden constituir un obstáculo. La cultura ayuda a comprender los procesos, pero no hay que olvidar que a veces se aprende contra la cultura, contra la práctica cotidiana, lo que debería hacer sospechar a los profesores de las virtudes de la práctica **indiscriminada**, heredada de la pedagogía de la acción, y reflejo de la ilusión empirista de los años 70. Así por ejemplo, el fenómeno de aritmetización de la medida que se da en nuestra sociedad constituye un obstáculo para la comprensión de lo que significa medir, de forma que las prácticas de medida en la realidad y con los instrumentos habituales pueden generar numerosos obstáculos que harán de freno a la conceptualización.

Los obstáculos ontogenéticos se producen cuando el aprendizaje requiere del sujeto una capacidad por encima de su madurez conceptual. Este tipo de obstáculos ha abundado en la enseñanza de las matemáticas en España, siendo propiciados en muchas ocasiones por los propios Cuestionarios Oficiales, que requerían de los niños la utilización de un lenguaje y un simbolismo que sobrepasaba su madurez, con lo que la única salida posible para alumnos y profesores era la memorización y la algoritmización a través de la repetición, de procedimientos no comprendidos, con el consiguiente riesgo de pérdida de sentido de la actividad matemática y la comisión de numerosos errores.

A nuestro juicio y por primera vez, el D.C.B. se ha situado en una perspectiva más realista que toma en consideración las verdaderas capacidades de los niños, y lo que quizás a muchos pueda parecer insuficiente, no es un ajuste a la baja sino a la realidad.

La relación didáctica es fruto también de obstáculos, en la medida que la distancia entre el saber del alumno y el saber del profesor condicionan la aparición de obstáculos didácticos, debidos por ejemplo a métodos inapropiados, uso abusivo de analogías, aproximaciones parciales, etc en la transposición didáctica, lo que necesariamente provoca conocimientos erróneos e incompletos.

De todo lo anterior se deduce naturalmente, que los errores no son sólo falta de conocimientos, erráticos y sancionables, según la consideración más peyorativa que de ellos hacen muchos profesores, sino que son el resultado de concepciones falsas o incompletas, pudiendo ser considerados por el alumno como indicio de contradicción que le obligue a rechazar una concepción.

Los errores se agrupan en torno a concepciones, y de alguna forma un obstáculo epistemológico va a determinar una serie de errores que le son propios. Se hace por tanto necesaria una interpretación de los errores por parte del profesor, a efectos de determinar la tipología y reagrupación de los mismos en relación con la constitución del conocimiento. M.H. Salin propone:

- una descripción de los errores, la búsqueda de los rasgos que caracterizan las situaciones en que aparecen y su agrupamiento en regulaciones cognitivo-afectivas.

- la búsqueda de tipos de errores en relación con los obstáculos epistemológicos o los conocimientos y su observación.

Estamos de acuerdo con M. Henry cuando afirma que los profesores necesitan una gran cultura histórica, epistemológica y didáctica para interpretar los errores de los alumnos, y que entre las elecciones que tiene el profesor frente a los obstáculos, la peor es ignorarlos. Las dificultades se saltan pero los obstáculos no.

Desde un punto de vista didáctico interesa que el profesor reflexione en cada caso sobre cómo favorecer el cambio de concepciones de los alumnos, y qué familia de situaciones didácticas presentar en clase para que la interacción del alumno con las mismas desemboque en la construcción del conocimiento matemático deseado.

Si sabemos que el conocimiento matemático de los alumnos no se produce según el esquema de sucesión de concepciones diferente, ya que muchas de ellas coexisten a la vez en el individuo y se constituyen en mutuo obstáculo, es muy cuestionable la práctica docente habitual basada en un modelo simplemente aditivo que pone el énfasis en la práctica.

Incluso admitiendo que la práctica puede ser interesante para memorizar repertorios de cálculo o automatizar algoritmos, ésta sólo tiene sentido después de una familiarización con los procesos de cálculo, asegurada previamente la comprensión, de forma que los niños tengan siempre como alternativa al olvido la reconstrucción o fabricación de procedimientos propios aunque estos sean más rudimentarios y artesanales que los algoritmos aprendidos. Se sabe también que una forma de aumentar la capacidad de memoria a largo plazo de una persona, es organizar los elementos menores de información formando bloques.

Las últimas investigaciones sobre la memoria señalan que: "la memoria no puede comprenderse separada de otros procesos cognitivos. La investigación evolutiva ha insistido continuamente en este planteamiento. La memoria y el significado dependen del conocimiento previo del sujeto, por lo que debe existir una profunda relación entre lo que un niño puede hacer o razonar en una etapa determinada y lo que puede recordar o reconstruir".

El D.C.B. propone a este respecto "desarrollar en el alumnado estrategias personales para efectuar cálculos mentales mediante composición y descomposición de números".

La práctica repetitiva se escuda muchas veces, sobre todo en Primaria, en la necesidad de calcular con seguridad y precisión que tendrán los niños en la vida corriente, y con tal excusa algunos maestros ponen a los niños multiplicaciones o divisiones de seis cifras por seis cifras; quienes defienden esta práctica, olvidan decir que en la vida corriente nadie tiene necesidad de tal cosa, y que en caso de ser necesario nadie lo hace con lápiz y papel, que utiliza la calculadora, y que por tanto sería más provechoso invertir el tiempo dedicado a prácticas estériles en hacer posible la resolución de "problemas reales" con la ayuda de la calculadora. A este propósito dice Fielker: Uno de los propósitos de estos materiales de ayuda es el de ser **herramientas**, y la calculadora obviamente lo es. Hace aritmética. Y la hace de un modo más eficaz que cualquiera de los que conocemos".

El D.C.B. ha sabido recoger la observación de Fielker, pues sólo así podía compatibilizarse el deseo, manifiestamente expresado, de presentar a los alumnos en la medida de lo posible situaciones y problemas relacionados con el entorno, y las dificultades de cálculo que estos comportan. La realidad es siempre más complicada que los modelos matemáticos que tratan de explicarla.

Nos referiremos por último a la noción de conflicto socio-cognitivo, concepto surgido de la psicología social, heredero de las teorías de Vygotski y aplicado a la didáctica en una perspectiva constructivista que creemos prometedora.

El conflicto socio-cognitivo aparece, y de ahí su nombre, en las interacciones sociales entre individuos en las que se manifiesta un sistema de centraciones cognitivas opuestas, bien sobre lo real, o sobre acciones sobre lo

real, que los individuos tienen que coordinar para resolverlo. El papel del conflicto socio-cognitivo en la construcción cognitiva individual ha sido puesto de manifiesto en numerosas investigaciones, en tanto que se trata de un conflicto estructurante fuente de cambios en el individuo.

La naturaleza social de las situaciones escolares a las que se enfrenta a los niños es considerada por la didáctica de las matemáticas en tanto que **contrato didáctico** que liga al profesor, los alumnos y el saber dentro de una situación didáctica, como instrumento teórico que sirve para comprender cómo se establece el equilibrio en el sistema didáctico formado por los tres polos: saber-profesor-alumno.

En matemáticas, según señala Colette Laborde, existen fundamentalmente dos modalidades de funcionamiento de procesos interpersonales:

- según que el problema propuesto tenga en sí mismo una dimensión social (caso de todos los juegos de mensajes de geometría para describir y reproducir una figura conforme al mensaje recibido, introducción de códigos o simbolismo matemático tales como unidades de medida o escrituras económicas, y en general todas aquellas situaciones que en terminología de Brousseau son situaciones de formulación),

- o bien, se trate de resolver el problema por un grupo de alumnos, al margen de que el problema suponga en sí la resolución de un problema social. Esta manera de trabajar supone poder confrontar las estrategias propias con las de los otros, favoreciéndose así la descentración del individuo, descentración necesaria para negociar en el proceso que lleva a validar o rechazar una estrategia.

En los dos casos, los procesos sociales son respectivamente internos o externos al problema.

Desde un punto de vista metodológico es de gran interés provocar conflictos socio-cognitivos en las situaciones didácticas. La contradicción entre dos puntos de vista opuestos se percibe con mayor nitidez y es refutada con mayor facilidad, que la que proviene únicamente de los hechos a los que se ve confrontado un individuo aisladamente, que podría eventualmente ignorar tal contradicción o pasar de un punto de vista al otro de forma oscilante como manera de resolver el conflicto, en ausencia de un partenaire con quien confrontarse. Los trabajos de psicología social ponen en evidencia la supremacía de la coordinación de acciones entre los individuos sobre la coordinación individual en los procesos de elaboración del conocimiento, y son una síntesis del constructivismo piagetiano y las tesis vygotskianas sobre el desarrollo proximal.

Sin embargo, determinadas precauciones relativas a la elección de los partenaires deben ser tomadas para que la interacción funcione adecuadamente; en este sentido un conocimiento previo de los niveles cognitivos de unos y otros es un punto de referencia para organizar las

parejas o grupos que habrán de trabajar juntos, de lo contrario, la interacción, si es que se produce (podría ocurrir que la distancia cognitiva hiciera imposible para un individuo comprender las proposiciones y argumentos del otro) provoca un conflicto que puede saldarse no con una mejora de estrategia, sino con nuevas proposiciones contradictorias o simplemente la amalgama resultante de unir las propuestas de A y B aunque sean contradictorias.

La interacción no es siempre un remedio milagroso aplicable a toda situación, determinadas tareas que demandan conocimientos que los alumnos están muy lejos de tener, o que están muy automatizadas, no se resuelven mejor por el hecho de que se provoque una interacción social. En palabras de Brousseau:

" El conflicto socio-cognitivo es una técnica didáctica difícil de poner en marcha y de gestionar:

- el objeto de debate puede cambiar de cuadro de un momento a otro, sin que sea posible estimar la utilidad de este deslizamiento.

- las intervenciones del profesor se ven constreñidas entre limitaciones contradictorias.

- es una técnica muy costosa en tiempo.

(...)El término conflicto socio-cognitivo pone el acento de manera excesiva en dos momentos del debate: el examen y la toma en consideración de posiciones contradictorias, y enmascara una condición indispensable para su buen funcionamiento: la cooperación de los alumnos de cara a la construcción de un saber común verdadero."

Creemos haber esbozado algunas peculiaridades de los procesos de aprendizaje en matemáticas, tales como la construcción a través de la acción, la consideración del error como síntoma de concepciones erróneas o incompletas, el origen de los obstáculos y la manera de afrontarlos, la organización en campos conceptuales de los conceptos y el papel de los conflictos socio-cognitivos en el aprendizaje. En consecuencia, sólo cabe abordar una metodología acorde con lo anterior, que se pregunte cada día si responde a los principios teóricos anteriores.

Estamos seguros de que si la respuesta es afirmativa, estaremos en condiciones de mostrar a nuestros alumnos de Primaria que aprender matemáticas puede ser una aventura apasionante.

BIBLIOGRAFIA

1. VERGNAUD, G.: Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques, en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 2.2, 1981. La Pensée Sauvage. Grenoble.

2. Recomendamos leer el capítulo 3 "Análisis de la ejecución de las tareas de cálculo" del libro de RESNICK, L. y FORD, W.: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Barcelona, Paidós-MEC, 1990.

3. DOUADY, R.: *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*, Thèse d'Etat, Paris, Université de Paris VII, 1984.

4. BACHELARD, G.: *La philosophie du non*, Paris, P.U.F., 1973.

5. Para más información ver JONNAERT, Ph.: *Conflits de savoirs et didactique*, Bruxelles, De Boeck, 1988.

6. Puede encontrarse un estudio más detallado del error en: CHAMORRO, M. Carmen: *El aprendizaje significativo en matemáticas*, Madrid, Alhambra-Logman, 1992.

7. SALIN, M. Hélène: *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques*, Bordeaux, Memoire de D.E.A., Université de Bordeaux I., 1976.

8. HENRY, M.: *Didactique des Mathématiques*, Besançon, IREM de Besançon, 1991.

9. Por limitaciones de tiempo y espacio no podemos hacer una referencia más amplia a la teoría de situaciones de G. Brousseau, pero recomendamos como lectura imprescindible para quien enseñe matemáticas, la siguiente: BROUSSEAU, G.: *Fundamentos de didáctica de la matemática*, Zaragoza, Universidad de Zaragoza, 1989.

10. MARCHESI, A.: "La memoria de los niños", en *Infancia y aprendizaje*, pp.

11. FIELKER, D.: *Usando las calculadoras con niños de 10 años*, Valencia, Consellería de Cultura, Educació i Ciencia, 1986.

12. AMIGUES, R., CHEVALLARD, Y. et al.: *Le contrat didactique: différentes approches, Interactions Didactiques*, nº8 mars, 1988, Universités de Genève et Neuchâtel.

13. LABORDE, Colette: *Deux usages complémentaires de la dimension sociales*, in *L'après Vygotski et Piaget*, De Boeck Université, Bruxelles, 1991.

14. Presupuestos elaborados en la teoría del conflicto socio-cognitivo desarrollada por Mugny y otros en: MUGNY, G.: *Psychologie sociale du développement cognitif*, Berne, Peter Lang, 1985.

15. BROUSSEAU, G.: *Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique*, in *Construction des savoirs*, Québec, Agence d'ARC, 1990.

MESA Nº 2

MATEMATICAS EN SECUNDARIA

Coordinador/Ponente: D. Vicente Riviere Gómez

Secretario: D. Juan Gallardo Calderón

MESA 2.- MATEMATICAS EN SECUNDARIA

MATEMATICAS A LOS 12 Y A LOS 18 AÑOS

D. Vicente Riviere Gómez

Ex-asesor del Servicio de Innovación del M.E.C.

Difícilmente el título que tiene esta ponencia, ni el de la mesa en la que se presenta, podrían nunca reflejar su contenido. No puede hablarse con propiedad de las matemáticas de los 12 a los 18 años como tampoco puede hablarse de las matemáticas a los 12 y a los 18 años. Sería, quizá, más indicativo, y más cierto, si dijera: "Matemáticas a los 12 y a los 18 años, ahora y aquí". Necesitamos unas referencias espacio-temporales claras para poder pensar en muchas cosas sobre la enseñanza de las matemáticas. Y esto por dos motivos principales, uno coyuntural: la didáctica de las matemáticas es una ciencia nueva, con muy pocos paradigmas establecidos y compartidos por la comunidad profesional. Esto nos obliga a poner en cuestión casi todo, a estar siempre dispuestos a renunciar a principios de actuación con los que hemos estado trabajando durante bastante tiempo.

Pero hay una segunda razón, que no es coyuntural sino que pertenece a la propia esencia de cualquier didáctica. La enseñanza de las matemáticas está y estará siempre fuertemente condicionada por una serie de factores enormemente cambiantes y sobre los que, a menudo, muy poco o nada podemos influir. Ejemplos de estos factores son:

a. Las propias matemáticas cambian, aparecen nuevos conceptos, nuevas relaciones, nuevos métodos. Estas novedades, aunque sea a largo plazo, inciden en la enseñanza de las matemáticas en secundaria. Un ejemplo claro de ello es la irrupción en los programas de matemáticas de casi todos los países de la matemática moderna a finales de los 60 y principios de los 70. Quizá no se trataba de descubrimientos recientes en las matemáticas pero sí de cómo el desarrollo de éstas afecta a su enseñanza en esta etapa. Pero sobre todo influyen los cambios en la forma de entender qué son las matemáticas, cómo se hacen y para qué sirven.

Pero además la evolución de otras ciencias afecta a nuestra idea de para qué sirven las matemáticas y, consiguientemente, de qué matemáticas debemos enseñar. De esta forma, la creciente presencia de la estadística y la teoría de la probabilidad en un conjunto cada vez más amplio de ciencias y campos de conocimiento nos ha hecho modificar la importancia que asignamos a esta parcela de las matemáticas en la educación secundaria.

b. La sociedad cambia. Cambian los intereses de nuestros alumnos, la presión que perciben del resto de la sociedad con respecto a las matemáticas, la utilidad cotidiana de lo que enseñamos.

c. Enseñamos matemáticas en unas condiciones también diferentes en cada momento. Aspectos tan importantes como la estructura del sistema educativo nos hacen actualmente plantearnos problemas que hasta ahora no teníamos; el número de alumnos en el aula nos puede permitir determinadas estrategias didácticas o, por el contrario, dificultarlas casi del todo.

d. Se desarrollan también otras ciencias que nos son útiles, que, con intención o sin ella y nos guste o no nos guste, utilizamos o utilizan quienes elaboran el currículo, quienes diseñan los materiales curriculares, quienes investigan en didáctica de las matemáticas y una buena parte de los profesores: la psicología del aprendizaje y de la instrucción, la sociología de la educación, la didáctica general, la Teoría del currículo, etc.

e. Y, por último, cambiamos los profesores, nuestros gustos, nuestra formación, nuestras expectativas.

Esta enorme influenciabilidad nos obliga siempre a mantener abierto el debate sobre cuestiones básicas de la enseñanza de las matemáticas. Pero es que, además, en este momento se han producido simultáneamente cambios importantes en algunos de esos ámbitos y se avecinan otros de enorme importancia. Se nos plantea la necesidad de reflexionar sobre las matemáticas de los 12 a los 18 años. Se nos viene encima una modificación de los parámetros en los que hemos estado trabajando. Tenemos en la mayor parte de los casos una experiencia que no nos hace fácil valorar en su justa medida la situación futura. Una experiencia limitada en cuanto a las edades de los alumnos con los que hemos de trabajar y en cuanto al perfil de esos alumnos. Precisamente por que el cambio supone una modificación en la estructura los futuros profesores de secundaria tenemos experiencia en etapas educativas de otras características: en el actual Bachillerato, en Formación Profesional o en la Educación General Básica. En los tres casos una experiencia limitada.

Todos, por consiguiente, necesitamos establecer nuevos límites y hacernos al nuevo espacio de trabajo, a la nueva situación que no está sólo motivada por la reforma, que, en cierta medida, sólo ha sido un detonante. Cualquier individuo, cuando se enfrenta a una situación nueva, utiliza los recursos de que dispone y las ideas que tenía previamente para tratar de avanzar con éxito por ella. En realidad son un conjunto de preconceptos o prejuicios que consideramos que pueden sernos útiles. Es necesario siempre, pero ahora quizá más, revisar los tópicos al uso sobre algunas cuestiones.

En esta ponencia se trata de plantear problemas, más que de proponer soluciones; de provocar la reflexión sobre algunas cuestiones y de indicar algunas vías de búsqueda. Y para ello quizá no debemos tener miedo a hablar no sólo de didáctica de las matemáticas. También de sociología de la enseñanza de las matemáticas. En todo caso la reflexión que propongo es necesaria incluso para rechazar algunas de las propuestas al uso.

1. LOS EXTREMOS

Para empezar a pensar en ello puede ser útil ver qué pasa con los puntos extremos. El estudio de los extremos puede servir de excusa para entresacar los problemas. Salta a la vista en primer lugar que debe haber diferencias. Nosotros debemos enseñar matemáticas a alumnos de 12 y de 18 años entre los que, en una primera aproximación, hay claras diferencias. Parece obvio que hay diferencias entre una y otra edad y que afectan al aprendizaje de las matemáticas. Pero no es tan trivial determinar cuáles son esas diferencias. En una primera aproximación nos podemos centrar en las siguientes, aunque sin duda hay otros de considerable transcendencia:

- Qué objetivos queremos alcanzar, para qué queremos en cada caso enseñar matemáticas.

- Intereses. Poco definidos a los doce años, muy marcados a los dieciocho.

- Carácter obligatorio. A los 18 el aprendizaje de las matemáticas es consecuencia de una decisión de los alumnos, que tienen una orientación vocacional más o menos clara.

- La naturaleza de las matemáticas que hemos de enseñar.

Aunque en menor medida, las reflexiones que hagamos en este sentido son válidas también para analizar qué pasa actualmente entre los 14 y los 18 años, de la misma manera que las diferencias que se encuentren en estas edades, ampliadas a veces, son también reflejo de aquellas.

Con respecto exclusivamente a los propios alumnos, podemos establecer en cada caso una especie de "retrato robot" de cada uno de los "alumnos extremos", centrándonos únicamente en algunas características que tienen relación con su aprendizaje de las matemáticas. Las caracterizaciones que se indican aquí, desde luego, deben tomarse con todas las salvedades oportunas, ni pretenden ni pueden ser una descripción de los alumnos que se ajuste siempre a la realidad. Sí son útiles, por el contrario, para ver con quién hemos de trabajar.

Alumno de 12 años	Alumno de 18 años
- En el estado inicial de la preadolescencia.	- Postadolescente.
- Incapaz de razonar sin apoyo concreto.	- A menudo capaz de razonar en términos "formales".
- Interesado por el aprendizaje independientemente de cuáles sean los contenidos. Tiene una motivación intrínseca.	- Cuando lo tiene, su interés por aprender matemáticas es indirecto: por su utilidad para otros aprendizajes, para encontrar trabajo, etc.
- Acepta sin crítica que debe aprender todo aquello que el profesor intenta enseñarle.	- Tiene más claro para qué estudia matemáticas, si las estudia. Se pregunta por la utilidad de todo aquello que el profesor intenta enseñarle.
- Hasta ahora no le ha ido demasiado mal en su relación con las matemáticas.	- A veces ha tenido fracasos en etapas anteriores de su aprendizaje de las matemáticas.
- Responde ante sus padres de sus éxitos y fracasos.	- Responde principalmente ante sí mismo.

2. ENSEÑAR UNAS MATEMÁTICAS DIFERENTES

Precisamente porque pretendemos cosas diferentes con alumnos distintos, necesariamente hemos de enseñar matemáticas con características muy dispares. Pero la diferencia entre unas y otras no es únicamente de grado, no se trata de enseñar matemáticas iguales pero más difíciles. Hay una diferencia cualitativa entre unas y otras. Desde luego que en algunos casos solo se trata de "más de lo mismo" pero no siempre es así.

- La introducción a lo largo de la etapa de algunos contenidos modifica sustancialmente las matemáticas que enseñamos al principio y al final de la enseñanza secundaria. En particular, la presencia del álgebra condiciona de manera extraordinaria la forma de hacer matemáticas a partir de la mitad de la etapa, e incluso sirve para justificar a su vez otros contenidos o para desecharlos.

- La carga formal y el rigor que se aprecian con fuerza en las matemáticas dirigidas a los 18 años es, en parte, consecuencia de lo anterior. Pero no sólo es una consecuencia. Más bien, para muchos es algo directamente relacionado con la edad, de modo que de algún modo "repugna" la ausencia de formalismo incluso cuando no tiene justificación alguna.

- La complejidad de las relaciones conceptuales que se manejan, o deberían manejarse, al final de la educación secundaria es enormemente mayor que la que corresponde a los 12 años. El aumento en la cantidad de conceptos manejados hace crecer de manera exponencial las posibles relaciones entre ellos. Sirve como ejemplo de ello cualquier concepto manejado al principio y al final de la educación secundaria. Así, cuando un alumno de 12 años maneja el concepto de circunferencia, si lo hace bien, debe ponerlo en relación con muy pocos más. Por el contrario el alumno de 18 años al que se le pide la utilización de la circunferencia, debe manejar una enorme cantidad de conceptos relacionados con ella.

3. ¿PARA QUÉ ENSEÑAMOS MATEMÁTICAS A LOS 12 Y A LOS 18?

Siempre ha sido un problema determinar los objetivos de la enseñanza de las matemáticas. Pero al mismo tiempo una tarea de gran importancia, porque en función de cuál sea su finalidad estarán justificados unos u otros contenidos y una mayor o menor profundidad en cada caso.

No se ha reconocido siempre, sin embargo, esta importancia. Los profesores de matemáticas hemos tenido tradicionalmente la supuesta "ventaja" de no necesitar su justificación para mantener una presencia importante en el currículo. De forma que muy raramente se ha puesto en duda su necesidad. Y si alguna vez se ha hecho ha sido más bien por los propios profesores de matemáticas que por instancias ajenas a su enseñanza.

Pero, puesto que los objetivos de su enseñanza determinan absolutamente qué es lo que debemos enseñar, cuanto y cuando, nosotros no podemos hurtarnos la reflexión de para qué enseñamos en cada momento. En relación con nuestro tema la pregunta sería: ¿Qué pretendemos al enseñar matemáticas a los 12 años? ¿Qué pretendemos a los 18?

Es indudable que esta pregunta no está bien planteada, principalmente por dos razones: es una pregunta aislada, no se puede separar de forma tan simple una edad de otra, pero además nuestros alumnos no sólo aprenden matemáticas, su aprendizaje de las matemáticas ha de estar siempre condicionado por el resto de las cosas que se intenta que aprendan. A pesar de esto creo que conviene pensar sobre ello.

Nuestra pregunta puede a su vez disgregarse en una serie de subpreguntas, que se refieren a:

- Para qué enseñar matemáticas en una etapa obligatoria, para que enseñarlas en una etapa no obligatoria.

- Para qué hacerlo a todos los alumnos, para qué enseñar matemáticas a una parte de ellos (y aquí hay tantas preguntas como posibles vías vocacionales de los alumnos de dieciocho años).

- Qué matemáticas se puede conseguir que aprendan los niños de 12 años, y los de 18.

Pueden encontrarse muchas relaciones de posibles objetivos, finalidades o metas de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles. En ellas suelen aparecer, al menos, los que incluye las respuestas al Informe Howson dadas en el Simposio de Valencia de 1987. En ese texto (Alonso y otros, 1987) se incluyen bajo el epígrafe de "Razones en favor de las matemáticas" las siguientes:

- El desarrollo de la capacidad de razonamiento.

- El desarrollo de la capacidad para resolver problemas y, como consecuencia de ella, la capacidad investigadora.

- El desarrollo de la capacidad de analizar y comprender la realidad.

- Su carácter instrumental.

- La posibilidad de disfrutar a través de su actividad y de sus formas.

A ellas habría que añadir, quizá, el desarrollo de la capacidad de emitir y recibir mensajes de todo tipo que utilicen, de una u otra forma conceptos, términos o soportes matemáticos.

Es interesante notar la enorme ambigüedad de estas formulaciones y todas las que se utilizan para sustituirlas, así como las suposiciones que se esconden bajo cada una de ellas. Cuando decimos que enseñamos matemáticas para que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas, o que las matemáticas "enseñan a pensar" estamos diciendo demasiadas cosas, tantas que no decimos en realidad nada.

Pero, volviendo a la relación de objetivos, lo que sí parece claro es que esa misma ambigüedad permite utilizar las mismas formulaciones, interpretándolas de distinta forma, en cada momento de la etapa. En algunos casos la diferencia de interpretación vendrá dada por el contexto, por la edad, por la evolución de los propios alumnos. Así es el caso del primero, cuando se habla del desarrollo de la capacidad de razonamiento a los doce años, uno se refiere a la puesta en práctica de reglas lógicas sencillas aplicadas a una pequeña cantidad de información. A los dieciocho pretendemos que el estudiante maneje más información y utilice razonamientos por reducción al absurdo e incluso por inducción.

En otros casos la diferencia estará más bien en el ámbito en el que han de aplicarse esas capacidades de las que hablan los objetivos. La utilización de las matemáticas para el análisis y la comprensión de la realidad se reduce a

los doce años, habitualmente, a la comprensión de los principales elementos del mundo geométrico, junto con la utilización de los números en situaciones en las que sea preciso el recuento y las operaciones elementales. A los dieciocho, el manejo del concepto de relación funcional y la algebrización de algunas formas geométricas permiten ir mucho más allá en la comprensión de la realidad, en muchos casos a través de otras ciencias.

En todo caso, lo que sí es claro es que el peso de cada uno de estos objetivos no ha de ser igual al principio y al final de la enseñanza secundaria. Otro análisis puede hacerse con una clasificación más simple de las finalidades. Si suponemos que la enseñanza de las matemáticas se justifica porque es útil para la vida cotidiana, para la mayor parte de los trabajos, para aprender otras cosas, cada una de estas finalidades va adquiriendo un mayor protagonismo en tres momentos diferentes de la enseñanza secundaria.

4.¿QUÉ CONSEGUIMOS EN ESTOS SEIS AÑOS?

La verdad es que ignoramos en buena medida qué es lo que conseguimos en estos años con respecto al aprendizaje de las matemáticas. Sabemos, en algunos casos, las destrezas que nuestros alumnos son capaces de poner de manifiesto en una situación escolar. Desde luego no sabemos qué son capaces de hacer fuera del ámbito escolar. Sabemos algo sobre los contenidos que han aprendido, y no sobre todos, muy poco sobre las capacidades que hemos conseguido desarrollar.

Al pensar lo que conseguimos surgen inmediatamente dos distinciones: la primera se refiere a la diferencia necesaria entre lo que conseguimos y lo que creemos conseguir. Probablemente no todo lo que creemos conseguir lo alcanzamos en realidad. Hemos desarrollado sistemas de defensa para poder confundir una y otra cosa, que principalmente se basan en dos estrategias: enseñar sólo aquello que es fácil conseguir y medir, y evaluar sólo aquello que sabemos que nuestros alumnos pueden haber aprendido bien.

Esta distinción está relacionada con otra utilizada en la teoría del currículo:

Currículo oficial (o entero). Qué quiere la administración, la sociedad, que enseñemos.

Currículo moldeado por los profesores (o racional). Qué es lo que planificamos para nuestra enseñanza.

Currículo real. Qué es lo que conseguimos que aprendan nuestros alumnos.

Currículo imaginario, relacionado, aunque no igual, con el currículo evaluado. Qué es lo que creemos que nuestros alumnos han aprendido.

Clasificación en la que, salvo quizá en el último caso, las relaciones de inclusión son inversas respecto a las de los conjuntos numéricos de los que

toman su nombre. En este caso, y en una primera aproximación:

CI __ CRac. __ CRe. __ CE

En segundo lugar, y quizá más importante, debe considerarse el problema de lo que conseguimos que aprendan de un modo cualitativo: ¿cuántos alumnos han aprendido realmente eso que pretendíamos enseñarles? Por suerte o por desgracia, es una pregunta de difícil respuesta, ya que a los 18 años ya hay una parte de los alumnos que no están en nuestras manos. En todo caso parece razonable exigir que, cuando se pretende enseñar algo, se trate de responder a la pregunta: ¿cuántos alumnos se quiere que lo aprendan? Pregunta, por otra parte, de casi imposible respuesta en este momento.

Por último, antes de empezar a describir qué es lo que conseguimos (o creemos conseguir) debe tenerse en cuenta que la pregunta debe in necesariamente unida a la recíproca: ¿Qué es lo que no conseguimos, a pesar de haberlo intentado? Retomaremos más adelante este punto.

Volvamos ahora a la pregunta que abre este epígrafe. La dificultad en determinar qué es lo que la enseñanza de las matemáticas consigue a lo largo de los seis años que dura la educación secundaria está relacionada muy estrechamente con la dificultad para evaluar al principio y al final de la etapa. Para responder a la pregunta planteada es preciso saber contestar con precisión a dos preguntas de muy difícil respuesta: ¿con qué ideas viene un alumno de 12 años? y ¿cuáles tiene a los 18? O bien, formulado en términos más generales: ¿Qué sabe un alumno de 18 años que no supiera a los 12 y que no habría aprendido de manera espontánea ni como consecuencia del aprendizaje de otras materias? En todo caso, por diferentes vías sabemos que entre las cosas que conseguimos pueden estar las siguientes:

a) Un cambio de idea respecto a qué son las matemáticas. A lo largo de la Educación Primaria (o ciclos inicial y medio de EGB) el quizá necesario énfasis en el desarrollo de destrezas de cálculo, provoca en los alumnos que la finalizan una idea bastante pobre de lo que son las matemáticas. En Secundaria los estudiantes tienen oportunidad de ampliar este horizonte.

Otra cuestión sobre la que conviene detenerse es cuál es la idea de nuestros alumnos sobre la utilidad de las matemáticas, directamente para ellos e indirectamente para su trabajo futuro. El valor de utilidad que se asigna al aprendizaje de las matemáticas a lo largo de toda la escolaridad constituye una especie de zanahoria que utilizan los profesores de matemáticas, el resto de los profesores y los padres para forzar el interés de los escolares y estudiantes hacia el aprendizaje y el éxito en esta materia. La comparación entre las opiniones de los alumnos de 12 y de 18 años respecto a la utilidad de las matemáticas da lugar a interpretar que a esta última edad sigue siendo una promesa

incumplida; o al menos así es como lo interpretan los estudiantes.

b) Un cambio en la relación de los estudiantes con las matemáticas. Esta relación, guste o no, es de suma importancia por cuanto afecta a la futura orientación de los estudios de los alumnos de secundaria. Para una parte importante de los alumnos, su relación con las matemáticas es tortuosa y esquizofrénica: les asignan una importancia grande para ellos mismos y para su futuro y al mismo tiempo les provoca sentimientos de rechazo. Aunque los resultados necesariamente están afectados por la dispersión de los estudiantes de 18 años, se aprecian diferencias en esta edad con respecto a la relación con las matemáticas de los alumnos de 12.

c) Unos aprendizajes. De entre los aprendizajes que probablemente conseguimos se pueden destacar los siguientes:

- Algunas técnicas matemáticas, en particular técnicas algebraicas y de análisis.
 - Una terminología y, quizá, unas ideas que a veces llegan a conceptos.
- Pretendemos, o deberíamos pretender, enseñar conceptos o, mejor aún, estructuras conceptuales, aunque no se propongan, habitualmente, actividades específicas para ello. Esta es una tarea verdaderamente compleja.
- En pequeña medida, un método, una forma de enfrentarse a algunas situaciones y de analizar algunos problemas.

5. ¿QUÉ ES LO QUE NO CONSEGUIMOS?

Es esta una pregunta difícil de plantear, porque esconde a su vez una variedad de cuestiones y necesita, para su respuesta, algunas reflexiones previas. Desde luego hay objetivos y contenidos que, aun habiéndolo intentado, no hemos conseguido enseñar a nuestros alumnos. También es cierto que hay otros que ni siquiera intentamos alcanzar. Pero quizá el problema mayor está en aquello que creemos haber intentado sin haberlo hecho en realidad.

Por ello quiero evitar estos problemas planteando algunas preguntas asociadas y algo más genéricas: ¿Cuál sería nuestro ideal, nuestro sueño, como profesores de matemáticas?, ¿qué es aquello que nos resulta gratificante apreciar entre nuestros estudiantes con respecto a su actuación "matemática" y que conseguimos tan pocas veces?

No todo lo que pretende el profesor puede conseguirlo. Tenemos en contra una multitud de factores, muchos de ellos sobre los que no tenemos incidencia, dificultando nuestro trabajo. Voy a aventurar una propuesta amplia de algunas cosas que dudo que consigamos, o al menos que lo hagamos suficientemente. En todo caso es una relación de comprobación mucho más fácil que la anterior: siempre es más fácil saber qué es aquello de lo que no son capaces nuestros alumnos que comprobar que son capaces de algo. Además del aprendizaje de contenidos particulares, no conseguimos suficientemente:

a) Enseñar a resolver auténticos problemas utilizando técnicas "matemáticas" de acercamiento y análisis.

b) Desarrollar la capacidad de transferencia de los contenidos aprendidos en la clase de matemáticas a otras situaciones, tanto dentro del ámbito escolar como fuera de él. Las matemáticas que un alumno aprende en primaria es capaz de utilizarlas fuera del contexto escolar casi desde el momento de su aprendizaje. No ocurre lo mismo con lo que los estudiantes aprenden en secundaria.

c) Enseñar algunas habilidades que hicieran mucho más útiles las matemáticas que han aprendido. Ejemplo de estas habilidades puede ser la lectura de textos matemáticos o con una cierta cantidad de contenido matemático.

d) Finalmente, no conseguimos que un número mayor de alumnos aprenda una cantidad suficiente de contenidos.

En resumen, los estudiantes de secundaria dedican de cuatro a seis años al aprendizaje de las matemáticas. En ese tiempo se pretende desarrollar en ellos una serie de capacidades, que, al parecer, tienen todas ellas valor suficiente para justificar esa dedicación. Sin embargo parece que es necesario evaluar globalmente en qué medida ha sido eficaz ese tiempo, y si el coste, en términos del "aburrimiento" que ellos mismos declaran, puede ser menos oneroso. A veces la distancia entre lo que se pretende con la enseñanza de las matemáticas y lo que se consigue es quizá excesiva. El ajuste entre expectativas y logros deberá hacerse en los dos sentidos: delimitando más claramente los objetivos y contenidos realmente alcanzables y estableciendo medios para conseguir todo lo que se pretende.

BIBLIOGRAFIA

Alonso, F. y otros. *Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90*. Mestral. Madrid, 1987.

Cockcroft, W. (Coord.). *Las Matemáticas sí cuentan*. M.E.C. Madrid, 1985.

Escudero, T. y otros. *Opinión de los alumnos de BUP y COU sobre la utilidad de las Matemáticas*. Comunicación presentada en las III JAEM. Zaragoza, 1983.

Gimeno, J. *El currículo, una reflexión sobre la práctica*. Morata. Madrid, 1988.

Howson, A.G. y otros. *School Mathematics in the 1990's*. Documento de discusión.

Keitel, C. *What are the goals of mathematics for all?* Journal of Curriculum Studies, 1987, vol. 19, nº 5.

MATEMATICAS EN BACHILLERATO: ALGUNOS PROBLEMAS DIDACTICOS

D. Juan A. García Cruz de la Sociedad Canaria
de Profesores de Matemáticas

Hace treinta y un años, un mes de marzo de 1962, se publicaba, bajo el título ***On the mathematics curriculum for the high school***, en dos revistas americanas, *American Mathematical Monthly* y *The Mathematics Teacher*, un manifiesto firmado por un nutrido grupo de matemáticos pertenecientes todos a universidades americanas de prestigio.

En él se llamaba la atención sobre lo erróneo que, a juicio de los firmantes, parecía el camino que estaba tomando la reforma de la enseñanza de la matemática tanto en los programas como en los libros de texto al uso. Su finalidad primordial era una llamada a reconducir el proceso y por ello el documento expresaba en siete puntos las líneas maestras que, a juicio de los firmantes, deberían orientar la enseñanza de la matemática en el bachillerato.

Estos son los títulos de los siete puntos que componen el manifiesto:

1. ¿Para quién?
2. Saber hacer.
3. Las Matemáticas y la Ciencia.
4. La interpretación inductiva y las demostraciones formales.
5. El método genético.
6. Las matemáticas tradicionales.
7. Las matemáticas modernas.

Veamos el primero de los puntos.

1 . Para quién. *El plan de matemáticas de bachillerato debería satisfacer las necesidades de todos los alumnos: contribuir a la formación cultural del estudiante en general y ofrecer preparación profesional a quienes usarán más tarde las matemáticas...*

.....Sin embargo, explicar a todos los estudiantes temas que sólo pueden interesar a la minoría de los futuros matemáticos es un despilfarro y significa ignorar las necesidades de la comunidad científica y de toda la sociedad.

El final del primer párrafo parece un eco del doble objetivo del seminario de Royamount, celebrado en 1959 y que fue el origen de la revolución conocida como Matemática Moderna. El párrafo segundo es un rechazo al enfoque lógico-deductivo que caracterizó tal reforma. Para aquellos que nunca hayan oído hablar de este seminario recordaré que fue durante el transcurso del mismo cuando el famoso matemático francés Jean Dieudonné

lanzo el grito de "abajo Euclides" y propuso ofrecer a todos los estudiantes una enseñanza basada en el carácter deductivo de la matemática y que partiera de unos axiomas básicos en contraposición a la enseñanza falsamente axiomática de la geometría imperante en aquellos momentos. Durante el transcurso del seminario se produce la intervención de otro matemático francés, G. Choquet² en el mismo sentido afirma:

"... disponemos de un excelente ejemplo, el conjunto de los números enteros, donde estudiar los principales conceptos del álgebra, como son la relación de orden, la estructura de grupo, la de anillo ..."

Estas dos intervenciones dibujan la una, el enfoque que ha de caracterizar la enseñanza de la matemática y la otra cuál es el contenido más apropiado. La idea en principio parecía bastante lógica y coherente; por un lado se pretendía transmitir a los alumnos el carácter lógico-deductivo de la matemática y al mismo tiempo unificar los contenidos por medio de las estructuras algebraicas y los conceptos de la matemática superior.

La recomendación final del seminario de Royaumont anuncia y prepara el cambio cuyas consecuencias perduran hasta nuestros días:

"Cada país tendrá libertad para realizar la reforma, para introducir nuevos materiales, para organizar la secuencia y para experimentar con los nuevos programas.

Deberíamos proveernos de canales para comunicar los resultados y experimentar entre todos los países, de tal forma que podamos utilizar lo mejor de cada país y estimular las nuevas ideas. El objetivo de estos programas debe ser doble:

En primer lugar proveer de una mejor preparación para los estudios superiores, y en segundo lugar, dar a todos los estudiantes un instrumento útil para la vida diaria."

Con el tiempo, el doble objetivo del seminario de Royaumont se ha mostrado difícil de conjugar. Sin embargo, la llamada a la cooperación y al intercambio de las experiencias entre todos los países se ha hecho realidad en el transcurso del tiempo. Debido a esa colaboración hoy en día se dispone de amplia información sobre la enseñanza de la matemática y de los problemas planteados en todos los niveles educativos. Sin embargo, a pesar del largo camino recorrido, todavía hoy nos encontramos con grandes lagunas en el desarrollo didáctico de las matemáticas para ese tramo que va desde el final de la enseñanza obligatoria hasta el comienzo de la universidad. Los problemas didácticos vienen acompañados, o mejor dicho, se producen a mi

juicio debido a dos limitaciones importantes que condicionan en sobremanera el currículum de matemáticas en esa etapa crucial.

La primera limitación viene impuesta por la situación de la etapa. Ya no se trata de una enseñanza obligatoria, terminal sino que es el comienzo y preparación para los estudios superiores. Así, la Universidad condiciona cualquier innovación que queramos introducir. Está claro que si el carácter lógico-deductivo de la enseñanza superior de la matemática no cambiará, ni quizás deba cambiar, entonces se debe preparar a los alumnos para ese período, y ese cambio debe ser a costa de sacrificar las posibles innovaciones. La segunda limitación viene impuesta por nuestra propia preparación como licenciados en matemáticas y se compone de una concepción parcial de lo que es el conocimiento matemático, en cuanto a que sólo consideramos auténticas matemáticas las lógico-deductivas, acompañado de una falta de preparación didáctica que nos permita romper las cadenas que nos ligan y esclavizan a ese enfoque lógico deductivo, también conocido como enfoque o estilo estructuralista de enseñanza.

Para el estructuralismo la matemática es una ciencia lógico deductiva y es ese carácter el que debe informar la enseñanza de la misma.

El estilo ESTRUCTURALISTA hunde sus raíces históricas en la enseñanza de la geometría euclídea y en la concepción de la matemática como un importante logro cognitivo caracterizado por ser un sistema deductivo, cerrado y fuertemente organizado. Es por lo que a los ojos de los estructuralistas, a los alumnos se les debe enseñar la matemática como un sistema bien estructurado, siendo además la estructura del sistema la guía del proceso de aprendizaje.

Ese fue y sigue siendo el principio fundamental de la reforma conocida con el nombre de Matemática Moderna y cuyas consecuencias llegan hasta nuestros días.

Así la nueva matemática se caracterizó por estar orientada hacia el nuevo contenido. Un contenido que combinaba nuevos objetivos con viejas metas. Entre los nuevos objetivos el principal era el carácter unificador de los conceptos introducidos, como son los de conjunto, relación, matriz, función etc. Y se tuvo una fe desmesurada en que las leyes del álgebra: conmutativa, asociativa, distributiva, etc y los procesos de simetrización, ayudarían a eliminar los viejos errores en aritmética y álgebra.

El segundo punto del manifiesto de 1962 llamaba la atención sobre el peligro de tal enfoque:

2. Saber hacer. En matemáticas un conocimiento valioso no supone ninguna posesión de información, sino "saber hacer". Saber matemáticas significa poder hacer matemáticas: usar el lenguaje matemático con alguna fluidez, hacer problemas, criticar argumentos,

buscar demostraciones y, lo que puede ser más importante, reconocer un concepto matemático en una situación concreta o extraerlo de ella.

Por tanto, introducir conceptos sin un fondo suficiente de hechos concretos, introducir conceptos unificadores cuando no hay experiencia que unificar, o machacar constantemente en los conceptos introducidos sin aplicaciones concretas que estimulen a los estudiantes es peor que inútil: la formalización prematura puede llevar a la esterilidad; la introducción prematura de abstracciones encuentra resistencia especialmente en las mentes críticas, que antes de aceptar una abstracción, quieren saber por qué es importante y cómo podría usarse.

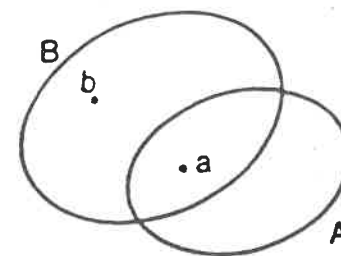
La insistencia de este punto sobre los conceptos matemáticos ligado a lo que se entiende por saber hacer matemáticas es bastante revelador con la perspectiva histórica desde la que hoy lo contemplamos. En el fondo planea la idea que nuestros alumnos suelen expresar, cuando lo hacen, mediante la pregunta: "...y esto ¿para qué sirve?". Más adelante volveremos sobre este punto al tratar de la actividad matemática.

A pesar del aviso sobre la formalización e introducción de abstracciones prematuras el proyecto siguió adelante y así los libros de texto se llenaron de páginas formales y abstractas en el más puro espíritu bourbakista con adhesiones apasionadas como la de Servais, quien en la introducción a su libro *Mathématique*³ (Labor, Bruselas 1968) dice:

"El edificio completo ha de ser reconstruido desde su base y elevado de acuerdo con las ideas modernas. Estas ideas son principalmente la Teoría de Conjuntos."

Lo que sigue es una página del libro de Servais y en ella se demuestra, partiendo de unos axiomas establecidos anteriormente y con el más puro método deductivo de la matemática moderna, el siguiente teorema: *"Si dos rectas diferentes se cortan entonces tienen un único punto en común"*.

Lo primero que llama la atención es que se utilice una ilustración en las que las rectas se convierten en curvas cerradas. La ilustración se utiliza como apoyo al proceso deductivo y uno no tiene más remedio que preguntarse: ¿Qué tipo de alumno reconocería en esa ilustración una abstracción de las rectas en cuestión? ¿Quién sentiría la necesidad de demostrar un hecho tan intuitivo? y ¿Con qué objeto?



Soit A une droite. D'après l'axiome G_3 , elle n'est pas vide. Désignons par a un point de A.

En vertu de l'axiome G_3 , A est une partie propre de π .

Soit b un point qui n'appartient pas à A.

Comme $a \in A$ et $b \notin A$ on a $a \neq b$.

En vertu de l'axiome G_4 , la paire $\{a, b\}$ est contenue dans une seule droite, soit B.

Comme $a \in A$ et $a \in B$ on a $a \in A \cap B$.

L'intersection $A \cap B$ peut-elle comprendre un point c distinct de a?

On aurait dans ce cas

$$a \neq c \quad \{a, c\} \subset A \text{ et } \{a, c\} \subset B$$

D'où en vertu de l'axiome G_4

$$A=B$$

Mais cette égalité est impossible* puisque

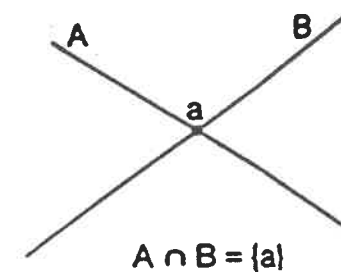
$$b \notin A \text{ et } b \in B.$$

En conclusion, $A \cap B = \{a\}$

DEFINITIONS.

Deux droites qui ont pour intersection un singleton $\{a\}$ sont dites sécantes au point a qui est leur point d'intersection.

Elles se coupent en a.



A pesar de ello, la puesta en marcha de la reforma no se detiene, ni siquiera se revisa. El edificio que se va a construir parece a todas luces lógico y coherente. Si los partidarios son muchos e importantes, las esperanzas son aún mayores.

Sin embargo muy pronto se ve que los resultados aportados por la nueva matemática no son los esperados. Así, el matemático americano Beberman que había participado activamente en la puesta en marcha de un currículo con el enfoque estructuralista se lamentaba en la reunión del N.C.T.M. de 1964:

"Pienso que en algunos casos intentamos responder a preguntas que los estudiantes nunca alcanzarían y resolver dudas que nunca tuvieron. Lo que hicimos fue responder a nuestras preguntas y resolver nuestras dudas".

A finales de los sesenta y principios de los setenta parece claro que la nueva matemática ha sido un fracaso.

Surgen entonces algunas voces en contra del enfoque adoptado, como es el caso de R. Thom⁴:

"Ellos, los bourbakistas, abandonaron un campo ideal para el aprendizaje de la investigación: La geometría euclídea, mina inagotable de ejercicios y la sustituyeron por las generalidades de los conjuntos y la lógica, materiales tan pobres, vacíos y frustrantes para la enseñanza como los que más.

El énfasis puesto por los estructuralistas en la axiomática no es sólo una aberración pedagógica sino también matemática".

Otros hacen un retrato caricaturesco de la situación en que ha quedado el estructuralismo, tal es el caso de P.Hilton en su conferencia plenaria dirigida a los asistentes al III I.C.M.E, celebrado en Karlsruhe (1976) afirma:

"El análisis se construye de forma que parezca un conjunto de trucos, los cuales aprende el estudiante y una vez que esta entrenado en ellos se considera que ha alcanzado el nivel de madurez requerido. Para que el análisis parezca relevante al alumno, se le ofrecen ejemplos acabados, es decir, ejemplos diseñados simplemente para ilustrar las habilidades particulares que el alumno se esfuerza en adquirir"

Hilton hace recapitulación de casi década y media de estructuralismo y su conclusión es casi desesperante: el estructuralismo ha degenerado en el

mecanicismo. Las estructuras matemáticas ricas están muy lejos de los alumnos, las ideas unificadoras tampoco se aprenden, ya ni siquiera se enseñan, al final todo ha quedado en un juego de reglas, carentes de sentido para la gran mayoría de los alumnos.

El estilo MECANICISTA, aludido por Hilton, se caracteriza por la consideración de la matemática como un conjunto de reglas. A los alumnos se les enseña las reglas y las deben aplicar a problemas que son similares a los ejemplos previos.

Raramente se parte de problemas reales o cercanos al alumno, más aún, se presta poca atención a las aplicaciones como génesis de los conceptos y procedimientos ni siquiera como punto de llegada donde mostrar la importancia del conocimiento adquirido y su relación con otras áreas o conocimientos, y si mucha a la memorización y automatización de algoritmos de uso restringido.

El ataque más demoledor a esta planteamiento de enseñanza proviene de H.Freudenthal⁶:

"De acuerdo con la filosofía mecanicista el hombre es como una computadora, de tal forma que su actuación puede ser programada por medio de la práctica

En el nivel más bajo, es la práctica en las operaciones aritméticas y algebraicas (incluso geométricas) y la solución de problemas que se distinguen por pautas fácilmente reconocibles y procesables.

Es en este, el más bajo nivel dentro de la jerarquía de los más potentes ordenadores, donde se sitúa al hombre".

Freudenthal termina su alegato con la siguiente pregunta dirigida a sus propagadores:

¿Por qué enseñar a los alumnos a ejecutar tareas al nivel en el que los ordenadores son mucho más rápidos, económicos y seguros?

Frente a los lamentos o a la vuelta a planteamientos anteriores, es el propio Freudenthal quien en uno de sus libros más importantes, Mathematics as an Educational Task (1973), pretende dar por un lado una explicación racional de por qué se ha producido el fracaso:

Hay abstracciones que no pueden ser captadas por los alumnos pese a ser materializadas.

Se oculta el único elemento con valor didáctico de la materia: el análisis. Así, el alumno se enfrenta con el resultado de este análisis

y debe seguir al profesor que es quien conoce el resultado del mismo y es él quien coloca juntas las piezas analizadas.

La instrucción no debe comenzar con el sistema formal, que de hecho es el producto final, ni con materializaciones de concepto o estructuras nisiquiera con juegos estructurados.

Y por otro lado, propone una posible salida al callejón en que se encuentra la enseñanza de la matemática: *La matemática como una actividad humana.*

Sus argumentos van en contra de presentar la matemática como un producto acabado, lo contrario a esta matemáticas deshumanizada es la **matemática humana en estado naciente**: El estudiante debe reinventar las matemáticas haciéndose con el único valor didáctico de las mismas: **el análisis**. El análisis se debe utilizar para construir los conceptos matemáticos partiendo de los fenómenos reales en los cuales aparecen estos.

Este planteamiento queda resumido en frase de Freudenthal en su libro *Didactical Phenomenology of mathematical structures*:

La fuente para la formación de los conceptos debe ser los "phenomena" por medio de los cuales aparecen tales conceptos en la realidad. Así, el punto de partida han de ser los "phenomena" que solicitan ser organizados y, desde tal punto de partida, enseñar al estudiante a manipular los medios de su organización.

Freudenthal aboga por una actividad matemática o por una matemática activa como base de la enseñanza...pero...

Si la matemática es una actividad...

¿Cuáles son sus principales características?

La matemática como actividad posee una característica fundamental:

La Matematización: *Organizar y estructurar la información que aparece en un problema. Identificar los aspectos matemáticos. Descubrir regularidades, relaciones y estructuras.*

Treffer en su tesis⁷ distingue dos formas de matematización, la matematización horizontal y la matematización vertical.

La matematizacion horizontal, no lleva del mundo real al mundo de los símbolos y posibilita tratar matemáticamente un conjunto de problemas.

Este tipo de actividad tiene su principal característica en la utilización de los procesos de tipo general siguientes:

- IDENTIFICAR las matemáticas en contextos generales
- ESQUEMATIZAR
- FORMULAR y VISUALIZAR un problema de varias maneras
- DESCUBRIR relaciones y regularidades
- RECONOCER aspectos isomorfos en diferentes problemas
- TRANSFERIR un problema real a uno matemático
- TRANSFERIR un problema real a un modelo matemático conocido

La matematizacion vertical, consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones.

De la misma forma, este tipo de matematización se caracteriza por el uso y potenciación de los siguientes procesos generales:

- REPRESENTAR una relación mediante una fórmula
- UTILIZAR diferentes modelos
- REFINAR y AJUSTAR modelos
- COMBINAR e INTEGRAR modelos
- PROBAR regularidades
- FORMULAR un concepto matemático nuevo
- GENERALIZAR

Estas dos componentes de la matematización pueden ayudarnos a caracterizar los diferentes estilos o enfoques en la enseñanza de la matemática y también nos pueden servir como referentes a la hora de evaluar los distintos materiales (sobre todo impresos) que se utilizan en dicho proceso.

Así el estilo mecanicista se caracteriza por una carencia casi absoluta de los dos tipos de matematización. El estilo estructuralista carece del componente horizontal pero cultiva en sobremanera el vertical, pero sin partir de situaciones matematizables sino que su punto de partida es la propia actividad matemática pura.

En este punto, cabría hacernos la pregunta: ¿Qué estilos o enfoques cultivan la componente horizontal?

Hay dos estilos que cultivan esa componente de la matematización y cuya descripción breve paso a exponer:

El estilo **EMPIRICISTA** cuyas características son: toma como punto de partida la realidad cercana al alumno, lo concreto. La enseñanza es básicamente utilitaria, los alumnos adquieren experiencias y contenidos útiles pero carece de profundización y sistematización en el aprendizaje. El empiricismo está enraizado profundamente en la educación utilitaria inglesa.

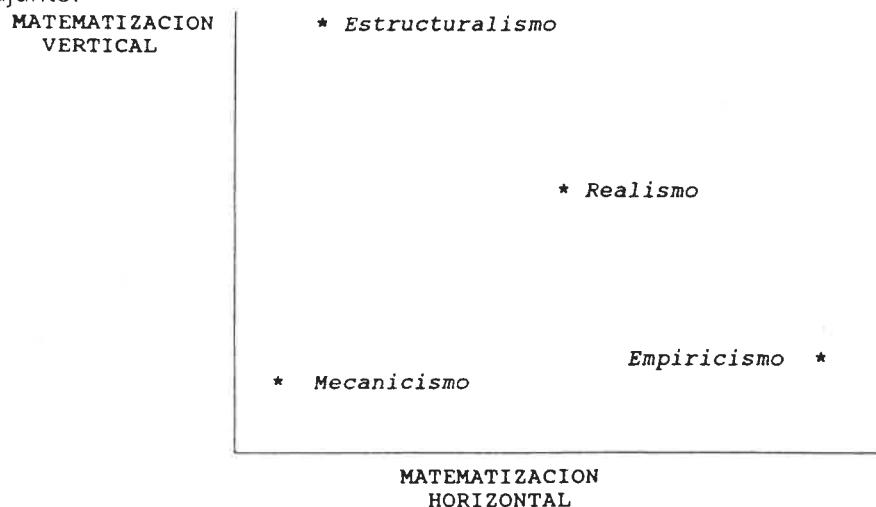
El estilo **REALISTA** parte así mismo de la realidad, requiere de matematización horizontal, pero al contrario que en el empiricista se profundiza y se sistematiza en los aprendizajes, poniendo la atención en el desarrollo de modelos, esquemas, símbolos, etc. El principio didáctico es la

reconstrucción o invención de la matemática por el alumno, así, las construcciones de los alumnos son fundamentales.

Es una enseñanza orientada básicamente hacia los procesos. Este estilo surgió en los Países Bajos partiendo de las ideas de Freudenthal y ha sido desarrollado por Treffers en su proyecto Wiskobas y el grupo OW&OC en sus proyectos⁸ actuales entre los cuales destaca el Hewet para el bachillerato. Sin embargo, no es patrimonio único de sus iniciadores, en algunos trabajos del Shell Centre (Reino Unido) podemos identificar dicho estilo, en concreto muchas de las actividades que constituyen el documento "El lenguaje de funciones y gráficas".

Así, los estilos empiricista y realista desarrollan bastante la componente horizontal pero sólo el último presta atención a la componente vertical, que es casi inexistente en el primero.

Esta descripción podría recogerse, de forma muy simple, en el diagrama adjunto:



Pasemos a analizar la propuesta del currículum de matemáticas de los distintos bachilleratos.

El Currículum de Matemáticas¹⁰ I y II para el bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, comienza con una introducción donde se hace una reflexión sobre el conocimiento matemático como elemento para tratar, explicar, predecir y modelizar situaciones reales y respecto de la naturaleza lógico-deductiva de su versión acabada así como su relación con el proceso de aprendizaje. Entre otras reflexiones se hace la siguiente: "Participar en el conocimiento matemático consiste, más que en la posesión de los resultados finales (...), en el dominio de su "forma de hacer". La adquisición del conocimiento matemático (...) es un proceso lento, laborioso, cuyo comienzo debe ser una prolongada actividad sobre elementos concretos, con objeto de crear intuiciones que son un paso previo al proceso de formalización".

Prácticamente los mismos términos en los que se expresa el punto segundo del manifiesto del año 1962 antes comentado.

El siguiente párrafo de esta introducción establece una cierta conexión entre los saberes, supuestamente adquiridos en la etapa anterior, y los que en ésta etapa se van a desarrollar y potenciar, que son "la capacidad de abstracción, la de razonamiento en todas sus vertientes, la de resolución de problemas, la de investigación y la de analizar y comprender la realidad" así como la adquisición de nuevas herramientas necesarias para el aprendizaje científico dentro del propio Bachillerato como para posteriores estudios científicos y técnicos.

Y para facilitar su consecución el currículum de las matemáticas en bachillerato presenta tres componentes diferenciadas: Los objetivos generales que expresan las capacidades que ha de desarrollar el alumnado, los contenidos o medios que desde la matemática se ponen para lograr esas capacidades y las orientaciones para la evaluación, que sirven además como orientaciones del enfoque de la enseñanza y que pueden dibujar estrategias metodológicas.

Cualquier desarrollo didáctico-metodológico debe contemplar de forma coherente las tres componentes, y parece que sería además deseable mantener también cierta coherencia con la etapa anterior, la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

¿Qué enfoques hay detrás de los objetivos generales de matemáticas?

Para abordar esta pregunta hagamos otra formulación más en consonancia con lo expuesto anteriormente:

¿Qué procesos generales están asociados o desarrollan mejor las capacidades establecidas en los objetivos generales de los bachilleratos?

Comparemos algunos de los objetivos generales de matemáticas en las dos modalidades que presenta el currículum.

OBJETIVOS GENERALES DE MATEMATICAS

CIENCIAS DE LA NATURALEZA

2. APLICAR sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, UTILIZANDOLOS en la interpretación de las ciencias, en la actividad tecnológica y en las actividades cotidianas.

3. Analizar y valorar la información proveniente de diferentes fuentes, UTILIZANDO herramientas matemáticas, para formarse una opinión propia que les permita expresarse críticamente sobre problemas actuales.

5. Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la

adquisición y el manejo de un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos.

1. *COMPRENDER los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que le permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.*

CIENCIAS SOCIALES

1. *APLICAR sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, UTILIZANDOLOS, en particular, en la interpretación de fenómenos y procesos de las ciencias sociales y humanas y en las actividades cotidianas.*

5. *UTILIZAR los conocimientos matemáticos adquiridos para interpretar críticamente los mensajes, datos e informaciones que aparecen en los medios de comunicación y otros ámbitos sobre cuestiones económicas y sociales de actualidad.*

7. *Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos.*

En primer lugar, en el Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, la formulación de los objetivos 2, 3 y 5 destaca la capacidad de matematización como una meta a conseguir a través de las dos matemáticas que configuran este bachillerato. Si los comparamos con los objetivos 1, 5 y 7 del Bachillerato de Ciencias Sociales constataremos algo más que una simple similitud, hay incluso igualdad en la formulación de los objetivos 5 del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y el 7 del de Ciencias Sociales.

En términos similares se expresan los objetivos 2º (Ciencias de la Naturaleza) y 1º (Ciencias Sociales), donde se resalta la capacidad de *"aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas..."* e incluye las cotidianas además de tecnológicas y científicas en el primero y las ciencias sociales y humanas el segundo, respectivamente. Los objetivos 3º y 5º (Ciencias de la Naturaleza) plantean la capacidad de *"Analizar y valorar la información proveniente de diferentes fuentes..."* y *"Expresarse oral, escrita y gráficamente..."* resaltando el hecho de que debe llevarse a cabo en *"situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente..."*.

Estos tres objetivos, de los distintos bachilleratos, hacen un planteamiento explícito de la aplicación de las matemáticas a situaciones susceptibles de ser matematizadas, en los términos expuestos anteriormente.

Cabe entonces hacer la pregunta: ¿Es esto matematización horizontal?

De forma ingenua se podría responder que sí, mas aquí se plantea un problema didáctico importante:

¿Son las aplicaciones el punto de partida para la génesis de los conocimientos matemáticos?

¿O son las aplicaciones el pretexto para la ejercitación del conocimiento adquirido? y si se ha adquirido antes ese conocimiento ¿mediante qué enfoque didáctico se ha realizado esa adquisición?

En el caso del Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza, tenemos una respuesta a estas preguntas si nos fijamos en el primer objetivo general, donde se plantea la comprensión de conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que permitirían desarrollar estudios posteriores más específicos. Un objetivo que también lo fue del programa de la Nueva Matemática y que con el tiempo se mostró difícil de conjugar con el de una matemática útil para la vida diaria y que satisfaga las necesidades culturales del alumnado en general y, en coherencia con la etapa anterior añadiríamos, con puntos de partida concretos y centrados en la actividad y conocimiento del alumnado.

Pero si nos fijamos detenidamente en la formulación de los objetivos anteriores nos encontramos con una intención idéntica en cuanto a la aplicación de los conocimientos adquiridos por el alumnado. Esa aplicación se concreta en una utilización del conocimiento como herramienta y no como génesis o punto de partida para la construcción del propio conocimiento.

Así nos encontraríamos en el segundo caso de los apuntados anteriormente: las aplicaciones como medio para la ejercitación de un conocimiento adquirido. Entonces, ¿Mediante que enfoque se ha adquirido ese conocimiento?

Pasemos pues a los contenidos en nuestra búsqueda de un hilo conductor para el enfoque didáctico de la matemática en el bachillerato.

Esto no lleva a un problema didáctico importante que es el contexto en el cual se desarrolla el aprendizaje.

La matematización horizontal prescribe un contexto general, un fenómeno real o realista que debe ser abordado por los alumnos y utilizado por el profesor para desarrollar el conocimiento matemático. Esto en principio no está en contraposición con casi ningún objetivo general de matemáticas de los distintos bachilleratos, pero si nos fijamos en los bloques de contenidos empiezan los problemas.

¿Qué fenómenos reales y lo suficientemente generales pueden ser organizados por los contenidos del bloque de Geometría?

CIENCIAS DE LA NATURALEZA MATEMATICAS II

GEOMETRIA

- Vectores: introducción al concepto y operaciones a partir del estudio de problemas físicos concretos.

- Aplicaciones del cálculo vectorial a la resolución de problemas físicos y geométricos en el plano y en el espacio. Interpretación geométrica de las operaciones con vectores. Producto escalar, vectorial y mixto.

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACION

1. Transcribir situaciones de las ciencias de la naturaleza y de la geometría a un lenguaje vectorial, utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación a las soluciones.

La finalidad es evaluar la capacidad del alumno para utilizar el lenguaje vectorial y las técnicas apropiadas en cada caso, como instrumento para la interpretación de fenómenos diversos.

El currículum habla de problemas físicos, quizás debería concretar más y aclarar si lo que se propone es utilizar problemas más bien de la Física como punto de aplicación o de partida para la Justificación de tales contenidos.

Esto plantearía un problema de interdisciplinaridad y no dejaría de ser un problema didáctico dentro de las matemáticas del bachillerato.

Las curvas y las superficies admitirían una interpretación como abstracciones matemáticas de situaciones reales pero ¿Qué experiencia tenemos de este tipo de enfoque?, salvo algunas situaciones iniciales motivadoras y que pronto se olvidan para dar paso a un tratamiento del tema desde el enfoque estructuralista más o menos puro.

Sin abandonar este bloque, ¿Qué se desprende de los criterios de evaluación?

En los tres criterios de evaluación se usa el mismo verbo: utilizar. Utilizar un conocimiento ya formado para transcribir, interpretar y resolver problemas. Pero ese conocimiento no se ha construido por medio de esas aplicaciones. Luego la conclusión es que tendremos un enfoque estructuralista con más o menos aplicaciones como eje de la enseñanza. El mayor peligro que se corre aquí, como ya todos sabemos por experiencia del actual bachillerato, es que

el enfoque se transforme y derive hacia el más puro mecanicismo y entonces encajaría aquí la cita anterior de Hilton donde sólo bastaría con cambiar análisis por geometría.

Comparemos los bloques de contenidos de Algebra para las matemáticas de las dos modalidades.

CIENCIAS NATURALES

ALGEBRA LINEAL (MAT.II)

- Estudio de las matrices como herramienta para manejar datos estructurados en tablas y grafos. Operaciones con matrices: suma, producto, cálculo de la inversa. **Interpretación de las operaciones y de sus propiedades en problemas extraídos de contextos reales.**

- Aplicación del estudio de las matrices a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

- Determinante de una matriz: concepto, cálculo y propiedades. aplicados a la resolución de sistemas y al cálculo de productos vectoriales y mixtos para determinar áreas y volúmenes.

CIENCIAS SOCIALES

ALGEBRA (MAT.II)

- Las matrices como forma de representación de tablas y grafos.

- Suma y producto de matrices. **Interpretación del significado de estas operaciones en el contexto de problemas extraídos de la realidad.** Aplicación a la resolución de problemas extraídos de las ciencias sociales.

- Aplicación de las matrices a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

- Iniciación a la programación lineal bidimensional. Optimización de expresiones lineales sometidas a restricciones expresadas por medio de ecuaciones, utilizando métodos gráficos.

En ambos, ver texto anterior, se ha resaltado en negrita una orientación clara de que las operaciones y las propiedades de las matrices han de ser interpretadas en contextos realistas. En el bachillerato de ciencias sociales se hace más hincapié en las aplicaciones y por ello se introduce el tema de programación lineal, algo que no ocurre en el de Ciencias de la Naturaleza, donde se completa el tema de forma clásica con el estudio de los determinantes y su aplicación a problemas de la geometría.

Además ambos bachilleratos contemplan un bloque de contenidos titulado Resolución de Problemas cuya formulación es idéntica y considerado como eje central del aprendizaje de las matemáticas (¿metodología?).

- Selección de estrategias y planificación del trabajo en situaciones de resolución de problemas. Aplicación de recursos técnicos y herramientas matemáticas adecuadas.

Sin embargo, las orientaciones para la evaluación difieren en las Matemáticas II de ambas modalidades, siendo la misma para las Matemáticas I:

9. Organizar y codificar informaciones, seleccionar estrategias, comparándolas y valorándolas, para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, y utilizar las herramientas matemáticas adquiridas.

Se pretende que el alumno utilice **la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas para realizar investigaciones enfrentándose con situaciones nuevas.**

La modelización de situaciones es claramente un símbolo del enfoque realista, caracterizado por los procesos: transferir un problema real a uno matemático o a un modelo matemático conocido (matematización horizontal) y su continuación posible con la puesta en práctica de diferentes modelos, del ajuste de modelos e integración de modelos (matematización vertical).

Sin embargo, estos criterios difieren en las matemáticas II, como se muestra en el cuadro siguiente:

ORIENTACIONES PARA LA EVALUACION

CIENCIAS DE LA NATURALEZA
MATEMATICAS II

8. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.

Se pretende evaluar la madurez del alumno para enfrentarse con situaciones nuevas utilizando la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas.

CIENCIAS SOCIALES
MATEMATICAS II

8. Aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos a situaciones nuevas, diseñando, utilizando y contrastando distintas estrategias y herramientas matemáticas para su resolución.

Este criterio pretende evaluar la capacidad del alumno de utilizar el modo de hacer matemático para enfrentarse a situaciones prácticas de la vida real.

Por un lado tendríamos, para el bachillerato de Ciencias de la Naturaleza, una caracterización de la matemática necesaria para futuros estudios como un tipo de matemática cuyo enfoque es fundamentalmente estructuralista y con un fuerte componente mecanicista. Pero a tenor de lo visto, con amplias posibilidades de desarrollo en el enfoque realista. Hay objetivos de la matemática en este bachillerato, que quizás por atender a una cierta coherencia con la etapa anterior, implican el que se contemplen procesos de matematización horizontal como eje de la construcción del conocimiento matemático.

Para las matemáticas del Bachillerato de Ciencias Sociales tendríamos una caracterización que, si queremos ser precisos, calificaríamos de no-estructuralista y con fuerte componente en procesos de matematización horizontal.

Como conclusión y sin necesidad de entrar en un análisis profundo del curriculum, uno puede interpretar la formulación del mismo de diversas formas y ver de una forma u otra los distintos enfoques antes dibujados. Sin embargo los contenidos específicos de matemáticas condicionan el tipo de enfoque y el desarrollo posterior del mismo. Así, un enfoque inicialmente estructuralista podría derivar en un enfoque mecanicista. Y de igual forma un enfoque inicialmente Realista podría derivar en una mezcla de empiricismo y mecanicismo. Por propia experiencia todos sabemos del peligro del mecanicismo y que de una forma u otra es una tendencia muy fuerte en la que solemos caer con demasiada frecuencia.

¿Qué enfoque y que evolución tendrá el enfoque de las matemáticas en el nuevo bachillerato?

Para responder a esas preguntas habrá que dejar pasar un tiempo y ver como se desarrolla la puesta en práctica de los nuevos bachilleratos, como quedan condicionados por las respectivas pruebas de selectividad y cómo nuestra propia preparación y apreciación de lo que es importante en matemáticas y en su enseñanza dibujan y moldean nuestra actuación en el aula.

REFERENCIAS

1. Varios firmantes: Sobre el plan de matemáticas de enseñanza secundaria, en La Enseñanza de las matemáticas modernas. J Piaget y otros. Alianza Universidad. Madrid, 1978.
2. Fher, H.F. New thinking in school mathematics. O.E.E.C. París, 1.961.
3. Servais, W. Mthematique. Labor, Bruselas, 1.968.
4. Thom, R. Modern Mathematics: Does it exist ?, en Howson , A.G. editor, Developments in Mathematics Education, Cambrigde, 1973.
5. Hiltón, P. Education in Mathematics and Science Today : The spread of False Dichotomies, in: Proceedings of ICME 3, Karlsruhe, 1.976. pp. 75-97.
6. Freudenthal, H. Revisting Mathematics education. Kluwer. Dordrecht. 1.991.
7. Treffers, A. Three dimensions, a model of theory and goal description in mathematics instruction - The Wiscobas project. Reidel, dordrecht. 1.9486.
8. Grupo OW&OC. Las matemáticas en la enseñanza secundaria. Documentos didácticos. I.C.E. de la Universidad de Salamanca. Salamanca, 1.989.
9. Shell Centre. El lenguaje de funciones y gráficas. M.E.C. y Servicio editorial de la Universidad del Pais Vasco. Bilbao. 1.990.
10. Curriculum de Bachillerato. Real Decreto 1179/1992, B.O.E. 253. Madrid. 1.992.

MESA Nº 3

MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD

Coordinador/Ponente: D. Agustín de la Villa

Secretario: D. José Cobos Bueno

MESA 3. MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD

LAS MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD: SUS ASPECTOS ESTETICO Y PRACTICO

D. Agustín de la Villa, Catedrático de E.U. del ICAI-ICADE, Madrid

Esta ponencia se ha estructurado en tres partes. En la primera se analizan algunos aspectos generales sobre las Matemáticas. En la segunda se presentan diversas perspectivas sobre la enseñanza de las Matemáticas en la Universidad. Finalmente se hacen unas breves reflexiones sobre el uso del ordenador como herramienta didáctica.

1. ALGUNOS ASPECTOS GENERALES SOBRE LAS MATEMATICAS

1.1. Introducción

En muchas épocas el pensamiento matemático ha sido considerado como modelo de conocimiento, pero la Matemática como toda actividad está sujeta a modas, corrientes, etc. y participa de los vaivenes históricos con momentos de toda índole: eufóricos, de incertidumbre, etc. Incluso los momentos de confusión han servido para cambiar el rumbo o atacar con nueva artillería viejos problemas. Una pincelada de optimismo sobre el pensamiento matemático la da Bourbaki en "L'architecture des Mathematiques" diciendo: *"Creemos que la Matemática está destinada a sobrevivir y que jamás tendrá lugar el derrumbamiento de este edificio majestuoso por el hecho de una contradicción puesta de manifiesto repentinamente, pero no pretendemos que esta opinión se base sobre otra cosa que la experiencia. Es poco, dirán algunos. Pero desde hace 25 siglos los matemáticos tienen el hábito de corregir sus errores y de ver así su ciencia enriquecida, no empobrecida. Esto les da el derecho de arrostrar el porvenir con serenidad"*.

1.2. Matemáticas: arte y herramienta.

Hoy en día la matematización del pensamiento es dogma, siendo tendencia en todas las áreas de conocimiento, para aumentar la credibilidad y prestigio, revestir natural o forzosamente dichas ciencias de estructuras matemáticas. Se están hiperutilizando las Matemáticas.

El aspecto artístico de las Matemáticas entendiendo como arte la producción de algo bello es evidente aunque pueda resultar extraño para alguien que las desconozca. Dicho placer es un placer activo, para gozar de él es necesario, en cierto modo, crearlo. Para una persona ajena al mundo matemático suenan raras dichas afirmaciones. Citemos para corroborarlo una frase de Poincaré: *"Puede extrañar el ver apelar a la sensibilidad a propósito*

de demostraciones matemáticas que, parece no pueden interesar más que a la inteligencia. Esto sería olvidar el sentimiento de belleza matemática, de la armonía de los números y las formas, de la elegancia geométrica. Todas las verdaderas matemáticas conocen este sentimiento estético real".

Las afirmaciones anteriores no dan carta blanca a las Matemáticas y a los matemáticos para justificar cualquier cosa. Hay ciertos hechos concretos de la Matemática donde las cosas no son bellas: resultados feos, teoremas ciertos pero con demostración farragosa, nacimiento de teorías desprovistas de belleza, etc. John Von Neuman en su artículo "The Mathematician", advierte de los peligros del uso **indiscriminado** de todo por la belleza con la frase: "A medida que una disciplina matemática se separa más y más de su fuente empírica o aún más si está inspirada en ideas que provienen de la realidad de un modo sólo indirecto, como de segunda o tercera mano, está más cercada por graves peligros. Se va haciendo más y más esteticismo puro, se convierte más y más en un puro arte por el arte. Esto no es necesariamente malo si el campo en cuestión está rodeado de otros campos relacionados con el que tengan todavía conexiones empíricas más cercanas, o si la disciplina en cuestión está bajo la influencia de hombres dotados de un gusto excepcionalmente bien desarrollado. Pero existe un grave peligro de que este campo venga a desarrollarse a lo largo de las líneas de menor resistencia, de que la corriente, tan lejos de su frente, venga a disgregarse en una multitud de ramas insignificantes y de que la disciplina venga a convertirse en una masa desorganizada de detalles y complejidades. En otras palabras, a gran distancia de su fuente empírica, o bien después de mucha incubación abstracta, un campo matemático está en peligro de degeneración".

Que la Matemática es **útil** es innegable, aunque estuviese incluso mal vista esta utilidad en ciertas épocas de la historia. Incluso el análisis matemático ha sido el embrión de la física moderna y posteriormente ha dado lugar a la **matematización** de toda ciencia.

La filosofía general de actuación en el terreno de la matemática aplicada debe regirse conforme a las siguientes pautas:

- a) La observación del mundo real o de los hechos concretos.
- b) Abstracción de las ideas que se consideren más destacadas, lo que da lugar a la construcción de un mundo mental (teoría matemática), de entre todos los posibles.
- c) Algunos hechos del mundo real son explicados, posteriormente por algunas de las teorías matemáticas que, aparentemente, se mostraban alejadas de la realidad.

Parece también claro que hay una razón íntima y filosófica de la existencia de la matemática aplicada. Sin entrar en detalles citaremos dos frases que enfatizan dicha afirmación:

N. Bourbaki en **L'architecture des mathématiques** : "Que existe una relación íntima entre los fenómenos experimentales y las estructuras matemáticas parece confirmarse plenamente de la forma más inesperada mediante los descubrimientos más recientes de la física contemporánea. Pero no sabemos absolutamente nada sobre los fundamentos de este hecho (suponiendo que se pudiera encontrar realmente significación a estas palabras) y tal vez no lleguemos a saber nunca sobre ello".

E.P. Wigner en el artículo **The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences** : "el milagro de la adecuación del lenguaje de la matemática para la formulación de las leyes físicas es un don maravilloso que ni entendemos ni merecemos. Deberíamos mostrarnos agradecidos por él y esperar que permanecerá siendo válido en la investigación futura y que se extenderá, para bien o para mal, para placer nuestro aunque también tal vez para nuestra perplejidad, a ramas más amplias del saber"

1.3. Dificultades de las Matemáticas.

Las afirmaciones anteriores ofrecen un aspecto cuasi idílico de las Matemáticas. Por otra parte la matemática es una disciplina más simple que otras como física, ingeniería, etc.

Sin embargo la gente se queja de la dificultad para dominarlas y suele aborrecerlas a pesar del interés que a priori deberían despertar por su aplicabilidad en casi todos los aspectos de la vida.

La paradoja anterior se puede en parte explicar por una serie de dificultades:

• Dificultades superficiales: Entre ellas se pueden enumerar:

- El vocabulario, ya que hay palabras "raras" sólo utilizadas en matemáticas. Esta dificultad hace que haya que aprender el "idioma".
- Uso de símbolos, aunque esto no implica dificultad de los conceptos que se estudian.
- Estudio de abstracciones, aunque tomadas de experiencias ordinarias y por ello se deberían retener fácilmente.

• Dificultades metodológicas:

La educación elemental, secundaria y superior tienen por finalidad prepararnos en la vida y es mucho lo que hay que aprender en el curso de una preparación adecuada para las necesidades de la sociedad moderna. El orden en que son presentadas las asignaturas y las materias dentro de los diferentes campos del saber, así como el ritmo de la educación, están encaminados a asegurar esta preparación. Sin embargo, un entrenamiento eficiente para la vida puede requerir el sacrificio de la comprensión, al menos en matemáticas. La falta de tiempo para impartir los tópicos matemáticos necesarios conlleva a una exposición densa de estos, a veces la elección de los

contenidos no es la idónea y tampoco lo es la didáctica empleada en su transmisión, con lo que los estudiantes en general "aborrecen" las Matemáticas. El profesor Miguel de Guzmán resume las ideas anteriores con la frase *"la incapacidad confesada para las matemáticas de muchas personas altamente cultivadas, competentes en otras actividades y profundamente inteligentes, se debe sobre todo a un bloqueo psicológico inicial originado por los métodos equivocados de enseñanza"*.

2. LAS MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD

Restringiéndonos a las disciplinas de Matemáticas a impartir en la Universidad haremos unas breves reflexiones sobre:

- Las Matemáticas preuniversitarias que son el peldaño anterior a las matemáticas universitarias.
- Diversas concepciones de las Matemáticas en la Universidad, lo que debería implicar distintas estrategias docentes.

2.1. Las Matemáticas Preuniversitarias.

Cuando uno se enfrenta a la confección de un programa de cualquier asignatura en el primer curso de la Universidad parecería que dicho programa fuese la prolongación natural de su formación en la enseñanza secundaria y dicha formación fuese la cúspide de la pirámide: enseñanza primaria, enseñanza secundaria y universitaria.

La aseveración anterior es una utopía en general. Las matemáticas preuniversitarias, por las dificultades antes apuntadas, suelen ser asignaturas muy difíciles, a veces odiosas, que ejercen de fuerte barrera y a veces de única balanza para la difícil decisión de los estudiantes entre las carreras de "ciencias" y "letras".

Esto podría paliarse en parte si el nuevo bachillerato intentase mejorar la adecuación entre la salida de la enseñanza secundaria y del ingreso en la Universidad. Sugerencias en este sentido fueron hechas por un grupo de profesores de la UPM donde se enumeraban unas consideraciones generales de acceso a la Universidad, y consideraciones específicas de cada materia básica: Matemáticas, Física, Dibujo, etc.

En relación a las matemáticas, algunas de las sugerencias generales a tener en cuenta para la elaboración del curriculum fueron:

- Las Matemáticas deben formar parte de los planes de estudio del bachillerato por lo provechoso y útil que pueden resultar a los bachilleres.
- Los conocimientos que, sobre Matemáticas y otras muchas materias, deben adquirir los alumnos, no han de ir más allá ni de lo estrictamente necesario ni de lo razonadamente posible.

- Pensando en los estudios universitarios, los programas de bachillerato deben abordar exhaustivamente, en profundidad, aquellas cuestiones básicas que, después, servirán de soporte firme y seguro.
- Las cosas no hay que enseñarlas ni antes de lo necesario ni antes de que puedan ser entendidas y apreciadas.

Los objetivos de las Matemáticas, fundamentalmente, son: adquisición de destreza en el cálculo de lo intuitivo a lo abstracto a lo largo de los dos cursos.

Los contenidos que se proponen consisten a grosso modo, en hacer más hincapié en la Geometría y hacer un análisis más intuitivo.

Un problema añadido es la posible procedencia de Formación Profesional de estudiantes para diversos estudios (Escuelas Universitarias) lo que en general conlleva una mayor deficiencia de dichos alumnos en la formación matemática necesaria.

Por todo ello, al elaborar un programa de cursos básicos de matemáticas en la Universidad es necesario un paso previo: saber lo que conocen los estudiantes y no fiarse de lo que deberían conocer, ya que de lo contrario podría conducirnos al fracaso.

2.2. Ideas generales sobre las Matemáticas en la Universidad.

El profesor de cualquier disciplina de matemáticas debería tener en cuenta las siguientes consideraciones generales sobre las matemáticas, a saber:

- Las matemáticas sirven como lenguaje mediante el cual es posible expresar de forma concreta contenidos científicos.
- Son un instrumento muy útil como manipulación de lo cuantitativo, es decir, son una herramienta mediante la cual se procesa el conocimiento cuantitativo de los fenómenos.
- Son un instrumento útil en la comprensión de muchos aspectos cualitativos, es decir, un medio para dar visiones sintéticas de fenómenos complejos.
- Son un almacén conceptual para organizar el conocimiento.
- Proporcionan la posibilidad de transmutar la extensión en comprensión, es decir, de reunir bajo un paradigma común muchos hechos científicos difíciles de retener por sí mismos en base a su multiplicidad de características propias.
- Proponen nuevos campos de exploración de la realidad, ante la posibilidad de predecir, en cualquier modelo matemático, realidades que no se hallaban a la vista directamente en la situación original.

Respecto a la **forma de impartir** la disciplina hay dos opciones extremas que conjugan los vocablos nivel y rigor, formalismo e intuición.

En cualquier disciplina de Matemáticas es fundamental proporcionar una formación sólida, basada en el desarrollo de una teoría que se asiente sobre una base rigurosa.

El exceso de formalismo (teorema-demostración-lema-corolario-etc) o la mera recopilación de fórmulas, recetas para ejercicios y problemas son los dos extremos, ambos en general perniciosos.

Los contenidos en general se acomodarán a las necesidades del auditorio (tipo de estudiantes), aunque en general la Matemática como ciencia dependiente del momento histórico deberá adaptar su contenido. Por ejemplo la matemática de los siglos XIX y XX ha sido, predominantemente, la matemática de lo continuo en la que el Análisis, a causa de la potencia y repercusión que tiene en las aplicaciones técnicas, ha jugado un papel predominante. La llegada de los ordenadores, con su capacidad de cálculo y representación gráfica, así como su posibilidad para la modelización sin pasar por formulaciones matemáticas de tipo clásico, ha abierto una gran cantidad de campos diversos con origen en la Física y en todas las ciencias: Economía, Biología, Ingeniería, etc., en general, ciertos problemas de los cuales eran difíciles de resolver por las ingentes masas de información a tratar. Por otro lado, el acento en los algoritmos discretos, usados en las ciencias de la Computación, en la Informática, y en la modelización de diversos fenómenos mediante el ordenador, ha dado lugar a un traslado del énfasis de la matemática actual hacia la matemática discreta.

Con respecto a los tipos de matemáticas, en general se habla de **matemática pura y aplicada**, pero esta clasificación apresurada puede dar lugar a equívocos. En primer lugar, no existe rama de la Matemática, por muy abstracta que resulte, que tarde o temprano no encuentre aplicación en un terreno práctico. Tómese como ejemplo la Geometría Riemanniana, creada como fin en sí misma en sus inicios, y sustento teórico de la Teoría de la Relatividad General posteriormente. Por otra parte, la rama conocida como Matemática Aplicada, y en concreto el Análisis Numérico, desarrollada en el marco teórico y riguroso del Análisis Real de una y varias variables, proporciona los fundamentos teóricos del Cálculo Numérico.

Lo que si debemos tener en cuenta son las **actitudes y motivaciones** ante las matemáticas.

Las motivaciones que inspiran la actividad matemática son diversas en el mismo individuo o en personas diferentes. Por ejemplo, las raíces en la realidad física de una gran parte de las matemáticas, especialmente del análisis, constituyen ciertamente una poderosa fuente de motivación e inspiración. La situación con respecto a otros campos de la realidad no es muy diferente. En teoría de números y en álgebra, esta motivación la da la realidad misteriosa del mundo de los números, tan profundamente inherente a la mente humana.

Las matemáticas han de tomar su motivación de lo concreto y específico y han de apuntar de nuevo a algún nivel de realidad. El vuelo hacia la abstracción debe ser algo más que un mero escape. El despegue del terreno y el aterrizaje son ambos indispensables, aun cuando no sea el mismo piloto el que maneje todas las fases de la trayectoria. La sustancia del proyecto matemático más puro puede a menudo ser proporcionada por la realidad física tangible. El hecho de que las matemáticas, una producción emanada del espíritu humano, sirvan con tanta eficacia para la descripción y comprensión del mundo físico es intrigante y ha atraído, con razón, el pensamiento de los filósofos. Dejando aparte cuestiones filosóficas, la preocupación por cuestiones físicas o la aparente ausencia de ella no deben ser consideradas como un criterio para distinguir entre diversas clases de matemáticas y de matemáticos. En resumen no se puede trazar una línea divisoria estricta entre matemáticas puras y aplicadas.

Aunque el contenido de las matemáticas sea indivisible es necesario reconocer claras diferencias entre las actitudes que el mismo científico o científicos diferentes pueden adoptar ante un problema. La actitud del **purista** que todo espíritu científicamente inclinado asumirá por lo menos algunas veces, exige perfección sin compromisos. En la solución de un problema no pueden permitirse lagunas o pasajes toscos y el resultado debe fluir a través de una cadena ininterrumpida de razonamientos sin tacha. Si es que este intento halla obstáculos insuperables, entonces el purista se siente inclinado a renunciar a su problema o a sustituirlo por otro en el que las dificultades puedan ser vencidas. Puede incluso resolver su problema redefiniendo lo que entiende por solución. Esto es de hecho un paso preliminar no infrecuente hacia una verdadera solución del problema original.

En el caso de la **investigación aplicada la situación es diferente**. El problema, en primer lugar, no puede ser modificado o evitado tan libremente como antes. Lo que se necesita es una respuesta verosímil, con cierta garantía humana. Si es necesario, por consiguiente, el matemático ha de aceptar un cierto compromiso. Debe estar dispuesto a introducir conjeturas en su razonamiento lógico y a permitir ciertas incertidumbres con respecto a la evidencia numérica. Pero aun en el estudio más profundamente motivado por la práctica, por ejemplo, el análisis del flujo con discontinuidades producidas por choques, puede requerir investigaciones matemáticas fundamentales a fin de descubrir el modo de enmarcar la cuestión. Demostraciones de mera existencia pueden también ser significativas en investigación aplicada. La garantía de que existe una solución puede proporcionar la garantía necesaria de la adaptabilidad del modelo matemático. Finalmente, las matemáticas aplicadas están dominadas por la aproximación. Estas son inevitables cuando se intenta reflejar procesos físicos por medio de modelos matemáticos.

En la mayoría de las ocasiones puede ser muy difícil discernir entre la frontera: **purista y aplicado** ya que los avatares más insospechados pueden hacer pasar de uno a otro, incluso la matemática pura ha tenido grandes aplicaciones prácticas y la matemática aplicada ha sido fuente y embrión de importantes teorías matemáticas.

2.3. Matemáticas para " Matemáticos".

Independientemente de los contenidos, el carácter artístico, el placer estético son elementos primordiales en las Matemáticas que debemos impartir a los futuros licenciados en Matemáticas. Enseñar a nuestros alumnos a gozar demostrando teoremas, intuyendo demostraciones, inventando teorías, es una labor primordial en la didáctica de las Facultades de Matemáticas.

Al ser el estudio de las Matemáticas un fin para estos estudiantes un objetivo didáctico importante a que aprendan a **amar** las Matemáticas. Para ellos la Matemática debe ser, ante todo, saber hacer, es una ciencia en la que el método debe predominar sobre el contenido.

Debemos intentar construir un edificio matemático **bonito** prescindiendo, si es necesario, de parte de su utilidad o **funcionalidad**.

2.4. Las Matemáticas en otras Ciencias.

Cualquier curriculum universitario debería regirse por estos dos principios:

1. La Universidad ha de suministrar al universitario los conocimientos que su inmediata incorporación al trabajo le van a exigir. En consecuencia, los programas universitarios han de adaptarse a las necesidades actuales de la sociedad.

2. La formación del universitario ha de ser científica y deben suministrarse a los estudiantes conocimientos superiores a los que la sociedad exigiría desde un planteamiento puramente formal.

Los principios anteriores marcan el camino a seguir en la enseñanza universitaria, particularmente en la enseñanza de las Matemáticas. Por ello, la Matemática no debe aislarse del resto de las ciencias, sino formar un sistema integrador de varias disciplinas. Sólo si se alcanza este objetivo en la enseñanza universitaria se logrará consolidar la misión de la Universidad en la sociedad, ser la innovadora de los conocimientos, evitando así el estancamiento científico y técnico.

Para conseguirlo se enumeran unas posibles pautas a seguir:

-El nivel de conocimientos que el alumno reciba a través de la enseñanza universitaria debe permitirle adoptar una postura crítica y creativa ante un problema dado, disponer de las herramientas de razonamiento necesarias para su resolución. La estrechez de miras en la transmisión de conocimientos podría ser una grave enfermedad de la enseñanza universitaria.

-Aprenderse la respuesta de un problema no proporciona una idea cabal del proceso de resolución, ya que siempre queda pendiente algún paso, a partir del cual se generarán varios interrogantes. El estudiante identifica este importante paso al reflexionar sobre la forma en que se llega a la solución del problema. Por ello, la docencia debe potenciar el criterio propio del alumno, fomentar su capacidad de razonamiento, conduciéndole a manejar diferentes teorías y métodos motivándole a aceptarlos o rechazarlos apoyándose en la razón.

-Los avances científicos exigen al universitario la capacidad de reciclar sus conocimientos constantemente, a la vez que una sólida formación de base; este debe ser un objetivo a cumplir. Este esquema tan dinámico de educación continua hace que deba poseer una sólida formación científica de base. El ordenador puede servirnos de gran ayuda en dicho reciclaje.

-Existe una acuciante necesidad de nutrir la enseñanza con un adecuado marco de conocimientos, pues las nuevas aportaciones al conocimiento humano crecen a un elevado ritmo y sus aplicaciones son complejas y diversas.

En consecuencia el profesor debería poseer una comprensión global de la asignatura y de las potenciales aplicaciones de la materia impartida. Con ello podrá confeccionar un programa completo que aúne la formación y la compilación, consiguiendo así impartir selectivamente y con profundidad conceptual el contenido del temario.

Esto implica que:

- El profesor debe dar una matemática teniendo en cuenta que para estos estudiantes las asignaturas de matemáticas son un medio y no un fin para sus estudios. Son, en definitiva, **asignaturas de servicio**.

- En las asignaturas de Matemáticas, se debe realizar previamente un trabajo de campo para saber qué tópicos de Matemáticas se necesitan y después transmitirlos con un carácter formativo-informativo.

– Se debe dar una matemática distinta para cada ciencia al ser distintas sus exigencias. Incluso los mismos tópicos se deben explicar de forma distinta dependiendo del público al que van dirigidos (esto no suele ser norma en los actuales planes de estudio ya que, por ejemplo, se imparten “casi” las mismas matemáticas en todas las ingenierías, sin diferenciar sus particularidades). Se debería construir un edificio funcional, con unos sólidos cimientos matemáticos, antes que bello, aunque mucho mejor que sea bello.

Un handicap añadido es que los estudiantes, en general, demuestran poco entusiasmo hacia las matemáticas ya que no son el objetivo primordial de sus estudio y no las estudian por sí mismas.

Sin una buena estrategia docente, los estudiantes pueden sacar la equivocada idea de que las Matemáticas están puestas en sus estudios como tapón o barrera sin ninguna utilidad posterior. Dicha estrategia pasa, en general, por enseñar a analizar una situación concreta en términos abstractos, es decir, a modelar una situación. Los tres aspectos imprescindibles de una modelización son:

1) Formulación del problema en términos matemáticos. Para poder llegar a esta formulación, es preciso conocer en profundidad la realidad física o económica subyacente al problema que se desea resolver. En esta fase se elige el modelo matemático más apropiado al problema, es decir, se toman las variables adecuadas y se plantea el problema matemático a resolver. Una de las dificultades con que nos hallamos al pasar el problema al lenguaje apropiado es la necesidad de efectuar simplificaciones sobre el problema original, y aquí es donde se debe discriminar con certeza las magnitudes que pueden ser despreciadas y las que deben ser tenidas en cuenta.

2) Resolución del modelo matemático. En esta etapa se contempla la aplicación de las Matemáticas en el sentido más directo, así como la teoría que nos permite efectuar esta aplicación correctamente. Es el momento de aplicar la técnica más apropiada de la cual se tenga conocimiento para resolver el problema propuesto, incluso en muchos casos mediante métodos numéricos aproximados.

3) Interpretación y análisis de los resultados obtenidos. Para dar sentido a todo lo que se ha realizado, se deben interpretar los resultados mediante el conocimiento del fenómeno físico económico que se pretende modelar, contrastando si los resultados obtenidos son compatibles con éste y con las hipótesis

efectuadas sobre el mismo. Si los resultados no están conformes con la realidad, se deberá rehacer el modelo.

La forma de impartir las clases pueden variar desde lo intuitivo a lo formalista dependiendo de cada contexto particular.

3. EL ORDENADOR EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

La aparición del ordenador fue aprovechada inicialmente, en Matemáticas, en la disciplina de Cálculo Numérico. Cálculos tediosos, en los que eran precisas muchas operaciones sencillas se pueden abordar, más o menos sencillamente, con el ordenador.

Las capacidades gráficas de los paquetes de cálculo simbólico (DERIVE, MATHEMATICA, MAPLE, etc.) y la disminución de la memoria requerida para que corran dichos paquetes hacen que se pueda considerar al ordenador como un elemento a considerar en la enseñanza de las Matemáticas de igual o mayor importancia que la pizarra y la tiza.

Ejemplos de la utilización del ordenador son dos comunicaciones de esta mesa:

- Estudio de las superficies mediante el uso de transparencias.
- Autoaprendizaje de los conceptos básicos del álgebra lineal utilizando software realizado en Authorware profesional.

Está claro que el ordenador existe y negar esta realidad es negar la evidencia. El problema surge cuando se pretende dar al ordenador otra misión que no sea la de una **calculadora** rápida y potente. Si se tiene que tomar partido soy firme partidario del uso del ordenador en la enseñanza reglada de las Matemáticas no sólo como **herramienta** sino también aprovechando su carácter **formativo**.

El uso como herramienta permite dedicar menos tiempo a cálculos rutinarios para analizar con mayor profundidad conceptos y resultados, lo que implicaría un cambio en la filosofía de la enseñanza.

El ordenador, en determinados campos abre la posibilidad de **experimentar** (realizar gráficas “parecidas” cambiando las condiciones o suprimiendo algunas hipótesis, “ver” como se aproxima el polinomio de Taylor a una función, etc) con lo que se pueden reforzar los conocimientos adquiridos.

Hay otra razón de peso a favor de la introducción del ordenador: a los estudiantes les gusta, se enganchan fácilmente al uso del ordenador, con lo cual, la asignatura de Matemáticas, aburrida y desmotivada en la mayoría de las ocasiones, es vista desde una óptica más optimista. También debemos facilitarles el trabajo en el uso del ordenador haciéndolo atractivo desde el principio; para ello existe la posibilidad de la elección de paquetes de software sencillos y la **confección de manuales de uso simplificados** que permitan la menor pérdida de tiempo en *entender* el funcionamiento del programa.

Las prácticas con ordenador podrían ser un mezcla de dos tipos: *Repetitivas* (manejos de las teclas) como por ejemplo hallar la derivada segunda de..., calcular la integral de... y *creativas* (¿qué pasaría si?) como por ejemplo estudiar si tiene asíntotas una curva, analizar el comportamiento de una función a través de su gráfica, etc.

Obviamente, el uso del ordenador tiene sus peligros. No puede usarse indiscriminadamente **para todo** y que el estudiante piense que todo problema matemático se reduzca a Inputs y Outputs sin detenerse a analizar el proceso seguido.

4. CONCLUSIONES

En la enseñanza de las Matemáticas en la Universidad deberíamos tener en cuenta:

- La situación de la matemática preuniversitaria.
- El auditorio, lo que implica la preponderancia del aspecto artístico o útil de la matemática.
- Realizar una estrategia docente que nos conduzca si se puede a: "Hacer bello lo útil y hacer útil lo bello".
- La potenciación del uso del ordenador como recurso didáctico.
- La Didáctica de las Matemáticas es muy NECESARIA en la Universidad.

REFERENCIAS

ACTAS de las Primeras jornadas sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Universitarias ". Sedano (Burgos) 26 al 28 de Marzo de 1992.

ACTAS de la jornada: Planes de Estudio y Calidad de las Enseñanzas Universitarias. ICE de la UPM. Madrid 1991.

FERNANDEZ, M.-SARABIA, A- VILLA, A de la: " Simulation and animation: Tools for the improvement of teaching and learning ". Proceedings del Symposium Ingenieurpädagogik 92 (IGIP).

FERNANDEZ, M.- VILLA, A de la: " Impact of computers in technical studies " Proceedings of the Ninth Conference of Technology and Education " Paris Marzo de 1992.

GUZMAN, M de: " Temas metamágicos". Investigación y Ciencia. Febrero 1983. Informe acerca del contenido del libro: Bachillerato: Estructura y contenido". ICE de la UPM. Madrid 1991.

MATE, C. -SARABIA, A. -VILLA, A. de la : "Mathematics with the computer: Some practical examples " Proceedings of IGIP 91. Dresden Septiembre 91.

Matemáticas en el mundo moderno. Editorial Blume 1974.

MESA Nº 4

MATERIALES Y RECURSOS

Coordinador/Ponente: D. José M. Gairín Gallán

Secretario: D. Arturo Mandly MansoBLANCA

MESA 4.- MATERIALES Y RECURSOS

SELECCION Y EMPLEO DE MATERIALES A LA ENSEÑANZA- APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

*D. Jose M. Gairín Gallán. Profesor de Didáctica de las Matemáticas de la
Escuela Universitaria de Magisterio de Zaragoza*

INTRODUCCION

Existe una larga tradición en el empleo de materiales para favorecer y facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas avalada por nombres tan conocidos como Dienes, Piaget, Puig Adam, Castelnuovo, Gattegno, Cuissenaire, etc... En estos momento las referencias a los materiales también las podemos encontrar en informes como el Cockroft (1985) y documentos oficiales como los del M.E.C. (1989). En todos los casos se mantiene la constante de que el trabajo práctico es fundamental para el estudio de las Matemáticas

Pero en el momento de organizar la asignatura es el profesor (de forma individual o colectiva), el que tiene que afrontar el trabajo de plasmar estas recomendaciones. Y, entre otras tareas, tendrá que elegir los materiales que va a emplear, decisión que puede tomar en dos sentidos: seleccionar alguno de los existentes o diseñar uno nuevo.

En este trabajo se revisan las posturas y actuaciones del profesorado respecto a los materiales. Posteriormente, y a través de la reflexión sobre las funciones que tienen asignados los mismos en las educación matemática, se perfilan las recomendaciones a los profesores y a otras entidades u organismos en orden a facilitar las tareas de selección y empleo de materiales.

1. LOS MATERIALES Y SU UTILIZACION: ESTADO ACTUAL

Bajo la acepción de material para la educación matemática se tiende a pensar solamente en los objetos de tipo manipulativo, pero pensamos que su significado es más amplio. Así que para precisar la terminología, el sentido que damos al término **material** es el mismo que le otorga Gimeno (1991), es decir, *"cualquier instrumento u objeto que pueda servir como recurso para que mediante su manipulación, observación o lectura se ofrezcan oportunidades de aprender algo, o bien con su uso se intervenga en el desarrollo de alguna función de la enseñanza"*.

En esta concepción amplia queda englobado todo un mundo de elementos que ayudan al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y que acoge objetos como los siguientes:

Materiales impresos como libros de texto y otros documentos que intenten desarrollar y acercar a los profesores y alumnos las propuestas del Diseño Curricular, ejemplificaciones en las que se plasman propuestas concretas en situaciones prácticas de clase, materiales temáticos que a partir de un tópico determinado (o un centro de interés para el alumno), muestran la forma de adquirir ciertos conocimientos puntuales, colecciones de problemas e investigaciones que sirvan de punto de partida al trabajo en el aula, cuadernos de trabajo de los alumnos, documentos dedicados a la popularización de las matemáticas, escritos sobre la denominada matemática recreativa, etc....

Materiales manipulativos o didácticos sobre los que actúan directamente los alumnos transformándolos con la ayuda de sus manos y en los que se incluyen recortables, troquelados, puzzles, mecanos, polícubos, estructuras espaciales, los juegos educativos matemáticos, etc.... También tienen cabida en esta denominación otros objetos como el llamado **material inespecífico** (fichas, palillos, canicas, chapas, gomas, ...); los **soportes materiales** (como cartón, papel, plástico, ...); los **instrumentos para la transformación** (como tijeras, punzones, pegamento,); etc

Calculadoras y ordenadores

Medios audiovisuales o materiales que sirven de soporte para presentar información, como video, transparencias, pizarra, rotafolios, etc...

Esta recopilación se ha propuesto sin ánimo de establecer clasificación alguna de los materiales, sino para proporcionar ejemplos que clarifiquen su significado. Es más, entre los materiales que se han citado no se ha querido establecer diferencias entre los que utiliza el profesor y los que emplean los alumnos. En todo caso, las reflexiones que hagamos seguidamente serán aplicables a los materiales de uso de los alumnos.

El incremento en la utilización de materiales en las clases de Matemáticas es un hecho que hemos constatado personalmente, aunque también hemos advertido que el currículum escolar se sigue engranando en torno al libro de texto, y que hay profesores que desarrollan su actividad apoyándose sólo en la pizarra, la tiza, el papel y el lápiz. En cualquier caso, y de forma más o menos consciente, el profesor ha tomado una decisión sobre el material que va a emplear.

Pero dejando al margen juicios basados en la intuición personal, a través de investigaciones como las de Area (1991) y de Hiebert y Carpenter (1992) disponemos de una visión más general acerca de las actuaciones de los profesores en cuanto a la selección, empleo y adecuación de materiales para la educación matemática. Las recogemos de forma sintética:

1.1.- ¿Cómo seleccionan los materiales los profesores?

- Los profesores suelen invertir poco tiempo en tareas de elaboración, selección y organización de los materiales de enseñanza, recibiendo muy poca información y asesoramiento por parte de los equipos de apoyo de la administración.

- Para disponer de información sobre materiales novedosos los profesores recurren, fundamentalmente, a comentarios y sugerencias de sus compañeros.

- Los profesores manifiestan que las nuevas tecnologías son valiosas y necesarias, pero se sienten más cómodos y seguros con el material tradicional, aunque son conscientes de que tendrían que adaptarse y complementarse con otros materiales.

- Los criterios prioritarios que aplican los profesores para elegir un determinado material son: su grado de adaptabilidad a las necesidades e intereses de sus alumnos; y su adecuación a los tópicos y contenidos de enseñanza que van a desarrollar en la clase.

1.2.- ¿Qué uso dan los profesores al material?

- El uso de materiales que hace el profesor, atendiendo a su procedencia suele ser el siguiente: las orientaciones y guías que proporciona la Administración Educativa sirven para la selección y formulación de los objetivos de enseñanza; la selección y secuenciación de los contenidos se hacen con los materiales que comercializan empresas privadas; el desarrollo de las clases se hace en base a materiales de elaboración propia o de elaboración local.

- El material impreso es el más empleado, posiblemente por presentar características como: amplia oferta, facilidad de acceso, menor coste, ... Y de entre los materiales escritos destaca por ser el más utilizado el libro de texto, puesto que *"tiene peculiares mecanismos de control sobre la práctica profesional de los profesores y sobre los contenidos y métodos de enseñanza"* (Gimeno, 1988). Además, entre sus ventajas podemos citar las de comodidad docente y simplificación del trabajo del alumno. Aunque también tiene inconvenientes como los de falta de espíritu crítico, ausencia de comunicación oral, excesiva síntesis del saber y pérdida de interés.

- El hecho de que el profesor no utilice un tipo concreto de material viene determinado, fundamentalmente, por su desconocimiento, por la falta de confianza y seguridad en sus destrezas de utilización y por los problemas organizativos que se generan. Por ello, el profesor demanda más entrenamiento en la utilización de nuevos materiales.

1.3.- ¿Todos los materiales son igualmente adecuados?

En revistas de educación se recogen artículos sobre el empleo de materiales y sus resultados que, en general, tienden a resaltar la bondad de la experiencia. Sin embargo, también aparecen trabajos en los que los materiales han resultado menos eficaces de lo esperado por causas como las que se detallan seguidamente:

- Los conocimientos previos de que parte el alumno no se corresponden con los que presupone el profesor y, en consecuencia, a través del material no se establecen las conexiones esperadas entre esos conocimientos previos y el nuevo conocimiento.

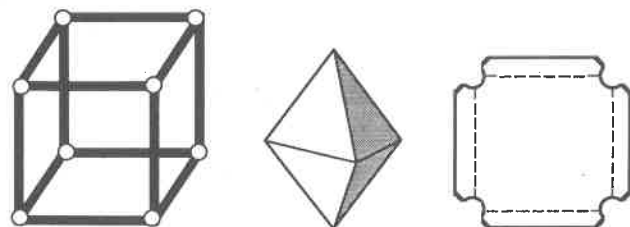
En algunas clases hemos observado como a los alumnos se les han proporcionado artilugios para manipular el algoritmo de resolución de ecuaciones. Después de varias sesiones los alumnos no lograban resolver correctamente todas las ecuaciones que se les proponían, sin embargo ellos mismos manifestaban que habían aprendido a hacer funcionar un "extraño aparato".

¿Qué ha ocurrido? El profesor mantiene la creencia de que el aspecto más relevante del aprendizaje de las ecuaciones es el manejo de los algoritmos de resolución y que, en consecuencia, el empleo de un determinado material facilitará la tarea a los alumnos. Pero si la realidad es distinta de la presunción no hay que limitarse a la condena del material, es necesario hacer un análisis sobre las concepciones personales del profesor acerca de la enseñanza-aprendizaje de las ecuaciones: aspectos relevantes e irrelevantes de los conceptos, estrategias de aprendizaje, materiales más apropiados, etc..

En resumen, los materiales hay que presentarlos **en el momento oportuno**, tanto desde el análisis de los conocimientos previos del alumno, como desde la planificación de las estrategias de enseñanza: no son igualmente significativas las actividades que se presentan contextualizadas en la organización de la asignatura, como las que se proponen de forma aislada o en periodos muertos de clase (antes de vacaciones, por ejemplo).

- Se producen resultados negativos al utilizar materiales como consecuencia de la separación existente entre los mismos y las relaciones matemáticas que con ellos se quieren estudiar.

Supongamos que se quiere que los alumnos trabajen con las líneas interiores de poliedros (alturas, diagonales, ...). Para facilitar la tarea se dispone, por ejemplo, de material articulado, de cuerpos sólidos y de material Plot.



En estas condiciones el profesor puede pensar que cualquiera de los tipos de materiales servirá igualmente a los alumnos, o puede preguntarse sobre la eficacia de cada uno de ellos y optar por el que resulte más conveniente. El análisis de estos tres tipos de materiales nos ayudará a ver que no son igualmente adecuados a los objetivos instructivos.

En el caso del material articulado el alumno ve directamente en el interior de la figura y puede estudiar las características de las líneas que le interesen. En el caso de cuerpos sólidos tendrá que imaginar el recorrido de las líneas interiores puesto que es una figura totalmente inaccesible a la visión directa del alumno. Vemos, por tanto, que el material articulado resultará más adecuado para este trabajo.

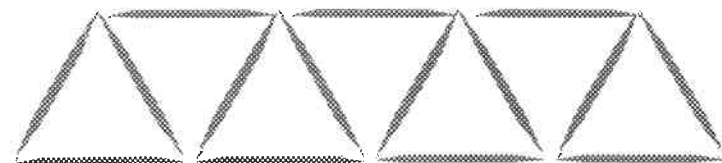
Aunque parece que los poliedros contruidos con material Plot están en el mismo nivel de inadecuación que los cuerpos sólidos, cabe establecer una diferencia significativa: al ir construyendo el poliedro el alumno ha visto cómo es su estructura interna y, en caso de necesitarlo, le resultará sencillo deshacer una de esas caras y observar la línea que tiene que trabajar.

A la vista de estas consideraciones se pone de manifiesto que para el estudio de líneas interiores de los poliedros resulta más pertinente el material articulado y, en consecuencia, que el tipo de material no es independiente del conocimiento que deba trabajar el alumno. No obstante, también hay que reseñar que las relaciones de pertinencia de uso de un material con respecto a otro no son permanentes: los cuerpos sólidos permitirán mejor el trabajo de cálculo de áreas laterales o totales, ya que el material Plot presenta dificultades de medición de las aristas.

En suma, teniendo en cuenta sus características técnicas, el profesor debe utilizar los materiales para el fin previsto, es decir, el que permita al alumno acercarse de la manera más eficaz a los aspectos relevantes del conocimiento que debe adquirir.

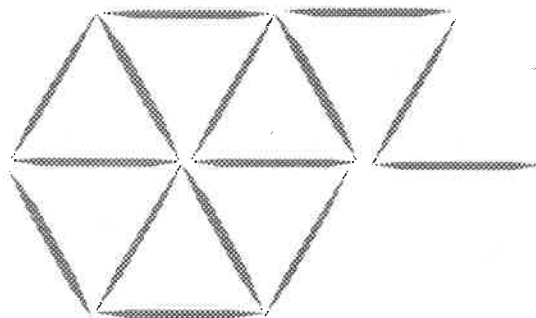
Otro aspecto de la ineficacia de un determinado material se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo: damos a los alumnos 15 palillos de igual longitud y les hacemos la propuesta de estudiar el número de triángulos equiláteros que se pueden construir con los mismos.

A la vista de las órdenes dadas a los alumnos es posible que algunos de ellos utilicen los 15 palillos para construir esta figura



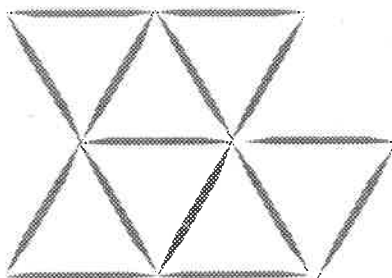
de modo que como respuesta a la cuestión planteada dirán que con los 15 palillos se pueden construir 7 triángulos equiláteros.

Pero hay otros alumnos con el mismo número de palillos han construido esta figura



de esta manera han conseguido 8 triángulos equiláteros: siete de lado un palillo y uno de lado dos palillos y les queda libre un palillo.

Y también pueden encontrarse otras formas utilizando solamente 15 palillos, entre las que se situaría ésta



en la que aparecen 9 triángulos equiláteros: 7 de lado un palillo y dos de lado dos palillos.

Esta dispersión indica que los alumnos pueden dar respuestas distintas dependiendo de la interpretación que den al enunciado y de la relación que establezcan con el material. Y también es posible que el profesor se sienta defraudado del material porque no ha encontrado en sus alumnos la respuesta que esperaba.

En estas circunstancias sería erróneo pensar que el material no es efectivo porque produzca respuestas distintas, lo que hay que pensar es que estas diferencias se producen porque cada alumno da prioridad a algunos aspectos de la representación de la realidad y que el material por sí mismo no es suficiente para alcanzar los resultados esperados: ha de complementarse con la discusión colectiva (entre alumnos y entre alumnos y profesor) para que todos los alumnos se fijen en aspectos relevantes que no habían captado en su trabajo individual.

Sirva este ejemplo para indicar que el material hay que presentarlo de la **manera adecuada**: dejar un tiempo a los alumnos para que conozcan y experimenten previamente, considerar las estrategias metódicas que resultarán más apropiadas, analizar los cambios que se producen en las interacciones de aula, etc...

Con las consideraciones que acabamos de hacer disponemos de elementos para caracterizar el tipo de material que el profesor emplea en las clases de Matemáticas, así como de las condiciones que los profesores exigen a un material nuevo para que se introduzca en el aula de la manera adecuada:

Debe adecuarse a los contenidos y a los alumnos.

Su coste sea bajo: no le exija mucho tiempo, conocerlo de forma directa, posibilidad de experimentarlo personalmente y garantía de usarlo con seguridad.

Sean explícitos: el nivel de conocimientos que necesitan los alumnos, los objetivos educativos que pueden alcanzarse y la metodología apropiada.

2.- FUNCIONES DE LOS MATERIALES

Nuestro análisis sobre los materiales no puede limitarse al conocimiento de su status actual, hemos de avanzar en la búsqueda de actuaciones que potencien y mejoren el uso de los mismos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Y para ello estudiaremos las funciones que en este proceso deben cumplir los materiales y deducir a través de ellas las actuaciones esperables y exigibles.

En sentido amplio diremos que los materiales establecen una relación entre el objeto del saber y el sujeto que aprende mediante una representación más o menos abstracta de la realidad; en consecuencia, el material es un medio de comunicación cultural. Sin embargo, su función específica dependerá del planteamiento que sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas se les quiera otorgar: para un aprendizaje memorístico; para un aprendizaje basado en la formulación de conjeturas, comprobación de hipótesis, simulación de procesos, etc...

Pero para nuestros propósitos conviene concretar más acerca del destino que se reserva a los materiales en el proceso educativo. Y en este sentido trabajos como los de Fainholc (1988), Ferreres (1990) y Zabalza (1987), nos permiten llegar a clarificar las funciones específicas de los materiales:

a.- FUNCION MOTIVADORA

Cuando el profesor lleva al aula cualquier material novedoso se crea expectación entre el alumnado, lo que se traduce en una mejor predisposición para el aprendizaje y en una reducción de la ansiedad. Es más, ya que el material es un medio para acercar el aprendizaje a la vida, su introducción en el aula genera actividad y reduce verbalismo.

En consecuencia, hay que buscar materiales que permitan presentar los contenidos de la forma más atractiva posible; de este modo se mantendrá la atención del alumno y se aumentará su motivación para el aprendizaje. Y para conseguirlo hay que atender a factores como color, diseño, amenidad, facilidad de manejo,

Para mantener la atención, y por tanto la motivación para el aprendizaje, hay que atender a los factores estructurales del material y a los factores subjetivos del alumno (basados en sus capacidades físicas y en su experiencia anterior)

b.- FUNCION INNOVADORA

El tipo de interacciones producidas en el aula al proyectar un video no son iguales a las que se establecen si la actividad es de construir figuras sobre un geoplano. Ocurre que el empleo de materiales nuevos (o los antiguos usados de otro modo), generan cambios en las relaciones existentes en la clase, ya que se originan distintas vías de comunicación entre el sujeto y el aprendizaje.

En consecuencia, el empleo de materiales exige una planificación del método que se va a seguir y de la adaptabilidad del mismo a la finalidad educativa que se persigue. Así, por ejemplo, si se introduce software educativo programado hay que pensar que las incidencias que puedan surgir no se resuelven de forma inmediata (como en el caso de utilizar la pizarra), o que las modificaciones que pueda introducir el profesor serán escasas (el soporte informático tiene una flexibilidad limitada).

En el uso de materiales hay que considerar el método a seguir y la adaptabilidad al contexto curricular.

c.- FUNCION ESTRUCTURADORA DE LA REALIDAD.

Si un profesor articula el aprendizaje de las figuras planas a partir de figuras espaciales, utilizará el porepán (corcho blanco), u otros materiales similares, para que mediante cortes, proyecciones o sombras se generen figuras planas. Mientras que un profesor que presente las figuras espaciales después de haber trabajado los polígonos buscará materiales que permitan obtener poliedros engarzando figuras poligonales.

Vemos, por tanto, que a través de los materiales se pueden provocar en los alumnos diferentes experiencias de aprendizaje causadas por una distinta

representación de la realidad y del conocimiento. Que sea consciente el profesor al diseñar la actividad de que está dando una determinada codificación, organización y ordenación de los datos de la realidad y del conocimiento a transmitir. Y que también sea consciente de que esa estructuración que pretende dependerá de las características técnicas propias del material empleado.

Item más, el profesor no puede limitarse a diseñar y presentar la actividad con el material adecuado, también debe vigilar que no se produzca ninguna pérdida de información y arbitrar mecanismos para que los alumnos puedan comprender bien los mensajes.

Los materiales han de servir para decodificar significativamente los mensajes y relacionar el nuevo contenido con conocimientos o experiencias anteriores.

d.- FUNCION ORIENTADORA Y REGULADORA DEL APRENDIZAJE.

Los materiales didácticos actúan como guía metodológica, como organizadores de experiencias de aprendizaje, puesto que incluyen no solo los contenidos sino cómo utilizarlos. Por tanto, permiten orientar y guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Esta función se manifiesta de modo más patente en manuales o programas informáticos de los llamados de enseñanza programada en los que el alumno avanza a una nueva tarea al superar la anterior.

Pero la rentabilidad educativa se mejora si quedan claramente definidos los procedimientos y trabajos a realizar, de modo que se provoque en el alumno la participación y la orientación en las tareas; y facilitando el aprendizaje mediante reflexiones personales, trabajo en grupo, debates, resúmenes, síntesis, etc... Además, hay que evaluar los progresos y proporcionar mecanismos de retroalimentación.

Los materiales deben contener ayudas y orientaciones para realizar la tarea, facilitar el trabajo de aprendizaje y regular el proceso de información.

e.- FUNCION CONDICIONADORA DEL APRENDIZAJE.

Aunque no existe un pleno acuerdo, parece que el tipo de material utilizado puede configurar un tipo de relación con los conocimientos a adquirir, y esta relación puede darse en dos sentidos: como recurso que utiliza siempre el alumno en la comprensión de un concepto (asociar fracción a un trozo de tarta) y como resultado de las características del material (la construcción de modelos con material sofisticado le exige al alumno mayor atención al aspecto manipulativo que al conceptual).

En lo que si hay acuerdo es que una actitud pasiva o una actitud activa del alumno frente al material influyen de modo diferente en el aprendizaje, puesto que el tipo de material utilizado puede condicionar el tipo de operaciones mentales que el sujeto desarrolla: no es la misma acción la de visualizar unas diapositivas de mosaicos que la de diseñar mosaicos sobre papel.

Es conveniente reconocer en cada material la actitud activa o pasiva que requiere del alumno que lo utiliza.

Las funciones mencionadas pueden ampliarse con la **función formativa** en el sentido de que la utilización de materiales no se limita a los aspectos técnicos ni didácticos, también conlleva un discurso generado en torno a los principios filosóficos y políticos en cuanto integrantes de un proceso curricular. Por tanto, los materiales ayudan a transmitir valores educativos.

Y, por último las finalidades educativas de los materiales se complementan con la **función de control sobre lo que se enseña y se aprende**. En efecto, existe una autorización administrativa previa, una delimitación de mínimos exigibles, una cierta uniformidad en las propuestas curriculares, etc... que hacen que los materiales dispongan de una cierta capacidad de control como reflejo de una estandarización de la cultura y de la transmisión por el sistema escolar de una determinada visión de la sociedad.

3.- SELECCION Y APLICACION DE MATERIALES: TAREAS DEL PROFESOR

Actualmente existen en el comercio materiales en cantidades importantes aunque la calidad, la creatividad innovadora y el ámbito de aplicación sean variables y diversos. En estas condiciones, el profesor (o colectivo de profesores), que quiere utilizar material para una determinada actividad necesita realizar tareas de selección (o de adaptación) de la oferta disponible, y pensando siempre que el material no puede ser mitificado: **no existe el mejor material didáctico, ni el material por sí mismo va a mejorar la calidad del profesor.**

En la toma de decisiones subsiguiente, y teniendo en cuenta las funciones que han de cumplir, el profesor puede realizar un estudio sobre los materiales analizando factores como los siguientes:

3.1.- SU VIRTUALIDAD INTRINSECA

Son aquellos factores que corresponden a las características propias de los materiales y entre los que cabe citar:

i.- Facilidad de uso

Teniendo en cuenta la edad y capacidad de los alumnos hay que buscar

materiales que estén a su alcance, tanto por su facilidad de manipulación como por la facilidad de interacción.

Para informarse acerca de las dificultades subyacentes debe ser el profesor el que de manera personal trabaje con el material antes de llevarlo al aula. De este modo dispone de información fiable sobre las potencialidades educativas que encierra, y sobre las dificultades que puedan encontrar sus alumnos y, en consecuencia, sobre la manera en que puede ayudarles a superarlas de modo eficaz. Igualmente podrá observar si la finalidad del empleo del materiales será la de facilitar el aprendizaje, o si esa finalidad se consigue después de una exhaustiva tarea de trabajo manual.

Ahora bien, para conocer a fondo un material no basta con iniciar las tareas, hay que desarrollar completamente las actividades que se van a proponer a los alumnos para evitar dar instrucciones de difícil cumplimiento. Así, por ejemplo, en la construcción de poliedros con el material Polydron, el trabajo de encajar dos piezas es sencillo, pero la tarea se complica en el momento de colocar la pieza que completa la figura. Igualmente resulta mucho más sencillo hacer poliedros con el material Plot si se unen las piezas mediante gomas colocadas por fuera de la figura que si se quieren hacer por dentro, proceso que necesita el empleo de una aguja de ganchillo y aún así es complicado.

ii.- Facilidad para la producción.

No es suficiente considerar la facilidad de uso de los materiales, también hay que elegir materiales que los alumnos puedan adquirir con facilidad, y/o materiales que los alumnos puedan construir con facilidad. Del mismo modo que la tarea del profesor no debe circunscribirse a la facilidad del propio material, sino que debe extenderla a los elementos auxiliares que el propio material requiera: no es muy útil disponer de una colección de películas en super 8 o vídeos en el sistema Beta pues los medios de reproducción resultan complicados de obtener en estos momentos.

Por último, hay que indicar que la facilidad de un material no es un término absoluto, hay que hablar de facilidad en determinado uso y en consideración con la versatilidad que el material permita. Un objeto tan simple como la tiza sugiere, en expresión de Peskett (1967), diferentes usos: para dibujar una figura, para representar una torre o un árbol, o como unidad en un problema aritmético; sin embargo es diferente el grado de facilidad de uso: un niño de tres años puede pintar sin esfuerzo en la pizarra y sin embargo le resultará complicado construir una torre con trozos de tiza.

iii.- Soporte para la transmisión de información.

Para seleccionar el material habrá de considerarse tanto el tipo de mensaje que se transmite (imágenes, palabras, imágenes y palabras, imágenes y sonidos, etc...), como el grado de abstracción o simbolismo con el que se estructura el mensaje y las modificaciones metodológicas que requiere el empleo del mismo.

No obstante, resultaría imprudente emplear materiales que conlleven una renuncia o marginación de la comunicación auditivo-verbal (que siempre se ha señalado como la prioritaria en la escuela), para pasar a otro tipo de canal de comunicación prioritaria; como puede ocurrir si se implanta un abuso de comunicación a través del ordenador o las sesiones se dedican exclusivamente al visionado de imágenes.

3.2.- SU FUNCION CURRICULAR.

El material tiene como finalidad la de facilitar el aprendizaje de los alumnos. En este sentido en su selección o diseño hay que atender a dos aspectos importantes:

i.- Adecuación a los alumnos.

Cuanto más próximo al mundo del alumno se encuentre el material más fácil será conectar el contenido científico con la base experiencial que tiene el propio alumno. Así puede ser desaconsejable querer transmitir un conocimiento empleando el ordenador con alumnos que no hayan tenido experiencias previas.

No obstante, y como señalan Alsina y otros (1988), resulta conveniente que un mismo concepto se trabaje con materiales diversos para evitar posibles fijaciones producidas por una percepción particular del material único empleado. Y también hay que procurar utilizar el mismo material para situaciones diferentes, pues en este caso el alumno ya parte del conocimiento del mismo.

En todo caso, nos parecen más adecuados aquellos materiales que permitan al alumno colaborar en su construcción (así comprende mejor el propio material), y aquellos materiales que sean suficientemente flexibles como para que el alumno tenga una participación activa y no sea elemento pasivo en la recepción del mensaje.

ii.- Adecuación a una estrategia.

El material no es independiente de las estrategias metódicas que deben emplearse: cada material conlleva unos agrupamientos y unas relaciones interpersonales características. Es más, hay que dedicar una parte del proceso instructivo a familiarizar al alumno con los medios que se van a emplear, dado que el alumno puede mostrar síntomas de ansiedad cuando advierte sus dificultades para manipular con destreza los materiales (el material en sí mismo es el que le resulta problemático y no puede acceder a los resultados que se esperaban alcanzase con su utilización).

Por tanto, el profesor debe tomar en consideración los efectos provocados sobre el resto de los elementos intervinientes en el proceso de enseñanza-aprendizaje mediante el uso de un material, y reflexionar sobre aspectos como:

- Variaciones que se produce en la comunicación entre profesor y alumno, entre alumnos y entre alumnos y el material.

- Limitaciones que encontrará en cuanto al tiempo y al espacio de que se dispone en el centro.

- Tipología de las actividades que pueden hacerse.

- Simultaneidad con el uso de otros materiales.

- Tipo de agrupamiento de alumnos que se va a establecer.

- Posibilidad de diferentes niveles de aprendizaje con el mismo material.

- Método para evaluar la eficacia del material tanto a corto como a largo plazo.

De forma sintética podemos indicar que: la elección del material se hará conjugando el nivel de concreción necesario para presentar y estructurar un determinado contenido, con las características de un determinado grupo de alumnos a los que se destina.

3.3.- LOS COSTES Y LA RENTABILIDAD

Costes y rentabilidad deben analizarse conjuntamente como elementos esenciales para la toma de decisiones. Entre los costes habremos de incluir tanto gastos de mantenimiento como los equipamientos necesarios (por ejemplo el costo de equipos informáticos ha de incluir los del propio equipo, más los contratos de mantenimiento, más discos, papel, luz, ...); el número de ejemplares necesarios (uno por alumno o uno para varios alumnos); el tiempo para su preparación (si lo hace el profesor a costa de qué otra actividad, y si lo hace el alumno a cambio de qué otros aprendizajes); etc...

En la rentabilidad hay que considerar la utilización que se hace del material en aspectos como: su facilidad de recuperación (para una o varias sesiones); su adaptabilidad curricular (para uno o varios contenidos); su utilización por grupos diferentes de alumnos; etc..

Los materiales más aconsejables son los que presentan mayores índices de rentabilidad y menores costos. En el polo opuesto aparecen los materiales de alto costo y baja rentabilidad en cuyo caso resulta aconsejable sustituirlos por otros de características similares pero que tengan un costo menor o una mayor rentabilidad.

Este es un tipo de análisis de costes y rentabilidad que corresponde a una visión de carácter monetarista. No obstante, también hay que incluir un análisis similar de costes y rentabilidad pero desde la rentabilidad educativa, lo que obliga al profesor a responder a preguntas del tipo ¿qué tiempo y esfuerzo necesitan los alumnos y el profesor para alcanzar los objetivos marcados?, ¿hay otro material que disminuya los costes del aprendizaje?, ¿dispongo de materiales de calidad similar para cubrir todos los contenidos?, etc...

En resumen: La correcta toma de decisiones del profesor sobre la elección de un material debe ser el resultado de su virtualidad, su funcionalidad y el análisis de costes y rentabilidad.

Una cuestión final: los materiales deben estar sujetos a evaluaciones, tanto desde la práctica escolar (preguntando a los alumnos y a los profesores sobre su eficacia educativa), como desde una evaluación externa (discusión con otros profesionales). Martínez (1992), presenta un instrumento amplio y de gran utilidad para realizar un análisis de los materiales y de las estrategias didácticas que se ponen en funcionamiento. En caso de no necesitar de un instrumento de análisis tan exhaustivo como el citado con anterioridad, en el trabajo de Santos (1991) se explicitan, en forma de preguntas, características que permiten valorar la potencialidad didáctica de los materiales.

4. SELECCION Y APLICACION DE MATERIALES: OTROS RETOS PARA EL FUTURO

En escritos curriculares auspiciados por las autoridades educativas aparecen secciones dedicadas específicamente a materiales y en las que se incluye una bibliografía comentada, descripción de materiales manipulativos estructurados, vídeos educativos, programas de ordenador, etc... y firmas comerciales que los venden. Ahora bien, a la vista de actuaciones del profesorado como las que recoge Area (1991), nos surgen algunas preguntas: ¿todas las actuaciones sobre materiales son competencia exclusiva del profesor?, ¿es suficiente con hacer recomendaciones o listados comentados?, ¿qué otras actuaciones son necesarias?, y si es así, ¿a quién corresponde hacerlas y en qué dirección?

Para responder a estas cuestiones no todos los materiales deben tener la misma consideración; hay que hacer un análisis específico sobre el libro de texto ya que juega un papel preponderante en la educación, pues como estima Apple (1991) el 75% del tiempo que los escolares de EEUU están en el aula lo dedican a trabajos relacionados con el libro de texto (el 90% en el caso de los deberes escolares), situación que no diferirá mucho de la que se esté dando en nuestro país.

Es cierto que, como producto comercial, las propias editoriales cuidan aspectos formales del libro de texto, como pueden ser la presentación (color, ilustraciones, tipos de letras distintos, ..), la facilidad de aprendizaje (frases breves, esquemas, ..) y los factores didácticos (fomentar el interés del alumno, proponer situaciones problemáticas, intercalar preguntas, etc ...). Este tipo de mejoras serán continuas, pues no hay que olvidar que se trata de "... una industria editorial que vive y prospera pingüemente a costa de la educación y de la escuela" (Santos, 1991).

También es cierto que la autorización oficial que los habilita para su venta al público trata de garantizar la validez y fiabilidad de los contenidos, sin embargo presentan, de modo casi general y con referencia al caso de las Matemáticas, importantes lagunas: no hacen referencia a aspectos de vigente actualidad (simulación, por ejemplo), reflejan los saberes terminados sin referencias a sus procesos de elaboración, no incluyen actividades de investigación o problemas abiertos y tienden a constituirse como único recurso para el aprendizaje, pues como señalan Clements y Battista (1992) "*sugieren de forma esporádica el empleo de materiales manipulativos para el aprendizaje de la Geometría y aun aquellos que lo sugieren no pretenden alcanzar niveles altos de pensamiento*".

Item más, no es infrecuente que en los libros de texto de Matemáticas se localicen errores conceptuales. Errores que son, en muchos casos, transmitidos a los alumnos como cualquier otro de los contenidos de la asignatura expresados correctamente.

Estas razones aconsejan mantener, de forma permanente, una especial vigilancia para velar por la validez y fiabilidad de los libros de texto, como material más utilizado en la enseñanza.

Además de los libros de texto, los profesores de matemáticas necesitan recursos adecuados para desarrollar el currículum, de modo que en la actualidad calculadoras, ordenadores, y material manipulativo son parte esencial del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas del mismo modo que los productos químicos son imprescindibles en los laboratorios de Química.

En estos momentos ya existen materiales distintos del libro de texto que tienen una calidad contrastada y que cubren la mayor parte de los tópicos en educación matemática. Sin embargo son desconocidos por una gran parte del profesorado, entre otras razones porque "*las escuelas no han visto dónde estos materiales son adecuados, y los profesores se muestran inseguros para emplearlos*". (Davis, 1992). Por tanto, debemos concluir que son necesarias urgentes actuaciones en el doble sentido de potenciar la difusión de los materiales de calidad ya existentes; y de apoyar la creación de otros nuevos para que cubran lagunas existentes en el currículo, para que faciliten las tareas de aprendizaje o para que mejoren los materiales ya existentes.

Ahora bien, la vigilancia de la calidad de los libros de texto y la difusión y creación de nuevos materiales no se deben limitar a las iniciativas que cada profesor tome por su cuenta, se necesita el respaldo de entidades y organismos que disponen de más medios y recursos para posibilitar el empleo de materiales de calidad para la educación matemática. A nuestro entender habrá, al menos, que implicar a tres de ellas:

- Las autoridades educativas tienen la responsabilidad de hacer que se cumplan los fines educativos propuestos por la L.O.G.S.E. Y ello conlleva que

se potencie la creación de materiales adecuados (no solo escritos), que se elaboren criterios de evaluación de materiales (para garantizar su calidad educativa), que se arbitren mecanismos de difusión de los materiales (no solo de presentación de los mismos, sino presentándolos en el contexto en que se han de emplear), etc ...

- Las Areas de Conocimiento de Didáctica de las Matemáticas que existen en las Universidades tienen obligaciones docentes en la formación de futuros profesores, así que deben incrementar sus investigaciones sobre nuevos y viejos materiales para ofrecer al profesorado conclusiones de validez contrastada.

- Las sociedades de profesores de Matemáticas u otras organizaciones profesionales han de constituirse en entidades de consulta especializada. De este modo, y al igual que ocurre en países como Estados Unidos con la N.C.T.M. (National Council of Teachers of Mathematics), se debe caminar hacia la constitución de auténticas formaciones profesionales preocupadas por la calidad de la enseñanza de las matemáticas y, como tales, pronunciarse sobre las metas en educación matemática, elaborar materiales que ayuden a alcanzarlas, potenciar la formación del profesorado y formular criterios para medir la eficacia y grado de cumplimiento de los objetivos marcados.

Para terminar: si la reforma educativa que recoge la L.O.G.S.E. no va acompañada de un cambio en las estructuras organizativas quedará reducida a una reforma curricular. Pensemos que si se postula una enseñanza de las Matemáticas que se apoye en la manipulación y la experimentación por parte de los alumnos, lo que se exige es una nueva concepción acerca de cómo se enseña y cómo se aprende esta disciplina, es decir, cambiar las concepciones y creencias del profesorado. En este sentido hay que ofrecer al profesorado una información sobre los materiales contextualizada y acompañada de un cambio en la estructura del centro escolar creando **laboratorios de Matemáticas** con funciones similares a las que cumplen los laboratorios de Física o de Ciencias Naturales.

BIBLIOGRAFIA

ALSINA, C. y otros (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Síntesis, Madrid.

APPLE, M. (1989). *Profesores y textos*. Paidós-M.E.C., Barcelona

AREA, M. (1991). *Los medios, los profesores y el currículo*. Sendai, Barcelona.

CLEMENTS, D.H. y BATTISTA, M.T. (1992). Geometry and spatial reasoning, en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, por GROUWS, D. A. (Editor). Macmillan Publishing Company, New York.

COCKCROFT (informe). (1985). *Las Matemáticas sí cuentan*. Servicio de Publicaciones del M.E.C., Madrid

DAVIS, R.B. (1992). Reflections on where mathematics education now stands and on where it may be going, en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, por GROUWS, D. A. (Editor). Macmillan Publishing Company, New York.

FAINHOLC, B. (1988). Bases para la reflexión sobre la producción de materiales educativos, en *Alternativas*, nº 4, año III, pp. 13-25.

FERRERES, V. (1990). *Recursos didácticos en la educación de adultos*. Fondo promoción de empleo, Barcelona.

GIMENO, J. (1991). Los materiales y la enseñanza. *Cuadernos de Pedagogía*, nº 194, Julio-Agosto, pp. 10-15.

GIMENO, J. (1988). *El curriculum. Una reflexión sobre la práctica*. Morata, Madrid.

HERNAN, F. y CARRILLO, E. (1988). *Recursos en el aula de Matemáticas*. Síntesis, Madrid.

HIEBERT, J. y CARPENTER, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding, en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, por GROUWS, D. A. (Editor). Macmillan Publishing Company, New York.

MARTINEZ, J. (1992). ¿Cómo analizar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía*, nº 203, Mayo, pp. 14-18.

MINISTERIO DE EDUCACION Y CIENCIA (1989). *Diseño Curricular Base*. Servicio de Publicaciones, Madrid

PESKETT, J.W. (1967). Métodos de fabricación de modelos para materiales necesarios, en *Gattegno y otros: El material para la enseñanza de la matemática*. Aguilar, Madrid.

SANTOS, M.A. (1991). ¿Cómo evaluar los materiales? *Cuadernos de Pedagogía*, nº 194, Julio-Agosto, pp. 29-31.

ZABALZA, M.A. (1987). *Diseño y desarrollo curricular*. Narcea, Madrid.

CALCULADORA GRAFICA. UN RECURSO INNOVADOR EN EL PROCESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMATICAS

María Graciosa Veloso de la Escola Secundaria nº 1 de Loures de Lisboa

En esta comunicación son expuestas razones de orden social, tecnológico y pedagógico para que la calculadora gráfica sea desde ahora un material propuesto en los currículos de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. Se presenta y comenta parte de una propuesta de actividad de aula en la que los alumnos exploran de modo propio y con ayuda de calculadora, aspectos relativos al comportamiento de funciones polinómicas.

INTRODUCCION

Desde la década de los 70, varias organizaciones internacionales se preocuparon por la situación de crisis en la enseñanza de las Matemáticas y es a partir de la década de los 80 cuando se han publicado documentos que proponen transformaciones profundas a nivel curricular en objetivos, metodologías y materiales en las que se propone, concretamente, que el computador y la calculadora sean incorporados a los currículos así como la explotación de sus potencialidades educativas (NCTM, 1980; Cockcroft, 1982; NCTM, 1989; NRC, 1984, 1990; APM, 1988, 1990).

Esta comunicación tiene dos propósitos fundamentales. En primer lugar, presentar un conjunto de presupuestos que dan fundamento a la experiencia y la reflexión que estoy haciendo con la utilización de la calculadora gráfica. En segundo lugar, exponer ejemplos y comentar aspectos de la resolución de un actividad propuesta a alumnos de un grupo de 10º año (15-16 años).

Me gustaría comenzar por situar la temática de esta comunicación en un cuadro general de cambio en la Escuela. El funcionamiento de la escuela no agrada a los que directamente trabajan en ella y está desajustada de las necesidades sociales -los aires de cambio provocados por la evolución tecnológica, materializados, por ejemplo, en nuevos tipos de relaciones sociales, difícilmente tienen cabida en la institución escolar- y la crisis que vive la escuela tiene manifestaciones de desagrado profesional, de fracaso administrativo y de fracaso real. De acuerdo con estudios hechos sobre las contribuciones significativas de los computadores para el cambio educacional (Esgalhado, 1990) y de estudios de caso sobre las ventajas educativas de la utilización del computador y de la calculadora gráfica en la clase de Matemáticas (Ponte & col., 1991), la enseñanza está todavía muy centrada en el profesor y sobre todo en el caso concreto de las Matemáticas, el papel y el

lapiz son todavía los instrumentos predominantes propuestos para el aprendizaje de esta disciplina.

Las necesidades de transformación de la Matemática escolar, de su enseñanza y de su aprendizaje no son independientes de las necesidades de transformación profunda de la Escuela. Los procesos de cambio son complejos y en ellos interfieren condiciones facilitadoras o adversas, provenientes de la administración central, del ambiente y características del centro de enseñanza y de las concepciones y prácticas de los profesores.

Consciente de la interacción entre los procesos de cambio curricular y de cambio organizativo, estoy particularmente empeñada en los primeros y concretamente en la utilización del computador y de la calculadora gráfica, en una perspectiva de estudio de los procesos de aproximación de los profesores y de las capacidades desarrolladas por los alumnos.

El trabajo práctico y el estudio que he desarrollado en el área de formación de los profesores y en la utilización del computador y de las calculadoras gráficas, han sido estimulados y apoyados por profesores, investigadores y proyectos nacionales. A este respecto, tiene sentido hacer una breve cronología de lo que en Portugal ha sido más significativo a nivel de utilización educativa de los medios informáticos.

En Octubre de 1984, en el Departamento de Educación de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Lisboa, se celebró un "Encuentro sobre microcomputadores en la enseñanza de las Matemáticas" en el que se inició la discusión y reflexión sobre la introducción de los computadores en la enseñanza (Ponte & col., 1984). En 1985, la Universidad de Coimbra, que ya había realizado una experiencia piloto con 12 escuelas de Enseñanza Secundaria, conjuntamente con otras cuatro Universidades crearon el proyecto MINERVA, proyecto de ámbito nacional que ha sido el proceso más significativo de introducción del computador en las escuelas de Enseñanza Superior. Este proyecto enuncia como objetivos principales la integración de las tecnologías de información "como medios auxiliares de enseñanza no superior" y de formación inherente de profesores.

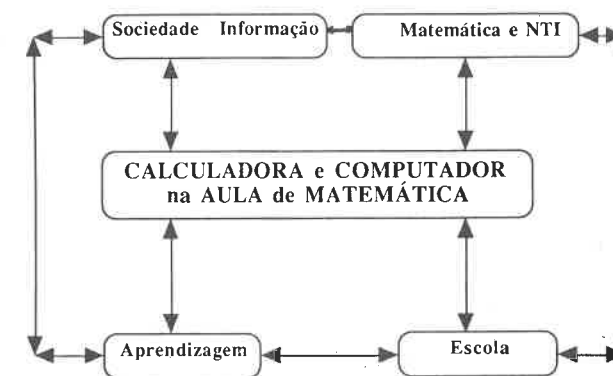
El área de Nuevas Tecnologías de Información, concretamente el ordenador y la calculadora, han sido objeto de un número significativo de estudios en el ámbito de post-grado en varias Universidades.

La APM, Asociación de Profesores de Matemáticas, ha tenido también un papel muy importante en los procesos de intercambio de experiencias y de formación en este área. En todos los ProfMat, Encuentros Anuales de nivel nacional, la utilización de computadores y de calculadoras ha sido objeto de cursos, sesiones prácticas, paneles, comunicaciones y de grupos de trabajo. Concretamente el trabajo de formación ligado a la calculadora gráfica se inició en el curso 90/91 con la dinamización de una sesión práctica y se ha desarrollado bien con experiencias en las aulas con alumnos de 10º y de 11º

año o bien con sesiones de formación inicial para profesores durante cada año lectivo y con la realización de cursos en el ProfMat de 1992/93.

PRESUPUESTOS SOCIALES Y TECNOLÓGICOS-CIENTÍFICOS DE LA UTILIZACIÓN DE LA CALCULADORA GRÁFICA

La utilización del computador y de la calculadora gráfica en clase de Matemáticas puede ser parcialmente explicada por un conjunto de factores, unos de naturaleza socio-cultural, otros provenientes de las influencias recíprocas del desarrollo de la Matemática y de las Nuevas Tecnologías de Información como los que se presentan en el esquema. Identificar algunos de estos factores es contribuir a comprender algunas de las necesidades de cambio de los objetivos de la Educación y del currículo de Matemáticas. De esta tarea me ocuparé seguidamente.



En la sociedad actual, la información es un recurso esencial y la comunicación es un nuevo medio de producción (NCTM, 1989). Las NTI, Nuevas Tecnologías de Información -expresión referente a los procesos de almacenamiento, acceso, manipulación y comunicación de la información por medios electrónicos- ha provocado y alimentado cambios profundos en las más diversas actividades humanas. Estos cambios se traducen, por ejemplo, en la rapidez y en el volumen de procesamiento de la información, en el surgimiento de nuevas profesiones, en nuevos procesos de organización y en la aparición y desarrollo de nuevas áreas de conocimiento. La tecnología es una componente de la cultura actual y es considerada por varios autores como:

"Factor determinante en la evolución de la sociedad, dados los impactos de orden ideológico, sociológico y sentimental". (Bishop, 1991, pp. 16-17).

Según Davis & Hersh (1991) el mundo actual está cada vez más matematizado, significando esta expresión que las aplicaciones de las

Matemáticas son cada vez más frecuentes especialmente nombradas porque la tecnología, que depende y alimenta la evolución matemática, es una componente cultural marcante de la actualidad. Se comprende que se dé gran importancia a la alfabetización matemática de los alumnos, futuros ciudadanos de la sociedad (NCTM, 1989). La alfabetización matemática es así mismo uno de los objetivos sociales de la educación, definiéndose como un conjunto de capacidades de resolución de problemas según sus múltiples representaciones, de comprensión de los procesos matemáticos y de aplicación de las Matemáticas a situaciones concretas.

Las competencias básicas que la sociedad industrial requería eran esencialmente las de saber leer y calcular con lápiz y papel. Estas aptitudes fueron suficientes para la integración en una sociedad que necesitaba sobre todo destrezas de manipulación mecánica. Las exigencias que la sociedad de la información hace al sistema educativo son de otra naturaleza, cognitivamente más exigentes (NRC, 1990), siendo cada vez más necesario analizar y tomar decisiones sobre la información presentada principalmente por vía gráfica y estadística, a nivel de diferentes actividades. En esta perspectiva es necesario formar ciudadanos capaces de intervenir críticamente en un contexto de cambio tecnológico permanente (Veloso, 1991).

El papel social de las NTI pone en las escuelas desafíos de adaptación a una sociedad en permanente mutación. Las escuelas se tienen que transformar de modo que pueda formar ciudadanos críticos con capacidad de comprensión de los procesos informáticos.

Si bien la función educativa de la Escuela conlleva la integración en la vida social, no se puede ignorar las exigencias que ésta le plantea. En este sentido, podemos decir que las NTI constituyen un desafío educativo que es necesario destacar y al que hay que responder. ¿Cuál es el papel de la Escuela en una sociedad en la que las NTI han tenido una influencia relevante en las profundas modificaciones culturales en curso?. Tal como Benavente (1989) argumenta, el papel específico de las escuelas será el de promover la sistematización y la profundización crítica de los conocimientos que son múltiples, dada la diversidad de público a los que van dirigidos además de contribuir para que las diversas culturas se intercomunique y de desarrollen en una perspectiva de diversidad y de universalidad.

Ante la presencia de un cuadro de evolución y transformación tecnológica, las escuelas tardan en integrar instrumentos como la calculadora o el ordenador. En los currículos de Matemáticas de la Reforma del Sistema Educativo en Portugal aparecen, por primera vez, estos instrumentos como materiales a utilizar en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

En cuanto al impacto de las relaciones recíprocas en el desarrollo de las Matemáticas y las NTI, hay que resaltar que las calculadoras y el computador no sólo cambian el cálculo y el trazado de gráficas más simples sino también

la propia naturaleza de los problemas que son importantes en Matemáticas y los procesos que los matemáticos usan en sus investigaciones (NCTM, 1989). Como ya hicimos referencia, la máquina no sustituye al usuario y no sólo el objetivo educativo más importante es la capacidad del alumno de decidir y criticar la información si no que será necesario desarrollarla plena y eficazmente si se quiere utilizar el computador o la calculadora.

PRINCIPIOS PEDAGOGICOS PARA LA UTILIZACION DE LA CALCULADORA GRAFICA

Desde la década de los 70 se ha desarrollado un movimiento internacional en el sentido de una renovación curricular profunda que más que apelar a los nuevos contenidos, como ocurrió en los años 60 (Ponte, 1990a), propone nuevos objetivos, nuevas metodologías y nuevos papeles para el profesor y para el alumno. El desarrollo de la NTI, concretamente la vulgarización de la calculadora y el ordenador que cuestionan las prácticas más comunes de la enseñanza de las Matemáticas, han alimentado un movimiento internacional que defiende como objetivos fundamentales, en el aprendizaje de las Matemáticas, el desarrollo de las capacidades de resolución de problemas, de comprensión y análisis crítico así como el desarrollo de actitudes de gusto y aprecio por las Matemáticas (Cockroft, 1982; NCTM, 1989; NRC, 1989).

Compete a las escuelas, y particularmente a la asignatura de las Matemáticas, desarrollar la capacidad crítica de los usuarios de las máquinas.

Muy concretamente, en relación con mi experiencia en la utilización de la calculadora gráfica en clase de Matemáticas, destaco los siguientes principios pedagógicos:

- * La calculadora y el ordenador son instrumentos que los alumnos utilizan para investigar, suponer y verificar sus descubrimientos.

- * Estos instrumentos son facilitadores de comunicación matemática tanto en la transmisión como en la recepción de información, ya que los alumnos deben comprender el lenguaje de la máquina.

- * La interpretación de gráficas presentadas por la calculadora o por el ordenador exigen un análisis cuidadoso de los ejes y la comprensión de las consecuencias de los cambios de "Rango" en las características de las gráficas.

- * La insustituibilidad del profesor se explica por la responsabilidad que tiene al estimular y apoyar un ambiente de investigación y de gusto por la actividad matemática, traducido, por ejemplo, en la atención dedicada a la identificación de conexiones matemáticas y al fomento de desarrollo de la capacidad del alumno a decidir cómo va a utilizar la máquina.

EJEMPLO DE UTILIZACION DE LA CALCULADORA GRAFICA EN CLASE DE MATEMATICAS. FUNCIONES POLINOMICAS-LIMITES

La propuesta de trabajo (Anexo I) consistió en presentar a los alumnos un conjunto de ejemplos de expresiones polinómicas y sus respectivos gráficos para que asociasen a cada expresión un gráfico y explicasen el proceso que habían utilizado. Se pretendía que los alumnos hicieran exploraciones matemáticas, articulando aspectos visuales con características gráficas y algebraicas, en un contexto de familias de funciones. Se pretendía, así mismo, hacer visible una propiedad que se demuestra algebraicamente y que es difícilmente comprendida por los alumnos de estos niveles. La propiedad a la que me refiero es la del límite de una sucesión de término general polinomial de grado n e igual al límite del término de grado n de la expresión polinomial. También se intentaba que los alumnos desarrollasen, con esta exploración, la capacidad de establecer un esbozo general de un gráfico de cualquier función polinomial.

La primera cuestión de la ficha de trabajo fue discutida y resuelta en grupos de 4 ó 5 alumnos en una clase de dos horas y se pidió que el resumen sobre la actividad fuese escrito individualmente como una tarea extraescolar. Los alumnos de este grupo ya estaban familiarizados con la calculadora gráfica y la utilizan con fines diversos. Trabajaron con mucho interés y firmeza en actividades de este tipo en las que hay que establecer relaciones por analogía, por tentativa o por error. Frecuentemente hubo discusiones entre ellos con unos niveles de exigencias muy satisfactorios.

Con la transcripción parcial y los respectivos comentarios de dos alumnos se pretende ilustrar y clarificar algunos de los argumentos ya presentados como ventajas en la utilización de la calculadora gráfica en la enseñanza de las Matemáticas.

En relación a la actividad presentada en el Anexo, se observan los procesos que Pedro utilizó para asociar la expresión d) $Y = -4x^3$ en el gráfico 5:

"Voy a comenzar por la expresión d) pues es la más simplificada"

Ante el conjunto de expresiones presentadas, Pedro escogió la que le pareció más fácil. Este alumno tuvo la posibilidad de escoger, de la misma forma que otros alumnos escogieron otras, lo que puede deberse en parte al carácter poco dirigido de la ficha de trabajo.

"La expresión d) va a pertenecer a la familia de las funciones que para el origen $y = x$ pues la ordenada en el origen es 0,0; vamos a excluir los gráficos 1, 2, 3, 6, 7. Luego tendrá que ser el gráfico 4, el 5 ó el 8. Como x^3 no es una parábola vamos a retirar el gráfico 4, quedando sólo el 5 y el 8"

En esta etapa el alumno ya hace una clasificación de las funciones, adoptando como criterio el origen del referencial de coordenadas (0,0). Esta selección le lleva a decidir cuales de los gráficos va a deshechar y los que va a continuar analizando.

"Como la función $y = x$ da un gráfico que pasa por los cuadrantes 1 y 3, la función $y = -x$ da un gráfico que pasa por los cuadrantes 2 y 4, luego la función va a pasar por los cuadrantes 2 y 4, y por eso la función d) tiene el gráfico 5"

En esta explicación, Pedro hace una analogía con la posición de una recta respecto del referencial, concretamente respecto de la pendiente. Esta explicación dada por el alumno suscita un desafío que consiste en prever el tipo de posición del gráfico de una función polinomial relativa a los cuadrantes.

"Fui a probar mediante la máquina, introduciendo la expresión $y = 4x^3$ en que el exponente 3 fue introducido con la función MATH, escogiendo la hipótesis 3, cargamos GRAPH; Como el gráfico es poco nítido tuve que utilizar ZOOM 2 cuantas veces fue necesario para poder confirmar que el gráfico es el 5"

Finalmente, Pedro aclara el papel que la calculadora gráfica tuvo en su trabajo.

Pienso que este ejemplo ilustra un aspecto importantísimo de la utilización de la tecnología: el alumno monitorizó la máquina es decir decidió cuando y cómo la utilizó. Además sacó partido de las posibilidades de ampliación de la máquina, utilizando la opción "Zoom" para mejorar el gráfico que ya había analizado.

La alumna Ana, explica cómo asoció al gráfico 6 la función presentada en la línea b) por la expresión $Y = 10x^5 + 2x - 500$:

"Con el análisis gráfico de la función $10x^5 + 2x - 500$ daba una recta paralela al eje y ; pero como sé que no hay ninguna recta en los 7 gráficos, concluí que era el rango lo que tenía que ser modificado (el rango estaba en el normal), intenté descubrir cual era el gráfico que tenía una inclinación parecida a una recta y de todos, es el gráfico 2 el que se parece más, por eso puse el rango con valores iguales al del gráfico 2, apareciendo la figura del gráfico 2. Luego concluí que la función $10x^5 + 2x - 500$ correspondía al gráfico 2."

Otro modo de confirmar fue sustituir la "x" y la "y" por los valores cero y -500 respectivamente.

$$y = 10x^5 + 2x - 500$$

$$-500 = 10(0)^5 + 2(0) - 500$$

$$-500 = -500$$

luego ésta era la ecuación de la función del gráfico 2."

Ana comenzó por introducir la expresión de la función en el menú "Y" = , y en seguida utilizó el menú GRAPH para visualizar el gráfico. Este no correspondía con lo que la alumna esperaba ya que al intentar comprender por qué el gráfico era rectilíneo modificó el "Range" para comprobar que con valores próximos a los presentados en el gráfico se obtenía el gráfico 6. Esta alumna terminó la explicación utilizando un proceso analítico de determinación de la ordenada en el origen de la función polinomial correspondiente.

COMENTARIOS FINALES

En cuanto a las potencialidades educativas de la calculadora gráfica hay que resaltar la amplitud de posibilidades de análisis y de investigaciones que serían imposibles con un trazado manual de gráficos. La rapidez, el volumen de cálculo y la representación gráfica facilitan la práctica de unas Matemáticas más experimentales, con una mayor ligazón con la realidad y por tanto con más significado para el alumno que aprende haciéndolas. Las actividades de visualización, conjetura y ensayo, perfectamente accesibles en las representaciones gráficas, son auxiliares preciosos de la actividad matemática en la medida en que aprovechan y confirman aspectos intuitivos, ayudando en la formulación de hipótesis y en los procesos demostrativos.

Como condiciones facilitadoras de integración y apropiación de este instrumento hay que resaltar la imprescindibilidad de su utilización en el currículo de Matemáticas en la Enseñanza Secundaria. Consecuentemente debe formar parte del equipamiento de las escuelas.

La necesidad de la formación de profesores, inicial y continua, que incluyan componentes de características técnico-pedagógicas y de reflexión sobre las experiencias en curso, parece ser indisociables de las condiciones anteriores.

BIBLIOGRAFIA

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMATICA (1988). Renovação do Currículo de Matemática. Lisboa: APM.

ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMATICA (1990). Parecer Relativo aos Projectos de Programas de Matemática para os 1º, 2º e 3º Ciclos de Ensino Básico. Lisboa: APM.

BENAVENTE, A. y PONTE, J. (1989). A Escola e os Audio-Visuais. Lisboa: Projecto Infra, DEFCUL.

BISHOP, A.J. (1991). Mathematical Enculturation. Dordrecht: Kluwer.

COCKROFT, W.H. (1982). Mathematics Counts. Londres: Her Majesty's Stationary Office.

DAVIS, J. y HERSH, R. (1982). The Mathematical Experience. Boston: Penguin Books.

DAVIS, J. y HERSH, R. (1987). Descartes' Dream. Boston: Houghton Mifflin Company.

DEMANA, F. y WAITS, B. (1990). "Enhancing Mathematics Teaching and Learning Through Technology". In Cooney, T. (Ed.). Teaching and Learning Mathematics in the 1990' (1990 yearbook). Reston: NCTM.

ECKERT y otros (1989). "Graphing Calculator in the Secondary Mathematics Classroom". In Monograph # 21. Michigan: Michigan Council of Teachers of Mathematics.

ESGALHADO, A. (1990). Os computadores e a mudança educacional. estudo de uma escola Preparatória. Lisboa: Projecto Minerva-DEFCUL-Universidade de Lisboa.

MINISTERIO DE EDUCAÇÃO (1991). Programa de Métodos Quantitativos e de Matemática, Ensino Secundário. Lisboa: DGEBS.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1980). Un Agenda for Action. Reston: NCTM.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1989). Everybody Counts: A Report on the Future of Mathematics Education. Washington: National Academy Press.

NATIONAL RESEARCH COUNCIL (1990). Reshaping School Mathematics: A Framework for Curriculum. Washington: National Academy Press.

PONTE, J. & al. (1984). Actas do Encontro sobre microcomputadores no ensino da Matemática. Lisboa: DEFCUL.

PONTE, J. (1990a). Teacher's perceived Role of the Computer in Mathematics Education. México: Proceedings PME14.

PONTE, J. & al (1991). Computadores no Ensino da Matemática, uma coleção de estudos de caso. Lisboa: Edição conjunta da Associação de Professores de Matemática e Projecto Minerva-DEFCUL-Universidade de Lisboa.

RUTHVEN, K. (1990). "The Influence of Graphic Calculator use on Translation from graphic to Symbolic Forms". In Educational Studies in Mathematics 21: 431-450. Holanda: K.A.P.

RUTHVEN, K. (1992). Graphic Calculator in Advanced Mathematics. Cambridge: NCET.

VELOSO, M. (1992). Novas Tecnologias de Informação, um programa de formação de professores de Matemática. Tese de mestrado. Lisboa: DEFCUL.

ANEXO I

Ficha de trabajo

FUNCIONES POLINOMIALES - LIMITES

* Asocia cada una de las expresiones a uno de los gráficos del Anexo. Explica cómo has actuado y tus razonamientos.

* Investiga cual será el límite de cada una de las funciones polinomiales presentadas analítica y gráficamente, cuando $|X| \rightarrow +\infty$

* ¿Cuál será el diseño general del gráfico de una función polinomial cualquiera?. Explica tus hipótesis y conclusiones.

a) $Y = -2X^4 + X^2 - 3X + 2$

b) $Y = 10X^5 + 2X - 500$

c) $Y = -2X^2 + 5X + 7$

d) $Y = -4X^3$

e) $Y = -4X^4 - 10X + 5$

f) $Y = -4X^4 + 10X$

g) $Y = 5X^3 - 7X^2 + 15X$

h) $Y = -2X^5 + 3X + 15$

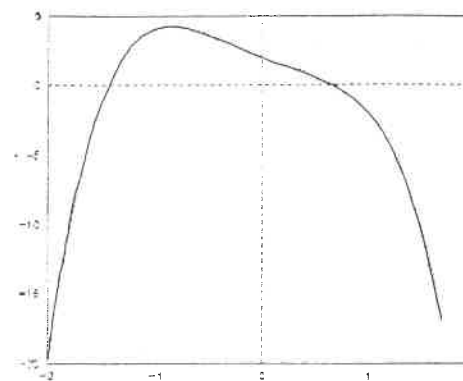


Gráfico 1

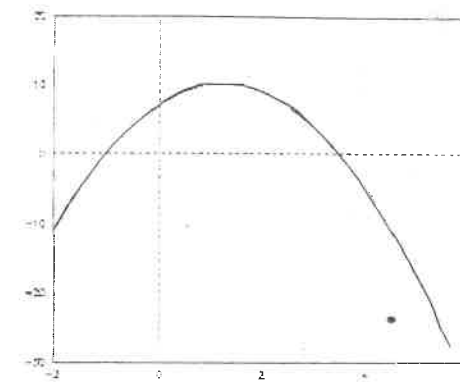


Gráfico 2

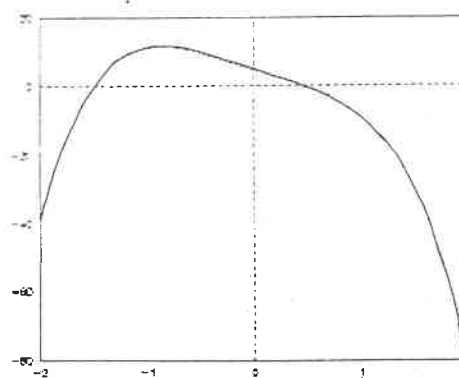


Gráfico 3

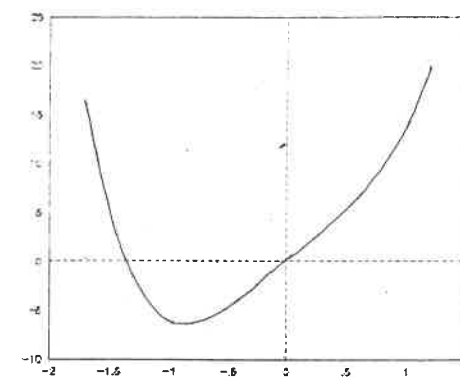


Gráfico 4

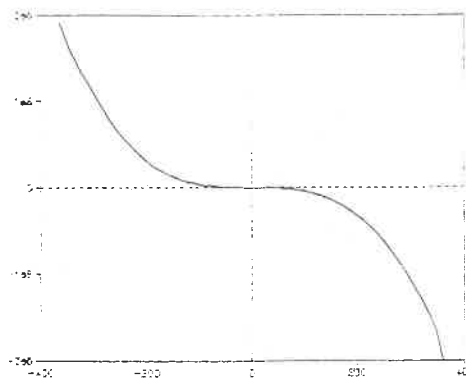


Gráfico 5

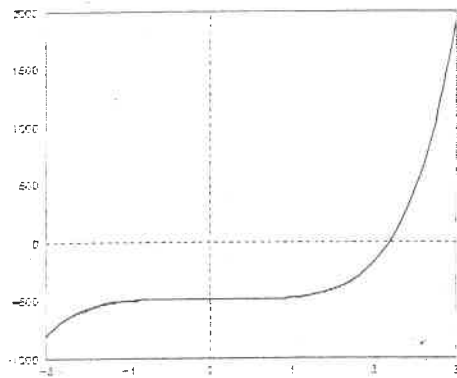


Gráfico 6

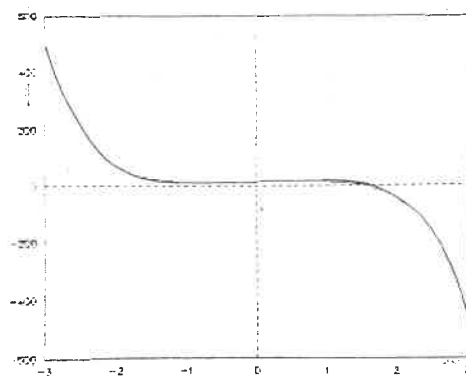


Gráfico 7

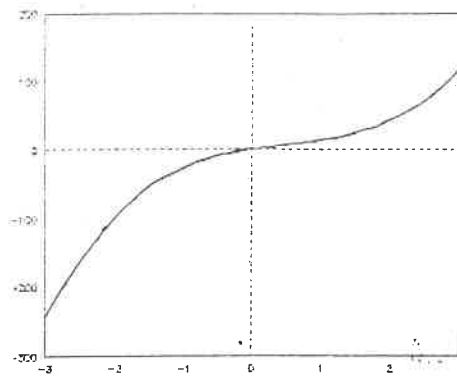


Gráfico 8

¿QUE MATEMATICAS DEBERIAMOS ENSEÑAR EN LA SECUNDARIA DEL AÑO 2000?

Jose R. Vizmanos Buelta. Catedrático de Bachillerato. Madrid

1. PUNTO DE PARTIDA

Decía el Profesor Santaló en el I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática *"la misión de los educadores es preparar a las nuevas generaciones para el mundo que tendrán que vivir. Es decir impartirles las enseñanzas necesarias para que adquieran las destrezas y habilidades que van a necesitar para desenvolverse con comodidad y eficiencia en el seno de la sociedad con que se van a encontrar al terminar el período escolar"*.

Ante el mundo tan rápidamente cambiante que nos ha tocado vivir, los profesores debemos tener, en primer lugar, un conocimiento profundo del mundo exterior y de su posible evolución en los próximos años, de esta forma, será más fácil adecuar nuestras enseñanzas para que permitan a nuestros alumnos mejorar su manera de actuar en el mundo que les toque vivir. Esto no solo será provechoso para los propios alumnos sino que lo será también para toda la sociedad. Para ello, deberemos seleccionar de entre toda la matemática existente aquella que pueda ser más útil a nuestros alumnos según los distintos niveles.

Para la elección de los contenidos que debemos incluir en nuestras programaciones hemos de tener muy presente el doble aspecto, siempre presente, de la matemática, su valor formativo y su valor informativo.

1. El **valor formativo** de la matemática fomenta la capacidad creadora, el desarrollo del poder de abstracción, el desarrollo del rigor lógico, el estímulo de la automatización, etc.

2. El **valor informativo** de la matemática permite al alumno resolver problemas y situaciones de la vida diaria. Pasando a ser la matemática una **herramienta** al servicio de otras disciplinas.

Ninguno de los dos aspectos debemos descuidar, pues tan importante es uno como otro. Tan peligroso sería dar una matemática muy teórica y desligada de la realidad del alumno, como dar una serie de técnicas muy útiles para la vida pero que el alumno no entiende nada absolutamente de lo que hace, convirtiéndose en un robot.

Además al tener la E.S.O un carácter terminal es muy posible, que para muchos de nuestros alumnos, los conocimientos matemáticos que adquieran en esta etapa sean los únicos que van a recibir en su formación, por tanto, hemos de conseguir que sean suficientes para enfrentarse con el mundo que se encuentren.

2. ¿PODEMOS SUPRIMIR ALGO DE NUESTROS ACTUALES CURRÍCULOS?

A la hora de contestar a esta pregunta es conveniente realizar, previamente, una profunda reflexión sobre: ¿qué es necesario y qué es superfluo en nuestros actuales currículos?, pues muchos procedimientos, totalmente innecesarios, siguen figurando en los programas, mas por costumbre o tradición que por la utilidad que tengan hoy en día. En cualquier caso apliquemos siempre la siguiente máxima: **es preferible saber poco y bien que mucho y mal.**

¿Es necesario fatigar a nuestros alumnos con pesados cálculos con polinomios y expresiones algebraicas complicadas?. Las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones complicados, es preferible resolverlos mediante métodos gráficos, pudiendo utilizar la idea de aproximación con calculadoras gráficas. De los logaritmos y las funciones exponenciales, lo importante es que comprendan el concepto y el cálculo lo realizaremos a través de calculadoras, incluso la simple visión de la gráfica en calculadoras gráficas, permitirá comprender mejor gran parte de las propiedades de estas funciones. ¿Qué decir de la operación de racionalizar fracciones?. Con respecto a la trigonometría, parece mucho más importante detenerse, el tiempo que sea necesario, para que conozcan los conceptos que perder tanto tiempo en tediosos problemas del tipo, "*Si $\text{sen } a = -0,3$, calcula $\text{tag } 5 a$* ", para los cuales es necesario realizar un montón de cálculos con la consiguiente pérdida de tiempo y fiabilidad, cuando con la calculadora científica se resuelve apretando unas cuantas teclas convenientemente. ¿Y qué decir de la representación de gráficas?, tarea ardua y tediosa que en ocasiones servía para seleccionar alumnos en los exámenes de Ingenierías, pero que hoy en día dada la disponibilidad de tecnología gráfica, hace totalmente innecesaria su representación a mano, aumentando la importancia de su interpretación. Téngase en cuenta que en la mayoría de las ocasiones los alumnos se van a encontrar con gráficas obtenidas por aparatos, encefalogramas, cardiogramas, termogramas, audiogramas, climogramas, etc. y lo que tendrán que hacer será interpretarlas.

Lo mismo ocurre con las integrales definidas, lo importante es el concepto, pero el cálculo es sumamente sencillo con cualquier calculadora programable.

3. HABRA QUE AÑADIR ALGO?

El actual DCB para la ESO incluye, desde nuestro punto de vista muy acertadamente, **ideas básicas sobre el azar, la probabilidad y la estadística.** Conviene cambiar el carácter excesivamente determinista de nuestros actuales currículos, de manera que el alumno se encuentre capacitado para medir distintos grados de incertidumbre.

La **teoría de la computación** tanto en su uso como en su fundamento ha de formar parte de los próximos currículos. Tenemos que educar a nuestros alumnos en el pensamiento informático pues el mundo que a ellos les tocará vivir estará lleno de botones, teclas y pantallas. Del mismo modo, debemos enseñarles el planteo y resolución de problemas mediante calculadoras programables.

Es muy importante educar al alumno a que aprenda a **estimar** los resultados que ha de obtener mediante los métodos de cálculo que utilice

Sería conveniente tratar, de forma elemental, la **teoría del muestreo** con el fin de que les sirva para poder entender: encuestas de opinión, sondeos de intención de voto, grados de audiencia de ciertos programas de radio y de televisión y de esta forma, con bases sólidas, poder asignar distintos grados de credibilidad a las informaciones aportadas por los medios de comunicación social.

También se debería educar a los alumnos en la **teoría de grafos** muy utilizada en otros campos del saber y que permite simplificar situaciones muy complejas.

Y por encima de todo hemos de desarrollar **la creatividad.** Hoy en día es muy conocida la forma de enseñanza de la matemática a través de la resolución de problemas, lo cual no es nuevo, ya que desde hace muchos siglos la humanidad ha dedicado todos sus esfuerzos a la búsqueda de soluciones a los problemas que se iban planteando, pero no deja de ser muy importante que se analicen distintas estrategias del pensamiento matemático llegando incluso a explicitarse mediante la elaboración y análisis de protocolos.

4. USO DE NUEVAS TECNOLOGIAS

Con el uso sistemático en nuestra aulas de determinados elementos de cálculo como pueden ser las calculadoras, las calculadoras gráficas y los ordenadores que permiten realizar cálculos de una manera más segura y rápida, podremos liberar un gran número de horas para dedicarnos, de verdad, a enseñar matemáticas.

Esto necesariamente dará lugar a una nueva figura de Profesor, más actual y acorde con los tiempos que nos toca vivir. Es impensable, por ejemplo, que las calculadoras hayan entrado en la sociedad y desgraciadamente no hayan entrado, de una manera general, en las clases de Matemáticas.

La aparición de las calculadoras, las calculadoras gráficas y los ordenadores tiene que influir fuertemente en nuestras aulas, de forma que se trate de aprovechar al máximo la potencialidad de estos instrumentos. Son muchas las pegas que se venían poniendo a estas herramientas como el coste, la novedad, la falta de preparación del profesorado, incluso la hostilidad por parte de algunos.

Hemos de cambiar el método tratando más la comprensión de los procesos matemáticos que la ejecución de rutinas de cálculo, que desgraciadamente todavía, ocupan gran parte del tiempo y de las energías de nuestros alumnos, con la sensación de cansancio e inutilidad por el tiempo perdido. Tenemos por tanto, que prepararles para que tengan un dialogo inteligente con la máquina.

Que nadie piense que al incorporar en nuestras enseñanzas, técnicas de las que difícilmente el alumno podrá prescindir en un futuro, estemos construyendo un modelo de hombre-robot, haciendo que actúe como una maquina mediante reflejos programados. Muy al contrario estamos tratando de que el alumno se sirva de los descubrimientos de su civilización y se encuentre con un espíritu abierto a los nuevos cambios que sin lugar a dudas le va a tocar vivir. Téngase en cuenta que antiguamente una persona ejercía durante toda su vida una determinada profesión, en cambio, hoy en día, la sociedad actual es tan cambiante que hemos de dotar a nuestros alumnos de una capacidad de adaptación y un espíritu abierto tal, que le permita desarrollar los 4 o 5 tipos de trabajos distintos que según todos los estudios le tocara desempeñar a lo largo de su vida. Hemos de **enseñar a aprender**, pues el alumno tendrá que hacer eso, por si mismo, cuando se le deje de la mano.

Por otra parte, las nuevas tecnologías pueden servir para formalizar conceptos, por ejemplo: El concepto de límite, de gran importancia en la matemática, es muy difícil para los alumnos, pero se puede llegar muy fácilmente a la idea de tendencia mediante una calculadora. Muy rara tiene que ser una sucesión para que el término un millón no se parezca mucho al límite.

Para aquellos que se encuentren en posiciones contrarias al uso de las calculadoras en la escuela, nos remitimos al siguiente comentario, no falto de ironía de **E. Maier** "Es cierto que algunos educadores sostienen que los estudiantes necesitan conocer procedimientos de cálculo. Y tienen razón, los estudiantes necesitan conocerlos pero no debido a su importancia matemática, sino porque ayudan a tener éxito en la escuela. Dicho sencillamente, estos procedimientos son destrezas para la supervivencia escolar".

A modo de ejemplo citaremos algunas de las razones para el uso de las calculadoras:

- Permiten concentrarse en el proceso de resolución de problemas en lugar de hacerlo en los cálculos asociados a los problemas.
- Dan oportunidad de acceder a Matemáticas que estén más allá de las destrezas de cálculo.
- Facilitan la exploración y desarrollo de conceptos tales como: estimación, simulación, aproximación, propiedades, conjeturas, ensayos, etc.

- Permiten experimentar con ideas matemáticas y descubrir regularidades.
- Ayudan a realizar los tediosos cálculos que surgen al trabajar con datos reales en la resolución de problemas.
- Permiten comprobar los resultados obtenidos por los algoritmos tradicionales.
- Facilitan el planteamiento de problemas abiertos, formulando hipótesis que es uno de los rasgos más formativos de la actividad matemática.

Resulta algo triste, que todavía en el año 1993 tengamos que estar tratando de convencer sobre la importancia de estas tecnologías, cuando hace más de 15 años el Profesor **Santaló** decía: *La introducción de la calculadora de bolsillo en todos los niveles de la enseñanza ha de ser la característica principal de la Educación Matemática en la década de los 80.*

Reflexionemos sobre el tiempo que hemos perdido y vayamos, cuanto antes, con espíritu abierto y actual a la vanguardia de los Profesores que utilicen estas tecnologías. Que cuando llegue el año 2000 no tengamos que seguir repitiendo palabras como estas.

BIBLIOGRAFIA

- COCKCROFT INFORME *LAS MATEMATICAS SI CUENTAN*. MEC 1985.
- FAIR, J & BRAGG, S. *USING THE GRAPHICS CALCULATOR. Algebra 1*, Prentice Hall, New Jersey 1992.
- FIELKER, D. *USANDO LAS CALCULADORAS CON NIÑOS DE DIEZ AÑOS*. Generalitat Valenciana.
- FINCH, J.K. & LEHMANN, M. *EXPLORING CALCULUS WITH MATHEMATICA*. Addison-Wesley. 1992
- GIRAD, J. *A GUIDE TO USING THE TEXAS INSTRUMENTS TI-81 GRAPHICS CALCULATOR IN STATISTICS*. Dellen Publishing Company. 1992
- GRUPO AZARQUIEL. *LA CALCULADORA DE BOLSILLO COMO INSTRUMENTO PEDAGOGICO*. ICE UAM.
- HALL, B & FABRICANT, M. *USING THE GRAPHICS CALCULATOR. Algebra 2*. Prentice Hall, 1992
- HERNAN F. & CARRILLO E. *RECURSOS EN EL AULA DE MATEMATICAS*. Edit. Síntesis. Madrid 1988.
- HOWSON, A.G. & WILSON, B. *LAS MATEMATICAS EN PRIMARIA Y SECUNDARIA EN LA DÉCADA DE LOS 90*. ICMI. Kuwait 1986. Mestral. Valencia 1987.
- KELLY, B. *USING TI-81 GRAPHICS CALCULATOR TO EXPLORE FUNCTIONS*. Ontario 1991.

KELLY, B. *USING TI-81 GRAPHICS CALCULATOR TO EXPLORE STATISTICS*. Ontario 1992.

NCTM. *ESTANDARES CURRICULARES Y DE EVALUACION PARA LA EDUCACION MATEMATICA*. National Council of Teachers of Mathematics. S.A.E.M. THALES.

SANTALO, L.A. *ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA EN LA ESCUELA MEDIA* (Docencia, Buenos Aires, 1981)

SANTALO, L.A. *LA EDUCACION MATEMATICA HOY*. Teide. Barcelona. 1975.

VIZMANOS, J.R. *PROGRAMAS EN BASIC PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS* (*Análisis Matemático y Calculo de Probabilidades y Estadística*). Madrid 1984.

VIZMANOS, J.R. *PROGRAMAS EN BASIC PARA LA RESOLUCION DE PROBLEMAS* (*Algebra y Geometría*). Madrid 1984.

WAITS, B. K. & DEMANA, F. *EXPLORING CALCULUS WITH THE TI-85 POCKET COMPUTER*. Addison-Wesley. 1992.

WOLFRAM, S. *MATHEMATICA: A System for Doing Mathematics by Computer*. 1991

MESA Nº 5

RESOLUCION DE PROBLEMAS

Coordinador/Ponente: D^a. Mary Luz Callejo de la Vega

PRESENTACION DE UNA PROPUESTA METODOLOGICA PARA TRABAJAR LA RESOLUCION DE PROBLEMAS: JUSTIFICACION Y LIMITACIONES

Mary Luz Callejo de la Vega del Dpto. de Matemáticas del I.E.P.S.

INTRODUCCIÓN

La resolución de problemas es una corriente en auge a nivel internacional desde la década de los 80. Pero bajo esta denominación se esconden diversas concepciones acerca de lo que es un "problema" en el contexto escolar y de cómo se puede enseñar a resolver problemas. Si bien es cierto que en los últimos años se han puesto en marcha proyectos y programas para trabajar los procesos del pensamiento matemático a través de la resolución de problemas, también lo es que en ocasiones se ha trivializado esta corriente, limitándola a incorporar problemas en materiales curriculares ya existentes y concebidos con otro enfoque, o a ejercitar a los alumnos y alumnas en las heurísticas específicas de resolución de problemas, como si se tratase de la resolución de ejercicios.

En esta ponencia hablaré de "problemas" para hacer referencia a cuestiones matemáticas complejas para los alumnos/as a quienes se les proponen, cuya resolución exige necesario invertir esfuerzo, tiempo, energía, ingenio, intuición, creatividad y afectividad, sin que ello garantice el éxito de la tarea, y expondré y discutiré si se puede enseñar a resolver problemas. Centraré mi intervención en esta pregunta que ya se hicieron célebres matemáticos preocupados por la enseñanza de esta disciplina como George Polya o Hans Freudenthal, y que propusieron modos de intervención educativa que podían favorecer este aprendizaje. Describiré una metodología que trata de favorecer en los alumnos y alumnas las predisposiciones mentales y los hábitos intelectuales deseables para resolver problemas, centrada en:

- el desarrollo de los procesos de pensamiento,
- la reflexión sobre dichos procesos y
- la comunicación de ideas.

Esta metodología la he puesto en práctica en un Club matemático (Callejo, 1988, 1990) donde un grupo reducido de alumnos y alumnas se han dedicado por gusto y voluntariamente a la resolución de problemas. Dicha aplicación me ha permitido constatar el alcance y las limitaciones de la metodología en cuestión.

1. ¿SE PUEDE ENSEÑAR A RESOLVER PROBLEMAS?

Para tratar de responder a la pregunta de si se puede enseñar a resolver problemas expondré de manera crítica cuatro aspectos implicados en favorecer este aprendizaje:

- a) la enseñanza de heurísticas;
- b) el modo de trabajo de los alumnos y alumnas;
- c) la manera de valorar el trabajo de resolución;
- d) las ideas de los alumnos y alumnas sobre la actividad matemática.

a) Enseñanza implícita de heurísticas versus enseñanza explícita de heurísticas.

G. Polya (1965) dio una lista de estrategias heurísticas como "hacer un dibujo o un esquema de la situación", "suponer el problema resuelto", "imaginar un problema más sencillo", "buscar alguna simetría o regularidad", que a su juicio son sugerencias naturales, sencillas, obvias y de sentido común que se utilizan frecuentemente en la resolución de problemas y que él trató de hacer explícitas. Esta lista se podría completar con otras estrategias que son más específicas de las distintas ramas de la matemática, como la Geometría o la Teoría de números.

Para A.H. Schoenfeld (1985) las estrategias descritas por G. Polya son etiquetas que designan familias de estrategias semejantes y, a diferencia de los algoritmos, no son prescriptivas sino descriptivas. Esto quiere decir que mientras un algoritmo indica minuciosamente lo que hay que hacer, paso a paso, para aplicarlo, sin dejar lugar a que quepa ninguna duda sobre su aplicación, estas estrategias describen de manera general un procedimiento de resolución, pero una vez seleccionada una de ellas hay que decidir cómo usarla. Por ejemplo, la estrategia "imaginar un problema más sencillo" se puede emplear de muchos modos, según que un parámetro n juegue en el problema un papel relevante (entonces se puede dar a n los valores 1, 2, 3, etc.), que trate de polinomios (en este caso quizá convenga examinar un polinomio que se pueda factorizar fácilmente), o de conceptos espaciales (entonces se podría trabajar con una figura que presente más regularidades o con una situación sometida a menos condiciones), etc. Por tanto aplicar esta estrategia supone tomar una serie de decisiones:

- pensar en usarla (lo que no es trivial);
- decidir qué versión de la estrategia utilizar;
- buscar problemas apropiados más sencillos que sean útiles para resolver el problema;
- hacer la elección correcta del problema más sencillo;

- resolver el problema más sencillo buscando una forma de utilizar con éxito su solución para poder encontrar la solución del problema propuesto.

W.A. Wickelgren, en su libro "How to Solve Problems" (Cómo resolver problemas) de 1974, sostiene que tras una enseñanza explícita de una heurística particular y tras haberla aplicado de diversas formas, el individuo está preparado para utilizarla. A juicio de A.H. Schoenfeld (1979) esta teoría es incompleta pues además de seleccionar una heurística adecuada se debe usar una estrategia directiva, es decir, es necesario regular el proceso de aplicación de dicha heurística: no se trata sólo de hacer, sino de reflexionar sobre lo que se está haciendo y de cómo ello puede ayudar en la resolución del problema.

Las investigaciones acerca de si la enseñanza explícita de heurísticas según el modelo:

- describir una heurística particular,
- poner un ejemplo de aplicación de la heurística a un problema,
- proponer a los alumnos problemas para que se ejerciten en su uso.

Puede mejorar la habilidad para resolver problemas, son controvertidas. Por un lado algunas investigaciones muestran que cuando los estudiantes conocen diversas estrategias heurísticas tienen más recursos para abordar la resolución de un problema, de modo que si no han elegido una estrategia de forma acertada, conocen otros modos de afrontar la tarea (cf. Suydam, 1987); por otro lado aún no hay una evidencia clara de que se pueda mejorar la capacidad para resolver problemas enseñando sólo heurísticas. Sin embargo, si las heurísticas se enseñan en el contexto de una estrategia directiva, las dificultades para aplicarlas se pueden superar (cf. Schoenfeld, 1979).

A mi parecer el modelo basado en la enseñanza explícita de estrategias heurísticas tiene varios puntos débiles:

- no tiene en cuenta los procesos de tipo metacognitivo presentes en la resolución de un problema, como por ejemplo la regulación de la actividad por medio de una estrategia directiva;
- no considera que un problema se puede resolver de distintos modos utilizando estrategias diversas e incluso varias estrategias a la vez;
- por último, este modelo ahorra el trabajo de elegir la estrategia apropiada cuando se enseña a los alumnos a ejercitarse en una estrategia específica usándola de diversos modos.

Pero, ¿se puede enseñar algo más que heurísticas particulares? Autores como G. Polya, A. Schoenfeld, H. Freudenthal y G. Glaeser se han planteado la pregunta de si se puede enseñar la heurística (en singular), esto es, el arte

de elaborar estrategias de resolución de problemas. H. Freudenthal (1983) ha denominado "tácticas" a los consejos de Polya tales como "considerar un caso particular" o "suponer el problema resuelto", etc. y las ha distinguido del comportamiento general en la búsqueda de la solución de un problema que ha denominado "estrategias". Piensa que las tácticas se pueden enseñar, pero difícilmente las estrategias:

"Mi idea acerca de la enseñanza de las estrategias es tratar de que una vez que se resuelve el problema se tome conciencia inmediatamente de la estrategia que se ha seguido de forma que se guarde en la memoria pero de una forma general como para no atenerse a ella al pie de la letra. Las estrategias sólo son válidas si se tiene en cuenta la flexibilidad para su aplicación. Más que apodóticamente deberían ser aprendidas heurísticamente. Y esto tiene que ver con el aprendizaje de la heurística según mi terminología. Respecto al problema de la enseñanza de la heurística debo decir y al mismo tiempo confesar que no lo he resuelto".

Por su parte G. Glaeser (1980) dice:

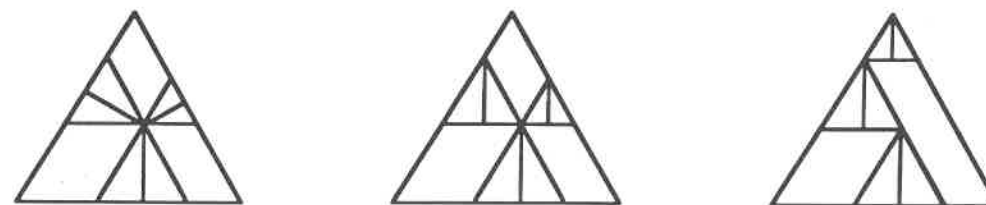
"Todo lo que se puede hacer es entrenar a los estudiantes para que resuelvan problemas variados y para que saquen consecuencias de cada tentativa. Esta preparación se podrá considerar eficaz si el estudiante llega a resolver más a menudo y más rápido los problemas que les serán propuestos. El entrenamiento consistirá pues, tras una sesión de trabajo de investigación de una o dos horas, en examinar, analizar y criticar el camino seguido".

Mi opción respecto de la enseñanza de heurísticas es proponer problemas a los estudiantes con la intención de describir las heurísticas en la medida en que los sujetos las hayan ensayado y aplicado a estos problemas, pasando así de un uso implícito a una descripción explícita de las mismas. Soy consciente de que al resolver un problema se pueden aplicar varias heurísticas, ya sea porque se puede resolver de distintos modos, ya sea porque se precise una combinación de ellas.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema:

"Una amiga mía se ha comprado una parcela que tiene forma de triángulo equilátero y que tiene por lindes tres carreteras. ¿Dónde debe construir su casa para que al hacer tres caminos que vayan desde ésta a cada una de las carreteras le resulte lo más barato posible?"

Se empieza proponiendo el problema a los estudiantes. Normalmente éstos comienzan examinando casos particulares (ortocentro, vértices), lo que les conduce a algunos a formular la siguiente conjetura: "la casa puede emplazarse en cualquier lugar porque la suma de distancias de cualquier punto del triángulo a los lados parece constante". A continuación intentan justificarla de varios modos: a) mostrando la conjetura para los puntos de los lados o de las alturas y reduciendo el caso general a uno de estos casos particulares; b) trazando segmentos que unen un punto cualquiera del triángulo con los vértices e intentando establecer una relación entre los triángulos dibujados en la figura; c) formalizando el problema en el dominio de la Geometría analítica y resolviéndolo de manera algebraica; d) trazando por un punto cualquiera del triángulo tres paralelas a los lados y obteniendo la solución de manera gráfica (figura 1) gracias a que las tres alturas de un triángulo equilátero son iguales:



El proceso de reflexión, análisis y exposición de las vías seguidas para resolverlo, permite poner de manifiesto no sólo las heurísticas empleadas (resolver primero un problema más sencillo, elegir una notación adecuada, trazar líneas auxiliares para descomponer la figura y establecer nuevas relaciones), sino también cómo surgieron las ideas y cuáles fueron las dificultades y los bloqueos encontrados en el proceso.

b) Comunicación de los procesos de pensamiento matemático versus trabajo individual con lápiz y papel

"Las matemáticas no se hablan, se escriben"; "las matemáticas no se discuten, se aceptan" ... son ideas acerca de la enseñanza de las matemáticas que dan lugar a plantear exclusivamente actividades individuales de "lápiz y papel", dejando de lado otras como los trabajos en grupo, las discusiones en pequeño o en gran grupo y las puestas en común. Sin embargo la comunicación del pensamiento matemático es importante para aprender a resolver problemas por las siguientes razones:

- porque una de las condiciones básicas para que se produzcan aprendizajes en procesos tan complejos como la resolución de problemas es facilitar un clima de libertad para animar a los alumnos a expresar sus ideas. Además como afirma D. Pimm (1990):

"Decir las cosas en voz alta tiene una fuerza especial y, con frecuencia, las ideas sólo pueden examinarse de forma adecuada cuando se exteriorizan en cierta medida".

- porque conocer mejor el funcionamiento de la mente de otras personas es una manera de mejorar la habilidad para resolver problemas por dos motivos principales: primero porque se pueden descubrir nuevas formas de aproximarse a un problema, de percibirlo, de atacarlo; segundo porque permite constatar que los otros también tienen bloqueos, vacilaciones, fallos, etc, lo que debilita el miedo a "fracasar" en esta tarea.

- porque tratar de convencer a otros de que una conjetura es cierta es una de las formas de experimentar la necesidad de la demostración en el dominio matemático.

Para favorecer esta comunicación es necesario ir introduciendo un vocabulario básico para que los alumnos y alumnas puedan expresar sus ideas matemáticas con conceptos como "conjetura", "demostración", "contraejemplo", etc., para que empleen las denominaciones de algunas estrategias heurísticas como "suponer el problema resuelto", "buscar pautas y regularidades", "resolver un problema más sencillo" o de los diversos tipos de razonamiento en matemáticas: "deductivo", "inductivo", "por casos", "por analogía", "regresivo", "por reducción al absurdo", etc.

Mi propuesta es introducir progresivamente un vocabulario básico que permita hablar de forma clara y correcta sobre los procesos del pensamiento matemático y favorecer el trabajo en grupo, la puesta en común y la discusión de ideas como medios de explicitar heurísticas, bloqueos, intuiciones y formas de percibir los problemas.

c) Procesos versus productos

Algunas actividades matemáticas se pueden plantear razonablemente en términos de "productos" en el sentido de que su finalidad es que el alumno o alumna obtenga una solución correcta por la aplicación de un algoritmo, el planteamiento y la resolución de una ecuación o la construcción de una figura. Sin embargo creo que la resolución de problemas no se puede plantear de este modo pues es una tarea compleja que exige un trabajo serio de familiarización con la situación, de búsqueda y de selección de estrategias, tras el cual la aplicación de una o varias de estas estrategias no conduce

necesariamente a la solución. En el proceso de resolución el alumno o la alumna puede llegar a comprender el problema, a concebir estrategias que pueden ser válidas, y sin embargo no llegar a obtener la solución.

La valoración de los procesos tiene importantes implicaciones en la evaluación de la resolución de problemas pues ésta no puede ser puntual ni centrada sobre un solo aspecto del proceso. Ello exige al profesorado invertir más tiempo y atención que en evaluar un resultado. Pero para conocer y valorar estos procesos es necesario que quede alguna traza de los mismos, ya sea escrita o verbal, a través de los protocolos de resolución.

Mi propuesta es que los alumnos y alumnas elaboren un protocolo de resolución que les permita tomar conciencia de sus procesos de pensamiento, exponerlos al grupo y darlos a conocer al profesor o profesora.

d) Inculturación matemática

Los alumnos y alumnas tiene unas ideas previas acerca de lo que es la matemática y la actividad matemática, originadas en parte por la "pragmática del cuestionamiento escolar" (cf. Adda, 1985), esto es, por los presupuestos de la comunicación en clase de matemáticas que difieren de los presupuestos del discurso habitual: mientras que en éste las cuestiones suelen ser pertinentes y quien pregunta suele ignorar la respuesta a la pregunta que plantea, las cuestiones matemáticas propuestas en clase pueden ser absurdas y el profesor conoce una respuesta y espera un tipo de respuesta; además de ello, de la respuesta depende una evaluación, la pregunta se refiere a un programa escolar y habitualmente se deben utilizar todos los datos para contestar, datos que por otra parte suelen ser suficientes para encontrar la respuesta esperada por el profesor o profesora. Además, si los alumnos y alumnas sólo están habituados a trabajar problemas rutinarios o ejercicios, sus ideas acerca de la actividad matemática están mediatizadas por este tipo de tarea (cf. Schoenfeld 1989). Entre estas ideas destacamos las siguientes (cf. Callejo, 1992):

- Las actividades matemáticas se resuelven normalmente en pocos minutos si se conocen los conceptos y destrezas presentados en clase por el profesor. Quedarse "pegado" o "en blanco" durante un tiempo, significa perder el tiempo.

- Para responder las cuestiones matemáticas se busca directamente una estrategia de resolución y se profundiza en esa dirección. Si no se tiene éxito se abandona el trabajo definitivamente.

- La resolución de una cuestión matemática se acaba cuando se encuentra la solución.

- El resultado es más importante que el proceso seguido. Si no se encuentra la solución se ha fracasado.

Estas convicciones dan lugar a comportamientos que no ayudan a los estudiantes a intentar resolver problemas con ciertas esperanzas de éxito, por las siguientes razones:

- Si los estudiantes piensan que un problema se resuelve en pocos minutos, se sentirán desanimados y lo abandonarán si al cabo de un cierto tiempo no han encontrado la solución; sin embargo, la resolución de un problema exige una inversión importante de tiempo y mucha perseverancia en la tarea.

- Si los estudiantes creen que la resolución de un problema sólo exige la aplicación automática y directa de saberes y habilidades, invertirán más tiempo en "hacer" que en reflexionar sobre el problema, sobre lo que hacen y sobre para qué les sirve lo que están haciendo

- Si los estudiantes no son capaces de revisar el camino seguido y consideran que un problema es una cuestión cerrada, no le sacarán al proceso todo el jugo posible tratando, por ejemplo, de generalizar el resultado o de buscar problemas análogos que se resuelvan de la misma forma.

Mi propuesta es tratar de hacer explícitas las ideas de los alumnos y alumnas acerca de la resolución de problemas utilizando cuestionarios o aprovechando los procesos de discusión de los problemas, e intentando desestabilizar en ellos aquellas convicciones que no favorezcan las actitudes adecuadas para resolver problemas, diseñando situaciones didácticas adecuadas a tal fin.

2. PROPUESTA METODOLÓGICA PARA TRABAJAR LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el Club matemático:

1. He propuesto a los estudiantes **problemas** con distinto grado de dificultad, en los que los conocimientos matemáticos a aplicar fueran sencillos y que se prestaran a la particularización y a la generalización.

2. He pedido a los estudiantes que traten de registrar el proceso de resolución con la mayor cantidad posible de datos, mediante un **protocolo escrito**.

3. He pedido a los alumnos que **reflexionen sobre el proceso seguido** que habían registrado en el protocolo.

4. He moderado **puestas en común y discusiones en grupo** acerca del proceso de resolución de cada problema. De esta forma trataba de hacer explícitas aquellas ideas, estrategias, razonamientos, bloqueos, etc, presentes en el proceso de resolución.

a) Elaboración de un protocolo de resolución

Los estudiantes han elaborado protocolos dividiendo la hoja de resolución en dos columnas, una hacia de borrador y en la otra trataban de explicar: las ideas que consideraban importantes en el curso de la resolución, lo que intentaban hacer y su parecer sobre todo ello. En la resolución de problemas en grupo un estudiante hacía de secretario y registraba el proceso. Poco a poco los estudiantes se han ido habituando a realizar estos protocolos que les exigían un esfuerzo adicional en la resolución de los problemas, pero gracias a ello la retrospectiva ha sido más fácil de hacer y se ha introducido un elemento de control en el proceso (cf. Schoenfeld, 1985).

b) Reflexión sobre el proceso seguido

En el Club matemático he invitado a los estudiantes a reflexionar sobre el proceso de resolución de cada problema, ya se tratase de un trabajo personal o en grupo. Para facilitarlo:

- los participantes han elaborado protocolos escritos de resolución, como acabamos de ver;

- yo misma les he entrevistado personalmente pidiéndoles que me contaran el proceso y que me dijeran su percepción sobre el mismo;

- los estudiantes han puesto en común sus procesos de resolución, analizando las ideas que les conducían a la solución y los bloqueos que les impedían llegar hasta el final.

De esta forma los miembros del Club se han habituado poco a poco a reflexionar y a hacerse preguntas del tipo, ¿qué pasaría si... cambiamos los datos, la cuestión, las condiciones del problema?

c) Trabajo en grupo

Cuando los problemas se han ensayado en grupo un moderador o una moderadora ha ayudado a seguir la metodología de trabajo propuesta para resolver el problema y un secretario o secretaria ha tomado notas. Esto ha hecho posible la discusión sobre el comportamiento seguido al final de la sesión. En el Club matemático yo intervenía como moderadora para canalizar la discusión sin ofrecer nunca una respuesta ni dar una opinión. Un

estudiante del Club era el secretario. En algunas ocasiones yo misma he acaparado los dos papeles.

Las funciones del moderador o moderadora eran las siguientes:

- decidir el momento de cambiar de fase en el curso de la resolución (exposición de ideas, selección de las mismas, aplicación a la resolución del problema, verificación de la solución);
- impedir la valoración de ideas antes de que llegase el momento de elegir una estrategia de resolución para trabajar seriamente con ella;
- moderar las intervenciones a fin de evitar que varias personas hablasen al mismo tiempo, que se interrumpiese a alguien o que un estudiante monopolizase la palabra;
- pedir al secretario que recordase la lista de ideas cuando había un prolongado silencio;
- proponer el problema al comienzo de la sesión y recordarlo en el caso en que la atención se desviase de la cuestión planteada.

En las primeras sesiones de resolución de problemas en grupo tuve que intervenir muchas veces porque los estudiantes no tenían el hábito de trabajar en grupo. Además tenían la costumbre de precipitarse para elegir una estrategia de resolución antes de pasar a esta fase del trabajo. El trabajo en grupo resultó difícil porque había que compaginar ritmos diferentes y estilos a veces opuestos y porque era necesario dejar lugar a la incubación de ideas por parte de los individuos.

d) Comunicación de ideas

La comunicación de ideas matemáticas era una tarea difícil en el Club, tanto para quien las expresaba como para quien las escuchaba. Esta comunicación ha resultado particularmente complicada cuando se trataba de una discusión o de una puesta en común. Por ello, yo como moderadora he tratado de facilitarla del siguiente modo:

- suscitando la participación de todos los componentes del grupo, animando a los más pasivos y evitando que alguien monopolizase la palabra;
- impidiendo que se juzgasen las ideas expuestas: en caso de que alguien no considerara una conjetura pertinente, una idea plausible o una demostración verdadera, sólo le he permitido pedir explicaciones;
- evitando que se desechasen ideas porque no hubiesen resultado útiles; por el contrario trataba de favorecer que se profundizase en ellas para ver si se podían explotar;

- propiciando el análisis de los bloqueos que se presentaban en el transcurso de la resolución;
- pidiendo que se generalizasen los datos del problema o el resultado obtenido.

Como moderar me resultaba difícil, he registrado algunas puestas en común o discusiones en magnetófono a fin de analizar críticamente este trabajo, prestando atención a los siguientes aspectos: *¿cuándo intervenía yo como moderadora?, ¿de qué forma lo hacía?, ¿para decir qué?, ¿cuáles eran las consecuencias de cada una de mis intervenciones?, ¿qué hacía el sujeto o el grupo antes de que yo interviniese?, ¿qué ha hecho el sujeto o el grupo después?* De esta manera he ido tomando conciencia de mi estilo como guía de la actividad de los alumnos y he tratado de mejorar mi modo de proceder a fin de no imponer mi criterio, no cortar una idea, no juzgarla, sino por el contrario, orientar, desbloquear y ayudar a los estudiantes a expresar en voz alta su pensamiento.

3. DIFICULTADES PARA LA APLICACIÓN DE ESTA PROPUESTA

Antes he ido señalando algunas dificultades de aplicación de la metodología propuesta, ahora trataré de resumirlas en torno a tres apartados: la naturaleza de las actividades propuestas, el modo de trabajo de los alumnos y alumnas y el modo de intervención del profesor o profesora.

a) En relación con la naturaleza de las actividades propuestas

Si los alumnos y alumnas están poco habituados a resolver problemas, sus ideas acerca de la actividad matemática no son las más adecuadas para resolver problemas complejos; por tanto es necesario que sufran un proceso de "aculturación" para que vayan asimilando nuevas ideas sobre la actividad matemática.

b) En relación al modo de trabajo de los alumnos y alumnas

Si los alumnos y alumnas están poco habituados a expresar verbalmente sus procesos de pensamiento, a trabajar en grupo y a debatir sus ideas, la metodología expuesta requiere un aprendizaje de estas habilidades y hábitos de trabajo. Para ello hay que tratar de fomentar un clima de libertad para la comunicación, intentando que se aplacen los juicios sobre las ideas que se exponen antes de familiarizarse con las mismas. El coordinador de la actividad debe propiciar este clima, diversificando además los tipos de comunicación,

comenzando por comunicaciones más sencillas y entrevistando a los participantes.

c) En relación al modo de intervención del profesor o profesora

Este modelo de intervención conlleva un estilo de profesor que es un mero guía de la actividad del alumno. Esto tiene consecuencias a tres niveles: el puramente matemático, el didáctico y el personal (cf. Burkhardt y Schoenfeld, 1988):

- a nivel puramente matemático el profesor deberá percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones de los estudiantes al problema: si éstas son buenas o no; en este último caso ver cómo ayudarles para que lo sean.

- a nivel didáctico, el profesor deberá decidir cuándo intervenir, qué sugerencias proporcionar, cómo desbloquear una situación o cómo reconducirla, etc.

- a nivel personal, el profesor se encontrará quizá en una situación un tanto inusual y en cierto modo incómoda pues no podrá planificar siempre de antemano todas las situaciones didácticas que se le puedan plantear, por ejemplo, las respuestas que se les pueden ocurrir a los alumnos o las posibles aproximaciones al problema. Para llegar a sentirse a gusto con este modo de intervención necesitará ir forjando una experiencia en esta línea a fin de incrementar la confianza y la seguridad en sus propios recursos personales.

4. ALCANCE DE LA PROPUESTA

Tras una primera etapa de tres cursos de desarrollo del Club matemático, he analizado en profundidad la evolución de 10 estudiantes que han permanecido en el mismo durante un año al menos. Este estudio ha mostrado que la evolución de los estudiantes a lo largo de su estancia en el Club ha sido positiva pero diversa: por una parte la metodología puesta en práctica ha favorecido ciertos aprendizajes en cada uno de los sujetos estudiados; por otra parte esta metodología no ha garantizado que en cada sujeto y para cada una de las variables analizadas (actitudes frente a la resolución de problemas, aplicación de heurísticas y grado de conocimiento propio) se haya producido una evolución positiva. Exponerlo aquí resultaría largo, por lo que remito a quienes estén interesados en ello a otro trabajo (Callejo, 1991). Me limitaré pues a presentar brevemente el estudio de un caso, el de una chica que aquí llamaré **Ana**, que no es ni el más sobresaliente ni el más gris de estos 10 alumnos.

Estudio de un caso

Ana es una chica que ha permanecido en el Club durante dos cursos completos en los que estudió 3º de BUP y COU. A lo largo de este tiempo ha ido desarrollando sus capacidades matemáticas. Veremos primero sus actitudes frente a la resolución de problemas y su capacidad para aplicar estrategias heurísticas en las primeras sesiones del Club matemático, a continuación analizaremos su evolución en relación a la captación de la estructura de los problemas y finalmente estudiaremos su grado de conocimiento propio.

a) Actitudes frente a la resolución de problemas en las primeras sesiones del Club

Los primeros problemas resueltos por **Ana** han tratado de minimización de caminos. En ellos se podía aplicar la estrategia "resolver un caso más sencillo" así como las propiedades de las transformaciones geométricas. Los protocolos de resolución han permitido constatar que **Ana** se familiarizaba poco con los problemas y que desarrollaba la primera idea que le venía a la cabeza, antes de captar la estructura de los mismos; le faltaba pues flexibilidad y apertura para enfrentarse a los problemas, aunque era perseverante en su intento de solucionarlos. En efecto, unas veces comenzaba familiarizándose algo con el problema, estudiando casos límites o casos particulares para encontrar el camino más corto entre dos puntos o consideraba puntos singulares de un triángulo para encontrar el triángulo de perímetro mínimo inscrito en un triángulo dado, pero no estudiaba otros problemas más simples que el propuesto; otras veces no se familiarizaba en absoluto con la situación propuesta precipitándose rápidamente sobre una forma de resolver el problema antes de haber explorado la situación. He observado también que a **Ana** no le gustaban los procedimientos de resolución complicados y que rechazaba, por ejemplo, el empleo de la Geometría analítica para la resolución de problemas geométricos, aunque sus enunciados viniesen dados en dicho contexto.

En cuanto a la búsqueda de estrategias de resolución, **Ana** ha tenido dificultad desde el comienzo en encontrar analogías entre los problemas, así como en distinguir las analogías superficiales de las estructurales, es decir, de distinguir las semejanzas de contexto - cuestión planteada, descripción de la situación- de otras más profundas que requerían un cambio en la representación del problema. Por ejemplo, **Ana** no captó la relación entre un problema que se resolvía por simetría geométrica y otro semejante de reflexiones en billares rectangulares que había resuelto anteriormente; tampoco relacionó un problema de reflexiones en una elipse con otro que

conocía de resonancias en una sala elíptica. Sin embargo ha intentado establecer analogías entre algunos problemas que planteaban la misma cuestión.

b) Evolución a lo largo del entrenamiento

Analicemos la evolución de **Ana** centrándonos en los puntos anteriores. Veamos primero el punto de la aplicación de la estrategia "identificar problemas análogos", luego la percepción de simetrías y por último el comportamiento general de resolución.

- En cuanto a las dificultades que **Ana** había experimentado al comienzo de su estancia en el Club respecto a identificar problemas análogos, éstas han continuado a lo largo del entrenamiento presentando las mismas manifestaciones: ha intentado aplicar a nuevos problemas que plantean una determinada cuestión los mismos procedimientos utilizados en problemas previamente resueltos que hacían la misma pregunta; a lo largo de los dos años de permanencia en el Club sólo ha identificado una vez una analogía estructural.

- En cuanto a la percepción de simetrías en los problemas, a lo largo de su estancia en el Club **Ana** ha captado distintos tipos de simetrías: simetría de la situación inicial respecto de la final, simetría geométrica y simetría de los datos del problema. Esto le ha ayudado a resolver algunos problemas.

- En cuanto al *comportamiento general de resolución*, la fase de familiarización de **Ana** con los problemas se ha ido alargando respecto a las primeras sesiones, ha intentado contemplar un problema desde distintos puntos de vista antes de elegir una vía de solución, incluso ha sido capaz de modificar la estrategia prevista en el curso de la resolución o de concebir una nueva durante la entrevista que le he hecho tras la resolución de algunos problemas.

c) Grado de conocimiento propio

Ana ha ido formándose su propio retrato heurístico a lo largo de los dos cursos de estancia en el Club. Veamos algunas pinceladas de éste. En junio del primer curso pensaba que sabía encontrar analogías entre problemas y que eso le ayudaba a encontrar la solución; un año más tarde decía que "a veces encontraba semejanzas donde no las había", esto es, semejanzas que no ayudaban en la resolución de los problemas. En junio del primer curso se percató de que a veces se obcecaba con una sola idea tratando de resolver el problema; un año más tarde decía que había encontrado un método para

superar este bloqueo: buscar varias ideas antes de encontrar la estrategia de resolución. G. Polya (1981) atribuyó este método al buen investigador y **Ana** ha contemplado a veces dos o más estrategias para resolver algunos problemas.

5. CONCLUSIÓN

Retomemos la cuestión inicial: *¿se puede enseñar a resolver problemas?* Tras un trabajo sistemático de cuatro cursos (85-86, 86-87, 87-88, 92-93) en el Club matemático puedo decir que cada vez estoy más convencida de que se puede aprender a resolver problemas, que se puede favorecer este aprendizaje, pero que es difícil de enseñar. El profesor o profesora puede proponer problemas sugerentes, despertar el interés por esta actividad matemática, dar pautas, indicaciones, ayudar a los estudiantes a explicitar sus procesos de pensamiento y a reflexionar sobre ellos, etc. Pero la manera de abordar la resolución de problemas es algo muy personal y en este sentido lo que puede hacer el profesorado es ayudar a cada estudiante a descubrir su propio estilo, sus capacidades y sus limitaciones. Mi punto de vista sobre el trabajo con los alumnos y alumnas en la resolución de problemas es que no se trata de transmitir a los estudiantes métodos, reglas heurísticas o "trucos", sino las actitudes profundas que han conducido a ellos, partiendo de su propia experiencia. Para ello es necesario combinar la práctica, con una metodología de trabajo apropiada y el examen, el análisis, la discusión y la crítica de los procesos de resolución.

Pero la experiencia que acabo de exponer la he desarrollado fuera del aula, guiada por el propósito de iluminar un aspecto importante de la educación matemática: la resolución de problemas. A partir de ella *¿qué podemos decir acerca del trabajo en resolución de problemas en el aula?* He de reconocer que en el Club matemático juego con ventaja respecto a las condiciones en que se desarrolla la educación formal y los cursos de matemáticas de Bachillerato: por una parte cuento con alumnos motivados por las matemáticas que tienen una experiencia positiva del aprendizaje de esta materia en el contexto escolar; por otra parte mi objetivo no es introducir contenidos matemáticos, sino ejercitar a los alumnos en procesos propios de la actividad matemática que conducen al establecimiento de proposiciones y a la demostración de teoremas y estos estudiantes suelen dominar los conocimientos matemáticos necesarios para resolver los problemas que les propongo; por último, el número de alumnos es abarcable para el modo de trabajo: individual y en grupo, puestas en común y debates.

Sin embargo, en el ámbito de la educación formal las cosas suceden de otra manera: no todos los alumnos de una clase están motivados por las matemáticas, la introducción de contenidos juega un papel importante en los

cursos de matemáticas y no resulta fácil articular una propuesta curricular centrada en la resolución de problemas en la que éstos constituyan un punto de partida para la introducción de conceptos, situándolos en el contexto que les dio origen, y proporcionen situaciones a las que aplicar los conocimientos matemáticos. Por último, en cuanto a la dinámica de trabajo, a la organización de la clase y a la intervención del profesorado, mi propuesta exige que haya un número reducido de alumnos y que tengan ciertos hábitos de trabajo cooperativo.

Según esto, la aplicación al aula es difícil pero creo que posible. Hace falta dar pequeños pasos en la dirección de aplicar métodos más activos y más inquisitivos que inviten a los alumnos y alumnas a plantearse sus propias preguntas, sus propios problemas, a comunicar sus ideas, a discutirlos y a trabajar con otros. Algunos grupos de profesores ya lo están haciendo: **¡es posible!**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADDA, J.: 1985, *Pragmatique et questionnements scolaires en mathématiques, Discourse, Essays in Educational Pragmatics -1*, M. SPOELDER, F. VAN BEISEN, F. LOWENTHAL, F. VANDAMME (Eds.), ACCO, Lovaina, 223-230.

BURKHARDT, H. y SCHOENFELD, A.: 1988, Problem Solving - An Overview, *Proceedings of Problem Solving Theme Group : V ICME*, H. BURKHARDT, S. GROVES, A. SCHOENFELD y K. STACEY (Eds.), Shell Centre for Mathematical Education, Universidad de Nottingham, 3-42.

CALLEJO, M.L.: 1988, Un club matemático, *Cuadernos de Pedagogía*, nº 159, 50-52.

CALLEJO, M.L.: 1990, La resolución de problemas en un Club matemático, Col. Apuntes IEPS nº 53, Narcea, Madrid.

CALLEJO, M.L.: 1991, *Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes de type Olympiades: Une expérience de Club mathématique*, Tesis doctoral de didáctica de las matemáticas, Universidad París 7.

CALLEJO, M.L.: 1992, *Développement d'attitudes pour résoudre problèmes dans un Club mathématique*. Comunicación presentada en el ICME 7, Universidad Laval, Quebec.

FREUDENTHAL, H. : 1983, Is Heuristics a singular or a plural?, *Proceedings of the VII ICPME*, R. HERSHKOWITS (Ed.), Rehovot, 38-50.

GLAESER, G.: 1980. Quelques thèmes heuristiques. *Proceedings of the IV ICPME*, R. KARPLUS (Ed.), Berkeley, 207-212.

PIMM, D. : 1990, *El lenguaje matemático en el aula*, MEC - Morata, Madrid.

POLYA, G. : 1965, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México.

POLYA, G. : 1981, *Mathematical Discovery* (Ed. combinada), Wiley, Nueva York.

SCHOENFELD, A.: 1979, *Can Heuristics Be Taught?, Cognitive Process Instruction. Research in Teaching Thinking Skills*, J. LOCHHEAD (Ed.), Franklin Institute Press, Filadelfia, 315-338.

SCHOENFELD, A.: 1985, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, Orlando.

SCHOENFELD, A.: 1989, Problem Solving in Context(s), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, R. CHARLES y E. SILVER (Eds.) LEA y NCTM, Reston, 82-92.

SUYDAM, M.: 1987, Indications from Research on Problem Solving, *Teaching and Learning: A Problem-Solving Focus*, F.C. CURCIO (Ed.), NCTM, Reston.

WICKELGREN, W. : 1974, *How to Solve Problems*, Freeman, San Francisco.

MESA Nº 6

EVALUACION EN MATEMATICAS

Coordinador/Ponente: D. José M^a Fortuny Aymerich

Secretario: D. José A. Sánchez Guillén

MESA 6. EVALUACION EN MATEMATICAS

EVALUACIÓN. UN NUEVO DISEÑO Y SUS FORMATOS

Josep M. Fortuny (UAB) i Joaquim Giménez (URV)

1. PREÁMBULO

Con el fin de regular y tener transparencia en el funcionamiento de la educación matemática en la etapa de Secundaria Obligatoria, presentamos lo que llamamos "Diseño del paquete integrado de evaluación EVAMAT 12-16". Se comenta aquí la componente práctica de formatos en cuatro bloques: Inicialización, Observación, Seguimiento, Proyección. En otro momento (Fortuny, Giménez 1993a) explicamos las fases y demás componentes de dicho diseño. Este paquete está implementado en el proyecto de material curricular de la Generalitat de Catalunya: "BON DIA MATES 12-16".

Entendiendo la evaluación más como un proceso que como un producto, nos centramos en la funcionalidad de las siguientes fases: (1) diagnosis cognitiva, (2) intenciones e interacciones individuo-tarea, (3) adquisición de capacidades locales sobre conceptos y procedimientos, (4) adquisición de habilidades globales sobre conceptos y procedimientos, (5) progreso y valoración, y (6) participación, concientización (autovaloración y autoregulación).

PAQUETE INTEGRADO DE EVALUACION										BON DIA MATES 12-16		Alumno Código Fecha Resultado final																																																																																												
I. INICIALIZACION					II. OBSERVACION					III. SEGUIMIENTO																																																																																														
Actividad de seguimiento					Proyección					Observación																																																																																														
Tipo					Tipo					Tipo																																																																																														
<table border="1"> <tr> <th>Actividad</th> <th>Objeto</th> <th>Objeto</th> <th>Objeto</th> <th>Objeto</th> </tr> <tr> <td>CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS</td> <td>Declarativos</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivos</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> </table>					Actividad	Objeto	Objeto	Objeto	Objeto	CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	<table border="1"> <tr> <th>Proyección</th> <th>Proyección</th> <th>Proyección</th> <th>Proyección</th> <th>Proyección</th> </tr> <tr> <td>CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS</td> <td>Declarativos</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivos</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> </table>					Proyección	Proyección	Proyección	Proyección	Proyección	CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	<table border="1"> <tr> <th>Observación</th> <th>Observación</th> <th>Observación</th> <th>Observación</th> <th>Observación</th> </tr> <tr> <td>CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS</td> <td>Declarativos</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivos</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> </table>					Observación	Observación	Observación	Observación	Observación	CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas
Actividad	Objeto	Objeto	Objeto	Objeto																																																																																																				
CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
Proyección	Proyección	Proyección	Proyección	Proyección																																																																																																				
CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
Observación	Observación	Observación	Observación	Observación																																																																																																				
CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
<table border="1"> <tr> <th>Diagnosis</th> <th>Diagnosis</th> <th>Diagnosis</th> <th>Diagnosis</th> <th>Diagnosis</th> </tr> <tr> <td>CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS</td> <td>Declarativos</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivos</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> </table>					Diagnosis	Diagnosis	Diagnosis	Diagnosis	Diagnosis	CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	<table border="1"> <tr> <th>Observación</th> <th>Observación</th> <th>Observación</th> <th>Observación</th> <th>Observación</th> </tr> <tr> <td>CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS</td> <td>Declarativos</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivos</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> </table>					Observación	Observación	Observación	Observación	Observación	CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	<table border="1"> <tr> <th>Seguimiento</th> <th>Seguimiento</th> <th>Seguimiento</th> <th>Seguimiento</th> <th>Seguimiento</th> </tr> <tr> <td>CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS</td> <td>Declarativos</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivos</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> <tr> <td>ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES</td> <td>Declarativas</td> <td>Procedimentales</td> <td>Actitudinales</td> <td>Metacognitivas</td> </tr> </table>					Seguimiento	Seguimiento	Seguimiento	Seguimiento	Seguimiento	CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas	ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas
Diagnosis	Diagnosis	Diagnosis	Diagnosis	Diagnosis																																																																																																				
CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
Observación	Observación	Observación	Observación	Observación																																																																																																				
CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
Seguimiento	Seguimiento	Seguimiento	Seguimiento	Seguimiento																																																																																																				
CONCEPTOS Y PROCEDIMIENTOS	Declarativos	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivos																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				
ADQUISICION Y DESARROLLO DE LAS HABILIDADES	Declarativas	Procedimentales	Actitudinales	Metacognitivas																																																																																																				

Figura 1. Estructura general de paquete integrado de evaluación BDM12-16.

En cada una de estas fases se valorarán tanto los aspectos formativos integrados en el aprendizaje como los sumativos que se ponen de manifiesto en las situaciones finales básicamente centradas en los cuatro últimos aspectos anteriormente citados en cuanto al desarrollo, adquisición, consecución, adiestramiento, progreso e integración (Giménez y Fortuny 1993b). El informe es la salida lógica de este proceso. Dichas fases incorporan técnicas o formatos concretos que explicaremos en este artículo.

2. ESTRUCTURA DE ACTUACION

Se comentarán las técnicas utilizadas, con sus dificultades y ventajas específicas por su interés y novedad, mostrando así la estructura llamada paquete de evaluación (mostrada en la figura 1). El conjunto se puede entender formado por cuatro piezas fundamentales: (AS) Actividades de seguimiento, (PJ) Proyectos de trabajo, (AU) elementos Autoreguladores sobre actitudes y valores, (OB) Observación. En el cuadro anterior se muestra la forma empleada junto los criterios de puntuación (con equilibración o ajuste), con su justificación y decisión correspondientes. Este resumen para cada alumno es un posible instrumento de recogida de los datos, y permite ver el papel del "paquete integrado". El diseño global realizado contempla además la inclusión de formatos diagnósticos específicos, de interacción e integración apropiados a cada bloque, que se explicitarán a continuación (esquema global en la figura 2).

Los elementos citados en el cuadro anterior resumen formatos diversos; de ahí que en la hoja de del paquete integrado de evaluación resumen del alumno, no se encuentren todos los elementos enunciados. Las observaciones obtenidas mediante parrillas de grupo se introducirán como cuadros de ajuste. En las páginas siguientes y en la figura anterior se refleja la totalidad de los posibles formatos comentados según las diversas fases.

FORMATOS	TIPO DE EVALUACION Uso habitual	INCONVENIENTES	VENTAJAS	NOTAS
DE TIPO FORMATOS DIAGNÓSTICO				
1	Tests (tipo cognitivo) comparativos de niveles	Dentro del proceso de aprendizaje Control de mejoras individuales Instrumento de comparación Diagnóstico colectivo	Organización Temporización No tiene incidencia en el aprendizaje Mide solo pequeños logros	Reconocimiento de la realidad de los alumnos Sencillez. Ahorro Rapidez Fácil de comparar Requiere conocer dificultades Necesita "validación" de contenido y de constructo.
2	Mapas conceptuales y compilación de textos, redes semánticas	Control conceptual y de redes conceptuales Uso como asignación de capacidad de análisis	Dificultades de comprensión verbal Lentitud en corrección	Incide en valor histórico Refleja la representación del conocimiento Requiere previsión de categorías
3	Tareas GRALES	Control de conceptos y algoritmos Uso como diagnóstico	Requieren gran estructura y tiempo No tiene incidencia en el aprendizaje	Apreciación de espontaneidad Usualmente se hace como diagnóstico previo
4	Integración de múltiples categorías	Control de procedimientos Control de elementos históricos Uso puntual	No tiene incidencia en el aprendizaje Mide solo pequeños logros	Sencillez. Ahorro Rapidez Fácil de análisis estadístico Requiere elaboración "a priori"
PARRILLAS DE OBSERVACIÓN				
5	Reflejo del trabajo cotidiano	Control procedimental con categorización previa Control procedimental, instructivo y formativo con categorización previa Observación actitudinal y de proceso general	Dificultad en asumir la categorización Dificultad en asumir la categorización	Autoregulator de procesos adquiridos por alumnos No tiene incidencia directa en el aprendizaje Autoregulator del profesor más que del alumno
6	Tareas específicas en la resolución de problemas	Control procedimental con categorización previa Control de conceptos Gran cantidad de casillas	Dificultad en asumir la categorización Gran cantidad de casillas	No tiene incidencia directa en el aprendizaje Autoregulator de procesos adquiridos por alumnos Importancia para la mejora de elementos globales
7	Test de Autoregulación	Control de actitudes Control de nivel	Compromete al profesor	Valoración global Tiene incidencia en la planificación
8	Cuaderno de clase	Control de planificación y actitudes	Necesita tiempo para corrección	Importante para la planificación Eficaz como contraste diálogo prof-alumno
ACTIVIDADES DE SEGUIMIENTO				
9	Planteamiento de problemas	Control de procedimientos y conceptos Asignación de niveles	Dificultades de diseño Dificultades en encontrar actividades buenas. Lentitud	Facilidad de manejo. Incide en la planificación. Establece adecuación objetivos-logros. Asigna niveles. Discrimina. Único instrumento para el control de algunos procedimientos Requiere "no repetición" originalidad adecuación
10	Test de preguntas abiertas de respuesta abierta	Control específico en resolución de problemas Control de estrategias generales de aprendizaje	Dificultades de diseño y valoración Mide solo pequeños logros	Efecto positivo en el aprendizaje. Conocimiento de los alumnos Se usa normalmente después de las actividades de aprendizaje
PROYECTOS DE TRABAJO				
11	Trabajos en "dos fases"	Control de procedimientos generales y adquisición valores científicos Control de procedimientos y valores generales educativos: investigación, planificación, metacognición, etc	Dificultad ante consideración de la diversidad. Lentitud Dedicación extra Difícil de valorar	Incidencia en valores y organización. Incidente en aprendizaje. Válido para aumentar la capacidad de análisis. Requiere insistencia en todas las fases del proceso y la parrilla debe darse a priori. Requiere planificación temporal adecuada.

Figura 9. Formatos incluidos en un paquete integrado para la evaluación en la E.S.O. (12-16 años).

3. DESCRIPCION DE FORMATOS

3.1. Inicialización.

Los formatos de la fase de diagnóstico son los que corresponden a la inicialización del proceso de evaluación. Se presentan en los siguientes formatos: (a) test de tipo cognitivo de asignación de niveles, (b) mapas conceptuales, (c) trabajos de completación de textos, (d) tareas orales y (e) tests de respuestas cerradas de elección múltiple.

(a) Tests de tipo cognitivo-diagnóstico de asignación de niveles.

En este bloque no insistiremos en aquellos tests que conducen jerarquías de dificultades (desde Hart 1981 a Fortuny et al. 1986, Giménez 1987, Grupo Azarquié 1989, Del Río 1989, Giménez 1989, Romero y Acevedo 1992, Fiol 1993, etc.).

(b) Mapas conceptuales.

Los mapas conceptuales tienen valor formativo y regulador y permiten comparar dos momentos del proceso de aprendizaje. Veamos un ejemplo de progreso (figura 3).

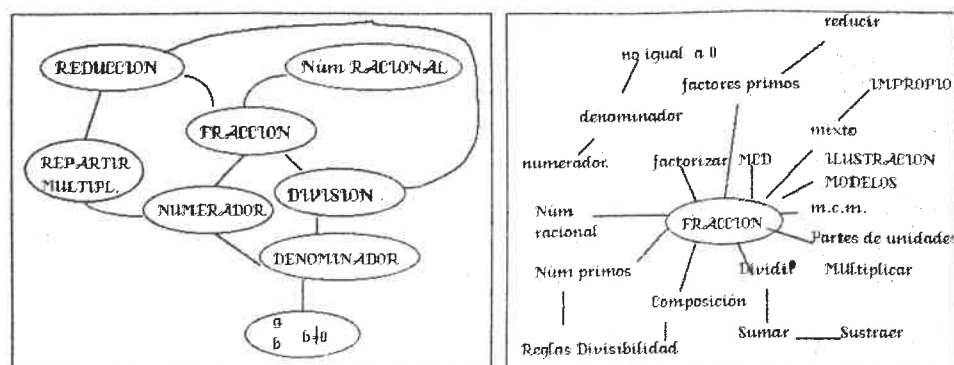


Figura 3. Mapa conceptual de un alumno de 14 años, antes y después del aprendizaje de fracciones.

Las mejoras en el desarrollo (comparando los mapas anteriores) manifestadas en una mayor cantidad de elementos en el mapa, el aumento de nexos de unión así como la mayor "calidad" de los mismos debe contrastarse con entrevistas orales breves con los alumnos para describir con mayor rigor dichas mejoras en un informe o trama de observación (Izquierdo y Fortuny 1992). Aún así, hay dificultades de temporalización con programas apretados, tiempo de tutoría a veces insuficiente, etc.

(c) Tests de completación de textos.

Para valorar ciertos procedimientos y valores puede ser de interés un tipo poco usado de tests llamados de completación de textos que pueden ser de preguntas históricas (figura 4). Así se puede reconocer la incidencia que ha tenido una lectura, si se ha asumido un tratamiento histórico, etc. Los aciertos en dichos tests pueden reflejarse en parrillas del grupo-clase en donde se ponen de manifiesto los elementos conceptuales o procedimentales correspondientes.

Nombre Nivel

Una fracción [1] constituye una buena aproximación [2] π es $\frac{22}{3}$

[1] [2] [3]

La [4] de los términos de la [5] de números de 1 hasta [6] se consigue mediante la [7] [8] $\frac{(1+n)n}{2}$ [4]

[5] [6] [7] [8]

Dados tres [9] consecutivos que sumados [10] 32, la [11] que corresponde a dicho enunciado es $x + (x+1) + (x+2) = 12$

[9] [10] [11] [12]

Si unimos tres vértices no consecutivos de un cubo, obtenemos un [13]. Los [14] de ese [13] son diagonales de las [15] del cubo. Si sabemos la medida de los [14] del cubo, podemos usar el [16] de [17] para averiguar la medida de los [14] [13]

[13] [14] [15] [16] [17]

Figura 4. Test original de completación de textos para alumnos de 14 años.

(d) Tareas orales.

Algunos tests clásicos de cariz psicológico trataron de marcar índices diferenciados del trabajo oral respecto al escrito mediante pruebas diversas en el caso del cálculo (Giménez y Girondo 1993). Ahora, en algunos diseños se atribuye a la entrevista oral un valor importante. Los ejemplos más significativos los hemos adaptado del Proyecto SMP 11-16 (1991).

Las dificultades de ajuste temporal y organizativas hacen que este tipo de valoración sea de difícil aplicación real, pero esas son en realidad las únicas dificultades. Muchos profesores apuntan -con razón- que pierde su objetividad si no se formula las mismas preguntas a los alumnos, pero con menos razón se dice: "Si pregunto algo oral, debo hacerlo uno a uno; entonces, los primeros se lo contarán a los demás en cuanto puedan, luego el último ya se lo ha mirado y sabe las respuestas". Nuestra experiencia muestra que ello es cierto cuando se trata de preguntas cerradas, pero no es siempre así con preguntas abiertas. Además pueden plantearse distintas cuestiones sobre tópicos diversos si el objetivo es analizar la capacidad de respuesta ante resolución de situaciones. Los procesos pueden analizarse con ejemplos distintos sin pérdida de validez aunque -eso sí- la pauta de valoración no es de fácil diseño y debe ser ajustada a priori.

En nuestras propuestas (BDM 12-16), propugnamos la realización de actividades orales en el marco del aprendizaje. Estas pueden ser valoradas con sentido formativo sin dedicarles un tiempo específico.

(e) Tests de preguntas cerradas de múltiple elección.

Se demuestran un instrumento eficaz, rápido y medible para valorar elementos diagnósticos. Exige un rigor en la formulación de las posibilidades de respuesta, si no se quiere caer en una información dualista ante un ítem como "resuelto-no resuelto". De ahí que diversos autores han comentado que la validez en el diseño implica un conocimiento claro de las dificultades de los alumnos.

Las limitaciones de este tipo de instrumento son consecuencia de lo dicho: sólo pueden medirse ciertos elementos conceptuales o procedimentales desde una vertiente de asignación local de nivel. La facilidad de administración de ese tipo de tests obliga a introducir nuevos parámetros indicadores de la situación. En ese sentido se está aplicando la Teoría de respuestas de ítems (Humbleton y otros 1983 explicado en Giménez 1991) y se está utilizando este tipo de tests en pruebas que reúnen colectivos numerosos, donde interesa reconocer elementos comparativos y de "situación social general". Los ejemplos más reconocidos internacionalmente han sido los tests NAEP en Estados Unidos, IAEP, SIMS de estudios internacionales, y los trabajos ingleses coordinados por K.Hart y editados por NFER-NELSON.

Muchos tests diagnósticos han considerado lo expuesto en el formato anterior, pero con un grado de apertura en las respuestas. Es decir, no dando unas respuestas a escoger. Esta ha sido la base de muchos tests de errores que se han realizado en las décadas de los 70 y 80 aunque posteriormente se den otros modelos de conflicto cognitivo. Lo ideal es que dicho tipo de tests se convierta en situación de aprendizaje, como se ve en actividades geométricas como la búsqueda de una definición a partir de dar ejemplos y contraejemplos (Alsina, Fortuny Giménez 1992).

En el juego de la construcción de una definición, se afinan las características generales, el significado de "cumplir o no" un enunciado, etc. El elemento conceptual subyacente deja de ser fundamental para dar relevancia a la concepción lógica de los alumnos. En estas situaciones se pone de manifiesto el problema de las "misconceptions", y el problema del "concepto imagen" (Vinner 1981). Dichos diseños creemos que deben incorporarse totalmente al proceso de aprendizaje como integradores de "conflicto cognitivo" en una actividad de reconocimiento y definición.

3.2. La observación.

La parrilla y pautas de observación tienen por objeto el control de las intenciones e interacciones, incluye los elementos motivacionales, intencionales y de desarrollo instruccional en sentido amplio. Implica el uso de formatos diversos atendiendo a su fin: parrillas específicas de reflejo del trabajo cotidiano, análisis de tareas específicas en la resolución de problemas, test de autoregulación y el análisis del cuaderno de clase. Podrían utilizarse también análisis de interacciones en juegos- cómics u otros trabajos creativos y grupales.

PAUTAS PARA LA OBSERVACIÓN DEL TRABAJO DE CLASE

Categorías	Significado	Tipo de Valoración
Elementos generales	Posturas, gestos, palabras o gestos de emoción, no expresados en el resto de categorías respecto al comportamiento de los alumnos frente a las tareas propuestas.	
Elementos actitudinales	Puntajes de auto-regulación: (a) inicial (dualismo: atención - acción); (b) desarrollo; (c) final. Orientación motivacional: (a) esfuerzo en relación a objetivos y/o resultados (reñido en la tarea).	Se muestra a menudo, explícito, ... en dar a conocer sus ideas propias. Se muestra a menudo en mantener sus ideas correctas. Muestra esfuerzo para conseguir objetivos propuestos. Reduce planteamientos a partir de las actividades. Se motiva fácilmente.
Elementos actitudinales: procedimentales	Comprensión y comprensión: (a) relación con la tarea; (b) expresión oral y escrita; (c) grado de comprensión; (d) capacidad de análisis. Interpretación, representaciones utilizadas: (a) grado; (b) tipo; (c) capacidad de interrelación.	Comprende intuitivamente, no sabe ponerlo a la carta, explícito: la solución, relaciona lo que encuentra con otros conocimientos. Se muestra activo, no sabe cambiar situaciones, interrelaciona, sabe proponer procesos de solución. Sigue pautas en marcha: soluciones y auto-ajustes, representaciones, razones y es conciso en los razonamientos. Necesita ayuda para expresar las conclusiones, explica lo que hace mediante los conocimientos, expresa: pautas, conclusiones, ...
Elementos actitudinales	Participación: (a) grado de actividad; (b) forma. Interacción: (a) grado; (b) tipo. Actividad general: (a) autocorreo; (b) coherencia; (c) valoraciones de la materia; (d) amplitud; (e) coherencia.	Se muestra a menudo, poco activo, sabe encontrar sus ideas, ... Se muestra pasivo, busca siempre ayuda de otros, no muestra iniciativa, hace preguntas de brevedad, ... Se muestra débil, no sabe seguir, considera al trabajo como algo importante, se implica en el mismo, cree en el valor moral del trabajo que hace, considera un valor al trabajo que realiza.

Nota: Se puede asignar una escala de valoración y considerarla en la rúbrica correspondiente o bien simplemente hacer valoraciones cualitativas por medio de frases como las que se indican como ejemplo.

Figura 5. Pautas correspondientes de una parrilla de observación para el profesor.

Reflejo del trabajo cotidiano.

En este formato hemos tratado de establecer una parrilla con tres

subcategorías importantes a las que se asignan tres columnas en la tabla anterior : elementos intencionales, connotivos, e instruccionales . Se añade una cuarta columna para apuntar observaciones generales dignas de mención para cada alumno. Se ofrece un esquema (figura 8) que explica y ejemplifica dichos términos. La parrilla que proponemos trata de superar las dificultades típicas en asumir las categorizaciones y lo complejo de muchas de las que han aparecido en recientes investigaciones.

El valor de este tipo de instrumento radica en que obliga a llenar todas sus casillas, fijándonos en aquellos detalles que a veces nos pasan desapercibidos. Entendemos además que el esfuerzo que requiere completar dicha parrilla u otras similares debe compensarse por la práctica de la misma.

Tareas específicas de tipo investigativo.

Los problemas abiertos (como búsquedas guiadas con o sin preguntas de orientación) se centran en la investigación y las habilidades que lleva consigo. Proponemos como más eficaz, completo y simple un diseño basado en los recientes estudios internacionales (Lester 1991, SMP 1992).

VALORACION GENERAL DE ACTIVIDADES DE INVESTIGACION y RESOLUCION DE PROBLEMAS

Nivel Clase

Alumnos: Notas o escala (1 a 3)

Criterios		
INFORMACION OBSERVADA	Identificación	
	Reconocimiento	
	Reflexión	
	Crítica	
ORGANIZACIÓN	Estructuración	
	Control de variables	
	Elaboración	
	Manipulación y generación de datos	
PROCESO DE INVESTIGACIÓN	Formulación de la hipótesis	
	Análisis	
	Representaciones y convenciones	
	Uso correcto de instrumentos	
HABILIDADES DE OBSERVACIÓN	Modelización	
	Establecimiento de relaciones	
	Demonstración	
	Justificación y Análisis	
CAPACIDAD COMUNICATIVA	Representación	
	Formulación de subproblemas	
	Intervención escrita	
	Intervención oral	
	Intervención grupal	

Otras observaciones...

Registro optativo

Figura 6. Plantilla de observación en situaciones de investigación.

El profesor asigna a cada alumno un resultado según las categorías determinadas a partir de una valoración personal (Giménez, Fortuny 1993) .

Tests y Actividades de autoregulación sobre actitudes y valores .

Suponen una valoración fundamentalmente de actitudes y situación de los alumnos frente a las tareas. El modelo siguiente (figura 7) refleja las categorías que se han privilegiado y un instrumento utilizado para registrarlas.

RESULTADOS DEL TEST DE AUTOREGULACION DE ACTITUDES Y VALORES

Nivel Clase

Alumnos: Notas o escala (1 a 3)

Criterios		
CONCIERTIZACION	Capacidad	
	Integración	
	Precisión	
	Reflexión	
	Practicabilidad	
Total puntuación		
AUTOVALORACION	Sensibilidad	
	Motivación	
	Aceptación	
	Persistencia	
	Curiosidad	
	Originalidad	
	Independencia	
Total Puntuación		
DESARROLLO	Planificación	
	Organización	
	Mentalización	
	Operatividad	
	Crítica	
	Autonomía	
	Efectividad	
	Rendimiento	
	Comunicación	
Total puntuación		
CONDUCTA	Hábitos de disciplina	
	Conducta en clase	
Total puntuación		
VALORACION SOCIAL	La gente valora la materia	
	Los padres valoran la materia	
Total puntuación		
NIVEL DE VALORACION GLOBAL	BAJO	
	MEDIO	
	ALTO	

Otras observaciones...

Registro optativo

Figura 7. Categorías de autoregulación y test utilizado en la etapa 12-16.

La inclusión de técnicas alternativas a las clásicas como juegos, cómics, dramatizaciones, etc. nos obliga a reconocer que algunos trabajos que se están introduciendo en el aprendizaje pueden convertirse en elementos de valoración, sin más que se posea una pauta de valoración de los mismos y se prevea su funcionalidad. Así-por ejemplo- un juego de mecanización o descubrimiento puede permitir valorar actitudes, conceptos y procedimientos aunque (si se trata de un juego en grupo) no se puedan discernir muchos elementos. De hecho, mediante el juego podemos ejercer un proceso de observación, que requerirá la atención especial de un pequeño grupo cada vez distinto y -por ello de nuevo- planteará un problema organizativo. El hábito en este tipo de observaciones como ocurría con el trabajo investigativo es el aliado mayor que debe objetivar el llamado "ojo" del profesor/a.

Cuaderno de clase.

Se muestra como un elemento difícil de valorar pero importante como regulador del trabajo cotidiano. El inconveniente del tiempo de corrección puede ser superado con la elección al azar de algunos para ser específicamente valorados mediante una parrilla especial a tal efecto. A continuación (figura 8) se puede ver los principios básicos en que se apoya y una de las parrillas utilizadas por alumno.

VALORACION DEL CUADERNO DE CLASE, DOSSIER, etc:	
NIVEL Clase	Alumnos. Notas. o escala (1 a 3)
Criterios	
Formula y comprende las tareas y las expresa adecuadamente.	
Integra elementos de recuerdo de forma combinada y organizada.	
Construye y promueve problemas o situaciones no resueltas .	
Extiende, inventa, descubre...	
Expresa correctamente el trabajo en grupo	
Desarrolla actitudes y valores de progreso matemático: perseverancia, apreciación...	
Mantiene normas y valores comunicativos como: pulcritud, claridad...	
Manifiesta autocorrección y organización.	
<i>Realiza una selección (o cual) de forma adecuada.</i>	
Muestra reflexión de la acción, conectando ideas, resumiendo, criticando,...	
Usa recursos tecnológicos de forma adecuada	
Refleja adecuadamente el trabajo realizado en su totalidad.	
Incluye comentarios y apuntes subliminales	
VALORACION GLOBAL	En cuanto a Procedimientos En cuanto a Contenidos En cuanto a actitudes-valores
Otras observaciones...	

Figura 8. Parrilla optativa para valorar el dossier de los alumnos.

3.3. Actividades de seguimiento .

Llamamos así a un nuevo planteamiento de control que trata de relacionar una matriz 5 x 3 de tipologías de actividades (conceptos, algoritmos, resolución de problemas, lenguajes-visualización y razonamiento- demostración) con rango de elaboración de las mismas (bajo, medio y alto). La variabilidad del rango no

significa que se consideren distintos niveles de dificultad, sino mas bien la distinta complejidad de las operaciones mentales que requieren. Así las actividades de rango bajo suponen la aplicación de rutinas técnicas, algoritmos estandars, la resolución de ejercicios tipo,..., mientras que las actividades dde rango medio ccorresponden a la resolución de problemas y el trabajo con los procesos de conectar, relacionar, integrar,..., por último las actividades de alto nivel requieren realizar analisis de situaciones complejas con diversos criterios e implican una toma de decisiones,autorregulación, metacognición, estructuración, creatividad, analisis crítico,...(Alsina,Fortuny,Giménez 1992). En la figura 9, se muestra un ejemplo.

7. Inventar un enunciado de problema en el que la respuesta sea:
"Hemos obtenido un beneficio del 32 %".
Hemos comprado 6 botellas de 2 l por 1000 y
hemos vendido 3 botellas del mismo vino de 4 l por 1032.
 $6 \times 2 = 12$ l / 1000 plus $\frac{1032}{32}$
 $3 \times 4 = 12$ l / 1032 plus $\frac{1000}{32}$ → Hemos obtenido un beneficio de 32 %.

8. Las latas usuales de refresco contienen 0.33 litros. ¿Cuántas latas serán necesarias para llenar 3 botellas de 3/4 de litro?
 $\frac{33}{100} = \frac{9}{4}$, $\frac{33}{100} \times \frac{225}{100} = 225 : 33 = 68$
Se van a necesitar 68 latas.

10. Imagina y representa otra construcción con el mismo volumen pero área distinta
 $V = 7^3$ cubos
 $A = 6$ cubos

5. Buscar x en los dos casos

(a) $3x + 2 = 4(x + 5)$
 $3x + 2 = 4x + 20$
 $3x - 4x = 20 - 2$
 $-x = 18$
 $x = -18$

(b) $2x - 4 = 1$
 $2x = 1 + 4$
 $2x = 1 + 4$
 $0 = 1x - 2x$
 $0 = 10x$
 $x = \frac{10}{6}$
 $x = 0$

11. ¿Estos dos triángulos que tienen igual área o no? ¿Por qué? ¿Qué triángulo tiene más área? ¿Qué triángulo tiene más perímetro? ¿Qué triángulo tiene más volumen? ¿Qué triángulo tiene más masa?

Los dos son triángulos rectos, o sea que tienen un ángulo de 90°. Tienen todos sus ángulos iguales, y los tres lados proporcionales. ¿Qué triángulo tiene más área? Los triángulos rectos son iguales. ¿Qué triángulo tiene más perímetro? Los triángulos rectos son iguales. ¿Qué triángulo tiene más volumen? Los triángulos rectos son iguales. ¿Qué triángulo tiene más masa? Los triángulos rectos son iguales.

Estos dos triángulos rectos tienen igual área o no? ¿Por qué? ¿Qué triángulo tiene más área? ¿Qué triángulo tiene más perímetro? ¿Qué triángulo tiene más volumen? ¿Qué triángulo tiene más masa?

Los dos son triángulos rectos, o sea que tienen un ángulo de 90°. Tienen todos sus ángulos iguales, y los tres lados proporcionales. ¿Qué triángulo tiene más área? Los triángulos rectos son iguales. ¿Qué triángulo tiene más perímetro? Los triángulos rectos son iguales. ¿Qué triángulo tiene más volumen? Los triángulos rectos son iguales. ¿Qué triángulo tiene más masa? Los triángulos rectos son iguales.

Figura 9. Parte de una "actividad de seguimiento" para 13 años (Proyecto BDM 12-16).

La doble lectura (por tipos de habilidades y rango de las mismas) permite una doble valoración colectiva (figura 10) que se puede indicar en dos tablas. Dichas tablas van a permitir el establecimiento de la diversidad en el aula, y debe contribuir a decisiones de posible estructuración de los nuevos contenidos en base a dicha diversidad.

algoritmos y reproducción de conceptos. Nuestra propuesta pretende aunar diversidad con complejidad en la realidad personal en el análisis del proceso de aprendizaje. Ante todo, un esquema global organizativo para un Ciclo, contempla primeramente el informe del ciclo anterior. De él podemos aceptar que en muchos casos no se infiere una asignación de niveles (por ello la consideramos borrosa) pero sí una descripción de la situación de los estudiantes y sus posibilidades vistas por su tutor anterior.

A lo largo del proceso, mediante diversos tipos de actividades se trata ya de ejercer un control constante de los objetivos propuestos mediante parrillas de observación, análisis específico de tareas de investigación, valoración del cuaderno de clase, evaluación cooperativa, valoración de proyectos, etc. Con todos esos instrumentos se refleja el llamado "perfil del alumno", se observa su evolución y se registran sus actitudes, intenciones y elementos conceptuales. No es sólo un trabajo final lo que se considera, ya que se le enfrenta a actividades de distinto rango de habilidad.

En cada unidad temporal se considera además la ejecución del Proyecto ya comentado y alguna actividad o test de autoregulación. Proponemos la realización de un mínimo de cuatro actividades de seguimiento por Ciclo, que permiten por su propia estructura una asignación de niveles, que facilite el adecuado tratamiento de la diversidad. De todo ello nace un informe por cada una de las cuatro unidades en que se distribuye el trabajo del Ciclo, que se desarrolla en forma de paquete.

5. SOBRE LA ELABORACION DEL PERFIL DE APRENDIZAJE

El análisis evaluador del proceso de aprendizaje via el paquete integrado implica la elaboración de un perfil de aprendizaje del estudiante así como del propio proceso. Al término del proceso, se abre el proceso al exterior mediante la plasmación de todos los componentes del proceso. Así elaboramos un informe del aprendizaje del alumno (figura 12).

PERFIL DE APRENDIZAJE DEL ALUMNO

DESCRIPCION de la CONSECUCION DE OBJETIVOS a partir de los datos obtenidos en el Proyecto y en la Actividad de Seguimiento

PLANIFICACION

INFORMACION

Fecha:
Resultado final:
Asignación de nivel:
ITINERARIO SUGERIDO:
JUSTIFICACION DECISION:
CRITERIOS DE PUNTUACION:
EX:
NT:
AP:
SS:
PUNTOS DEBILES:
DIFICULTADES OBSERVADAS:
ESTRATEGIAS SUGERIDAS:
EXTRACTOS DE TAREAS:
REGULACION:
© Boz de Idón 14-10 © Alsina, Fortuny, Giménez 1992

Figura 12. Una posible salida del perfil de aprendizaje en BDM 12-16.

Todo ello se da acompañado de una breve justificación de la decisión tomada por parte del profesor o equipo docente. Al término de la etapa, dicho informe recoge específicamente la consecución específica de los objetivos terminales mínimos requeridos oficialmente.

También se requiere la elaboración (por parte del profesor) de un informe adecuado que indique: características del grupo frente apreciaciones individuales, datos estadísticos globales y mejoras individuales respecto a consecución de objetivos, elementos de control de calidad global y referenciales de actitud e intención.

Ahora corresponde al profesor y equipo docente decide sobre posibles caminos en el trabajo. Los resultados que han facilitado una asignación de niveles, pueden dar lugar a una replanificación de las unidades en su forma o su organización. Así, pueden proponerse itinerarios alternativos para los alumnos distribuidos en grupos distintos.

En nuestra propuesta didáctica (Alsina, Fortuny, Giménez 1992, 1993), las actividades se formularon acordes a distintos niveles de dificultad. Así, incluimos una posible ubicación de los alumnos en uno de entre tres posibles grupos, que realizarán trabajos a veces distintos. El objetivo es que todos realicen una aproximación a los contenidos (conceptuales o procedimentales) de forma adecuada a su nivel real de competencia. Es el propio profesor quien debe decidir si los alumnos pueden ser estimulados proponiéndoles actividades de un nivel más alto del propio o bien juzga que van a desmoralizarse por no llegar a cierto nivel de dificultad de las actividades.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Almató,A; Fortuny,JM; Fiol,MLL; Hosta,I; Valldaura,J: "Proposta didàctica per treballar la Proporcionalitat " ICE UPC ed. Barcelona 1986
- Alsina,C.;Fortuny,JM.;Giménez,J : "Bondia Mates 12-14" .Generalitat de Catalunya, Barcelona ,1993.
- Alsina,C, Fortuny,JM, Giménez,J: "Package of assessment . An experience in Spain" Aparecerá en Burton(ed) Educational Studies in Mathematics, 1994.
- Azarquiel, Grupo: "Un ejemplo de diagnóstico de errores algebraicos . IE UAM, 1989
- Boero,P (coord) "Progetto da Genova: Uomo e natura, Uomo e territorio, Uomo e società" Doc. Univ. Genoa 1986
- Bostock,L; Chandler,A; Shepherd,A; Smith,E : "ST(P)Mathematics Series Books 1-5 " Stanley Thornes publ. Ltd., Leckhampton 1989
- Costello,J: "Teaching and learning mathematics 11-16" Routledge ed , London 1991
- Cox,C.J. & Bell,D.: "Understanding Mathematics" John Murray ed. publisher, London 1989
- Del Rio,J : Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento. Estudio comparado de dos metodologías. CIDE, Madrid . 1991
- Educació Secundària Obligatoria : Desenvolupament Curricular. "Disseny Curricular.Ensenyament Secundari Obligator" Departament d'Ensenyament. Generalitat de Catalunya. Barcelona, 1989.
- Fortuny,JM : Información y control en la educación matemática a Llinares-Sanchez (eds) "Teoría y Práctica de la Educación matemática". Ed Alfar. Sevilla 1990
- Fiol,MLL. "Tests sobre proporcionalidad" Dept. Did. Matemàtiques i CC Experimentals. UAB. Bellaterra.1993
- Fortuny,JM, Giménez,J: "Avaluació en Matemàtiques a l'ESO" a Guix , Barcelona 1993a
- GAIM Project : Teacher's handbook, MacMillan Ed. 1989
- Giménez,J: "Rational numbers Thinking Test", Dept. Educació i Psicologia UB, Tarragona , 1987
- Giménez,J: "Un test de diagnóstico algebraico en el marco de la formación del profesorado" en Epsilon núm.17, 1991.
- Giménez,J.; Gironde,Il: "Cálculo en la escuela" Edicions Graó, Barcelona 1993.
- Giménez,J , Fortuny, JM: "Evaluación en Matemáticas. Buenos propósitos." en Aula .Barcelona, 1993b
- Gofree & Treffers: "Three dimensions" ,Reidel ed ,Dordrecht 1985
- Hart,K: CSMS tests. NFER Nelson, Windsor, 1981
- Hart, K : "Assesment in Nuffield Project " Heinemann. London 1992
- Herskovitz, R et al : "Mathematics " Weizmann Inst of Science, Rehovot (Israel) 1991 (en hebreo)

- Izquierdo,M; Fortuny,JM: Diseños y modelos de Evaluación . Memoria CIDE 1990
- Lester,F et al: Assessing problem solving NCTM. Reston VA 1988
- Miller, D: "Activity Maths 5-10" Causeway ed, Leyland 1990- 1993
- Mottershead, L : "Investigations in Mathematics" Basil Blackwell England 1989
- Niss,M et al (eds) : Assessment . ICMI Study in Calonge, 1992
- Shell Center: " Numeracy through Problem Solving" Longman Group, Nottingham 1989
- School Mathematics Project, "SMP Investigations and stretchers" Cambridge Educational , Cambridge 1988
- Stephens ,M : CAT Assessment Project, Australia 1991.

MESA Nº 7

FORMACION DEL PROFESORADO DE MATEMATICAS

Coordinador/Ponente: D. Vicente Meavilla Seguí

Secretario: D. Manuel López Lozano

MESA 7.- FORMACION DEL PROFESORADO DE MATEMATICAS

LA FORMACION PERMANENTE Y LOS PROFESORES DE MATEMATICAS DE LA E.S.O.

Vicente Meavilla Seguí

Asesor CEP Teruel

Con la Reforma del Sistema Educativo no sólo se pretende la reforma de la estructura (LOGSE), sino también de los contenidos y de la propia práctica docente.

Para ello el MEC ha elaborado una base común de referencia, el currículo básico, en el que se reconoce al profesorado un amplio margen de maniobra a la hora de adaptar dicha propuesta curricular a la situación de sus centros y aulas.

Por tanto, el carácter abierto del currículo debería contribuir a que el profesor se convierta en un profesional que, trabajando en equipo, diseñe las programaciones que desarrollen el currículo básico teniendo en cuenta el conocimiento del medio en el que ejerce la docencia y las características de sus alumnos.

Habiendo llegado a este punto, parece razonable que nos planteemos el siguiente interrogante :

¿Qué formación necesita el profesor de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria para convertirse en el profesor ideal que acabamos de describir?

Para intentar dar respuesta a esta pregunta conviene que prestemos atención al tipo de decisiones que debe tomar un profesor de Matemáticas para -en primer lugar- acomodar el currículo básico a las necesidades concretas de su centro y a las características de sus alumnos, y para -en segundo término- planificar y temporalizar las actividades de enseñanza/aprendizaje y evaluación de sus alumnos.

Dicho en otras palabras : para responder a la pregunta anterior debemos fijarnos en las decisiones que puede tomar el profesor a la hora de elaborar el Proyecto Curricular de Etapa (P.C.E.) y las programaciones de aula.

En esta ponencia nos limitaremos a considerar las decisiones relativas a la elaboración del P.C.E. y a lo largo de su desarrollo seremos fieles a las indicaciones de L.del Carmen y A.Zabala (1991).

DECISIONES RELATIVAS A LA ELABORACION DEL P.C.E.

1. Adecuación de los Objetivos Generales de Etapa (O.G.E)

A lo largo de la Educación Secundaria Obligatoria, los alumnos deberán alcanzar una docena de objetivos que están expresados en términos de capacidades cognitivas, psicomotrices, de equilibrio personal y de inserción social.

Dado que estos objetivos deben guiar la actuación educativa en todas las áreas de la etapa, resulta de capital importancia que todos los profesores de la etapa los analicen y adapten al contexto socioeconómico y cultural del centro y a las características generales de los alumnos.

En el análisis de los O.G.E. conviene que se desglose el contenido de cada uno de ellos, analizando su significado y el mensaje que contiene, y que se identifiquen los distintos tipos de capacidades que aparecen en él.

En cuanto a la adecuación de los O.G.E. al contexto, ésta se puede llevar a cabo del modo siguiente :

- dando prioridad a unos objetivos sobre otros
- incluyendo otros objetivos que no estén contemplados en el currículo básico
- explicitando más las capacidades y matizándolas
- añadiendo algún comentario explicativo.

2. Análisis y adecuación de los objetivos y contenidos generales de las áreas.

Los Objetivos Generales de Área (O.G.A.) y los contenidos de área deben contribuir a la consecución de los O.G.E. Es decir : las áreas son los instrumentos a través de los cuales el alumno deberá alcanzar los Objetivos Generales de la Etapa.

Ahora bien, el área de Matemáticas no coincide con la disciplina de la que toma su nombre.

El área de Matemáticas debe entenderse como un conjunto de contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) que, en torno a la Matemática, deben ayudar a la consecución de unos objetivos que incluyen todas las capacidades de la persona.

Por tanto, en función de los O.G.E. adaptados al centro, el profesor de Matemáticas deberá responder a aquellas cuestiones que le permitan determinar las características que debe tener su área para la consecución de las intenciones educativas.

He aquí algunas :

¿Qué peso deben tener los aspectos inductivos y deductivos en la presentación de las Matemáticas a los alumnos de la E.S.O.?

¿Qué tipos de contenidos deben considerarse prioritarios?

¿Qué actitudes puede desarrollar el área de Matemáticas?

Las respuestas a preguntas de este tipo configuran lo que en el lenguaje de la Reforma del Sistema Educativo se llama "caracterización del área".

Una vez que se ha hecho la caracterización del área ya se puede pasar al análisis de sus objetivos y contenidos generales.

En lo que se refiere a los O.G.A., puede seguirse un proceso análogo al que hemos utilizado en la sección anterior. Es decir :

- * Desglosar el contenido de cada objetivo y descubrir los distintos tipos de capacidades que aparecen en él.
- * Dar prioridad a unos objetivos sobre otros.
- * Incluir otros objetivos que no se contemplen en el currículo básico
- * Explicar más las capacidades y matizarlas.
- * Añadir algún comentario aclaratorio.

En cuanto a los contenidos generales del área, el profesor de Matemáticas deberá decidir cuáles son los contenidos de aprendizaje que podrá enseñar para conseguir los O.G.A. de su centro.

En el currículo básico los contenidos de aprendizaje del área de matemáticas están distribuidos en cinco bloques :

- (-) Números y operaciones : significados, estrategias y simbolización.
- (-) Medida, estimación y cálculo de magnitudes.
- (-) Representación y organización en el espacio.
- (-) Interpretación, representación y tratamiento de la información.
- (-) Tratamiento del azar.

Estos bloques de contenidos son normativos en cuanto que permiten la consecución de los O.G.A. del currículo básico, que también son normativos.

No obstante, dado que los O.G.A. ya han sido adaptados al centro, el profesor de Matemáticas deberá revisar los contenidos del currículo básico para -sin quitar ninguno- adaptarlos de acuerdo con los O.G.A. contextualizados, con los conocimientos previos del alumno, con el tiempo disponible para su enseñanza, con los recursos educativos del centro, etc.

3. Contextualización de los Objetivos Generales de Área en los ciclos.

En este apartado el profesor debe definir la medida en que cada ciclo contribuirá al desarrollo de los O.G.A.

¿Cómo hacerlo?

Veamos un ejemplo práctico realizado por un grupo de profesores del CEP de Burgos.

En dicho ejemplo se lleva a cabo la contextualización del siguiente Objetivo General del Área de Matemáticas :

"Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica,

algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa".

"Al final del primer ciclo -dicen- el trabajo realizado en Matemáticas por el alumno/a habrá contribuido, de manera satisfactoria y adecuada, al desarrollo de las capacidades siguientes :

(1) Desarrollar el uso sencillo y preciso del lenguaje matemático e iniciarse en el tratamiento y uso de los lenguajes más complejos.

(2) Utilizar diversos tipos de lenguaje, según la secuencia de prioridades siguientes : verbal, gráfico, numérico, geométrico.

(3) Expresarse con la precisión necesaria para cada situación concreta, intentando combatir la comodidad y la dejadez en la expresión verbal y escrita.

(4) Participar en debates sobre conceptos, enunciados de los mismos, respetando las reglas del debate.

(5) Reconocer las ventajas de expresarse con precisión, valorando la economía en la expresión y la elegancia en los distintos lenguajes de expresión matemática.

(6) Verbalizar las ideas y usar un orden lógico en las explicaciones, para conseguir una mejor interiorización de las mismas y mejorar la precisión en la comunicación de ideas.

Al final del segundo ciclo -prosiguen- el trabajo realizado en Matemáticas por el alumno/a habrá contribuido, de manera satisfactoria y adecuada, al desarrollo de las capacidades siguientes:

(1) Usar las distintas formas de expresión matemática para comunicarse en situaciones cotidianas, incidiendo sobre todo en los ámbitos numérico, geométrico y gráfico.

(2) Comunicarse, en el sentido de expresarse matemáticamente y entender los mensajes matemáticos, tanto a nivel oral como escrito.

(3) Plantear la comunicación de las ideas matemáticas de una manera organizada e inteligible a varios niveles.

(4) Apreciar el valor que tiene la precisión, utilidad y elegancia en los distintos aspectos del lenguaje matemático en la sociedad.

4. Secuenciación de los contenidos.

La secuenciación de contenidos debe informarnos acerca del orden en que éstos deben tratarse para que el alumno adquiera un conocimiento cada vez más profundo y funcional.

Para realizar una organización de este tipo no hay reglas mágicas ni algoritmos infalibles. No obstante, conviene tener en cuenta una serie de criterios que pueden facilitar la tarea:

(*) Los contenidos deben estar de acuerdo con el desarrollo evolutivo del alumno. Es decir: las dificultades de los contenidos que se quieran enseñar deben estar a una *distancia óptima* de lo que el alumno sea capaz de hacer. Por tanto, deben evitarse aquellos obstáculos innecesarios: formalización anticipada, cálculos excesivamente complejos, etc.

(*) La secuenciación de contenidos debe ser coherente con la lógica interna de las Matemáticas. Sería absurdo, por ejemplo, enseñar el número entero antes que el natural; sin embargo, es razonable trabajar la resolución geométrica de la ecuación de segundo grado antes que la resolución algebraica de la ecuación cuadrática.

(*) La secuenciación de contenidos debe acomodarse a los conocimientos previos de los alumnos. Es decir: para que puedan conseguirse aprendizajes significativos de nuevos contenidos, el profesor deberá partir de las experiencias e ideas que tienen los alumnos en relación con lo que quiere enseñar.

(*) La secuenciación de contenidos puede organizarse dando prioridad a un cierto tipo de contenidos sobre otros. Así, por ejemplo, en la secuenciación realizada por algunos miembros del GRUP ZERO de Barcelona (Azcárate, Berini, Deulofeu, Lladó y Casadevall), se da prioridad a los contenidos procedimentales frente a los conceptuales y actitudinales.

(*) La secuenciación de contenidos se puede estructurar alrededor de unas ideas centrales (ideas-eje). Así, por ejemplo, en la secuenciación del GRUP ZERO las ideas-eje son los Bloques de Contenidos del currículo básico.

(*) Los contenidos deben ser tratados de forma continua y progresiva (currículo en espiral) y deben ordenarse de modo que tengan continuidad a lo largo de toda la etapa. En aproximaciones sucesivas, el alumno debe progresar desde un conocimiento espontáneo y simple hasta un conocimiento conceptualizado de forma abstracta y cada vez más complejo.

(*) La secuencia de contenidos debe contemplar la interrelación entre los diferentes contenidos del área de Matemáticas para facilitar el aprendizaje significativo de los alumnos.

Dado que la secuenciación de contenidos es una de las tareas más complejas del Proyecto Curricular de Etapa, puede resultar de capital importancia que el conjunto de profesores del Seminario de Matemáticas consulte distintas propuestas de secuenciación de contenidos que les ayuden a establecer la suya propia.

5. Principios metodológicos generales.

En este apartado el profesor debe tomar decisiones acerca de cuáles son las opciones metodológicas más adecuadas para la consecución de aprendizajes significativos.

En el Anexo del Real Decreto 1345/1991, de 6 de Septiembre, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria, se señalan los

principios metodológicos generales que son válidos para todas las áreas de la etapa:

- (*) Partir del nivel de desarrollo del alumno y de sus aprendizajes previos.
- (*) Asegurar la construcción de aprendizajes significativo a través de la movilización de sus conocimientos previos y de la memorización comprensiva.
- (*) Posibilitar que los alumnos y alumnas realicen aprendizajes significativos por sí solos.
- (*) Proporcionar situaciones en las que los alumnos deban actualizar sus conocimientos.
- (*) Proporcionar situaciones de aprendizaje que tengan sentido para los alumnos, con el fin de que resulten motivadoras.
- (*) Proporcionar situaciones de aprendizaje que exijan una intensa actividad mental del alumno que le lleve a reflexionar y justificar sus actuaciones.
- (*) Promover la interacción en el aula como motor de aprendizaje.

Todos estos principios tienden a dar respuesta a la finalidad fundamental de la E.S.O.: *la atención a la diversidad del alumnado*. Sin embargo, puede que también sea necesario debatir otros aspectos metodológicos más específicos y que conducen al mismo fin, tales como: refuerzos, desdobles, recuperaciones, etc.

También se deberá llegar a acuerdos sobre cómo introducir aquellas actitudes que son comunes a todas las áreas de la etapa: tolerancia, trabajo en equipo, ...

Por último, en centros con alumnos con necesidades educativas especiales, se deberá prestar atención a las estrategias metodológicas que permitan compensar sus dificultades.

6. Opciones metodológicas propias de cada área.

En este punto, el Seminario de Matemáticas decidirá, por ejemplo, si va a trabajar el cálculo dedicándole Unidades Didácticas propias o incorporándolo a los restantes contenidos.

7. Criterios para la organización de los espacios y los tiempos.

En este ámbito, las decisiones que tomará el equipo docente de un centro podrán referirse a algunos de los aspectos siguientes:

- * organización del espacio según el modelo aula-grupo o aula-materia.
- * criterios para la utilización de los espacios comunes: sala de audiovisuales, biblioteca, gimnasio, ...
- * espacios y horarios para las materias optativas.
- * horario general del centro.
- * salidas y actividades comunes a todo el centro o a varios grupos de alumnos.

8. Criterios para la selección de materiales curriculares y otros recursos didácticos básicos.

Se entiende por material curricular **cualquier tipo de documento que ayude a la planificación y realización del currículo en los centros, y que haya sido elaborado con esta finalidad explícita** (del Carmen, L. y Zabala, A. (1991)).

Conviene hacer una distinción entre los materiales curriculares para profesores y para alumnos.

- Los materiales curriculares para profesores deben servir para encarrilar el proceso de planificación de la enseñanza y se pueden utilizar fundamentalmente en dos situaciones:

- (a) en la elaboración de Proyectos Curriculares de Etapa.
- (b) en la elaboración de Programaciones de Aula.

En la primera situación, los materiales curriculares deben ofrecer modelos para la selección de objetivos y contenidos, para la secuenciación de contenidos, para la selección de diferentes estrategias didácticas, etc.

En el segundo caso, los materiales curriculares deben dar pautas para fijar objetivos didácticos, para elegir los distintos tipos de actividades, para decidir que tipo de metodología puede seguirse en una determinada unidad didáctica, etc.

En cuanto a los materiales curriculares para alumnos se refiere (libros de consulta, cuadernos de ejercicios, ...), el profesor deberá decidir cuáles van a utilizarse en cada ciclo o curso.

En el caso de materiales curriculares impresos pueden seguirse los criterios de análisis y selección siguientes:

- 1.- Detectar los objetivos educativos que subyacen a dichos textos y comprobar hasta que punto se corresponden con los establecidos en el centro y concretamente con los del grupo de alumnos a los que se dirige.
- 2.- Averiguar los contenidos que se trabajan y comprobar si existe una correspondencia entre los contenidos y los objetivos.
- 3.- Averiguar las secuencias de actividades que se proponen en los materiales para cada uno de los contenidos.
- 4.- Analizar cada una de las actividades propuestas para comprobar si cumplen los requisitos del aprendizaje significativo en relación a los contenidos establecidos.
- 5.- Establecer el grado de adaptación al contexto educativo en el que se van a utilizar.

Además del análisis de materiales curriculares, es imprescindible que el profesor de Matemáticas identifique y seleccione otros recursos didácticos

básicos tales como: revistas, materiales manipulables para utilizar en el aula, materiales audiovisuales, programas de ordenador, . . .

En el volumen de las "Cajas Rojas" dedicado al área de Matemáticas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria se ofrece una **Guía Documental y de Recursos** que puede ser de gran ayuda a la hora de seleccionar los materiales curriculares y otros recursos didácticos.

9. Criterios para el uso de materiales curriculares y otros recursos didácticos.

Además de intervenir en la selección de materiales curriculares y otros recursos didácticos básicos, el equipo docente del centro deberá decidir sobre su uso. En este punto deberán darse respuesta a cuestiones como estas:

- ¿Dónde estarán los materiales?
- ¿Quién será el responsable de su cuidado?
- ¿Quiénes tendrán acceso a ellos?
- ¿Cómo se archivarán?
- ¿Cómo se difundirán?

Hasta aquí las decisiones relativas al qué, cuándo y cómo enseñar. Pasemos a las decisiones relativas al qué y al cómo evaluar. Omitimos el **cuándo evaluar** dado que la evaluación debe estar presente en todo el proceso de enseñanza/aprendizaje.

10. Decisiones relativas al qué evaluar.

La decisión más importante que debe tomarse en el Proyecto Curricular de Etapa relativa al qué evaluar, se refiere a los *criterios de evaluación* en los que se recogen aquellos aprendizajes esenciales para que el alumno pueda enfrentarse sin dificultades a su actividad posterior. Dichos criterios hacen referencia a contenidos concretos y de ellos expresan el tipo y grado de aprendizaje que debe alcanzarse. Sirven como referente para la evaluación sumativa y dan información que resultará útil para tomar decisiones de promoción.

En el Real Decreto del Currículo se recogen catorce criterios de evaluación para el área de Matemáticas de la E.S.O. A modo de ejemplo hemos seleccionado los dos siguientes:

1.- Utilizar los números enteros, decimales y fraccionarios y los porcentajes para intercambiar información y resolver problemas de la vida cotidiana.

Se pretende garantizar con este criterio la adquisición de un rango amplio de destrezas en el manejo de los distintos tipos de números de forma que pueda compararlos, operar con ellos y utilizarlos para recibir y producir información.

El criterio se refiere a la utilización de números fraccionarios en situaciones reales y por ello con denominadores no excesivamente grandes, y con no más de dos operaciones encadenadas. Con respecto a los porcentajes, el criterio

se refiere a su utilización como relación entre números y como operador en la resolución de problemas.

5.- Resolver problemas de la vida cotidiana por medio de la simbolización de las relaciones que puedan distinguirse en ellos y, en su caso, de la resolución de ecuaciones de primer grado.

Este criterio va dirigido a comprobar que el alumno es capaz de utilizar las herramientas algebraicas básicas en la resolución de problemas. Para ello, ha de poner en juego la capacidad de utilizar los símbolos, con las convenciones de notación habituales, para el planteamiento de ecuaciones, y resolver esas ecuaciones por algún medio fiable que no necesariamente ha de ser la manipulación algebraica de las expresiones.

En el Proyecto Curricular de Etapa, el Seminario de Matemáticas deberá revisar los criterios de evaluación del currículo básico, adaptándolos a las características propias del alumnado, y deberá concretarlos para cada uno de los ciclos.

En el volumen de las "Cajas Rojas" dedicado al área de Matemáticas de la E.S.O. aparece una secuenciación por ciclos de los criterios de evaluación.

11. Decisiones relativas al cómo evaluar el proceso de aprendizaje de los alumnos.

En este apartado, el profesor decidirá cuáles son los instrumentos idóneos para la evaluación del proceso de aprendizaje de sus alumnos.

A título orientativo indicamos los siguientes:

- * Observación de los alumnos.
- * Revisión de los trabajos de los alumnos.
- * Pruebas específicas de evaluación a lo largo del aprendizaje y al final del proceso.
- * Investigaciones individuales o en grupo.
- * Autoevaluación.
- * Coevaluación.

Hasta aquí hemos pasado revista al conjunto de decisiones que debe tomar un profesor, como miembro del equipo docente y del Seminario de Matemáticas de un centro, para acomodar el currículo básico a las características de los alumnos de su aula.

Para ello, siguiendo a L. del Carmen (1990), *el cambio fundamental a promover no es tanto preparar profesores que sepan mucha biología o muchas técnicas de expresión plástica, sino profesores con unos criterios psicopedagógicos claros y unos instrumentos de aplicación y análisis que les ayuden a desarrollar las distintas áreas curriculares, adecuando su enseñanza a cada situación concreta. Esta afirmación no supone una infravaloración de los contenidos científicos, sino el reconocimiento de la necesidad de presentarlos integrados en un marco teórico más amplio, que facilite al*

profesor la reflexión y la elaboración de estrategias personales, adecuadas a los distintos problemas que se planteen en su actividad docente.

Consecuentemente, la formación que necesita el profesorado para la implantación y el desarrollo de la E.S.O. debe estar dirigida a la consecución de los siguientes objetivos prioritarios:

- Conocer las características psicopedagógicas de los alumnos de la etapa educativa correspondiente.
- Comprender los objetivos generales de la etapa y de las áreas que imparta.
- Desarrollar la capacidad de analizar y organizar las tareas docentes en función de las intenciones educativas.
- Desarrollar la capacidad de trabajar en equipo.
- Desarrollar una actitud abierta de observación hacia los alumnos.
- Desarrollar la capacidad para crear una dinámica interactiva en clase.
- Desarrollar la capacidad de detectar las características personales de los alumnos y adecuar a ellas los procesos de enseñanza.
- Fomentar la comprensión de los contenidos básicos que deben impartirse y de sus dificultades de aprendizaje.
- Desarrollar la capacidad de seleccionar y organizar actividades.
- Desarrollar la capacidad de analizar, seleccionar y organizar todo tipo de recursos educativos en función de los objetivos que pretendan alcanzarse.
- Desarrollar la capacidad de observar y sistematizar la evolución de los alumnos en relación con los objetivos educativos, y actuar consecuentemente con los resultados que se obtengan.

¿Cómo conseguir este tipo de formación?

Para acabar esta ponencia, me van a permitir unas consideraciones acerca de la fórmula de intervención más idónea para dar respuesta a la pregunta que acabamos de plantear; nos estamos refiriendo a la *formación en centros*.

A grandes rasgos, puede decirse que la formación en centros es *un tipo de formación dirigida al equipo docente de un centro y ligada a la práctica*.

Precisemos un poco más :

1.- La formación en centros se dirige a todo el equipo docente que debe realizar su trabajo conjuntamente, en virtud de las decisiones que deben tomar cooperativamente. No debe confundirse equipo docente con claustro de profesores. Por ejemplo, en un centro 12-18, el conjunto de profesores de E.S.O. configuran un **equipo docente** y como tal puede ser sujeto de un proyecto de formación en centros.

2.- La formación en centros se realiza en el mismo lugar de trabajo del enseñante, o en su entorno escolar, y en las condiciones y circunstancias en las que el profesor desarrolla su actividad. Esto obliga a que en el centro educativo tengan que arbitrarse aquellas medidas que permitan el buen desarrollo de la actuación formativa:

- * organización del centro
- * horarios adecuados
- * utilización de recursos

Dicho en otras palabras: el centro educativo debe incorporar a su plan de trabajo las tareas que exige el progreso del programa de formación sin que ello interfiera en su buen funcionamiento.

3.- La formación en centros toma como primera referencia de análisis la experiencia diaria de los profesores en su entorno escolar. La reflexión sobre la propia práctica profesional sirve para que los profesores emitan un diagnóstico de sus necesidades de formación y -al mismo tiempo- las planifiquen dando prioridad a las más urgentes.

4.- La formación en centros responde a la concepción de centro educativo como lugar estratégico para que se operen los cambios esperados en el Sistema Educativo. A lo largo de esta ponencia ya hemos visto que al centro educativo le corresponde la adaptación del currículo básico a las características generales de sus alumnos. Para lograr esta acomodación deben tomarse decisiones en equipo que atañen a los objetivos generales de etapa y áreas, a los contenidos de aprendizaje, a las estrategias metodológicas y a la evaluación del proceso educativo.

Esta toma de decisiones en común supone un cambio sustancial en la práctica habitual de los centros. Para promover y conseguir este cambio, las actividades de formación permanente se deben canalizar hacia los equipos docentes, ajustándolas a las necesidades concretas del centro en el que desarrollan su actividad profesional.

5.- La formación en centros favorece el trabajo en equipo que -a su vez- permite adaptar la propuesta del currículo básico a través de la elaboración que cada centro hace de su Proyecto Curricular.

6.- La formación en centros no puede considerarse como una modalidad de formación, dado que no representa una única vía de formación.

En el apartado 5 de la Orden de 26 de Noviembre de 1992 (por la que se regula la convocatoria, reconocimiento, certificación y registro de las actividades de formación permanente del profesorado y se establece la equivalencia de las actividades de investigación y de las titulaciones universitarias) se dice:

* Las actividades de formación permanente se clasificarán en tres modalidades básicas: cursos, seminarios y grupos de trabajo. Las actividades que no se correspondan con dichas denominaciones podrán asimilarse a una de ellas en razón de sus características.

* La formación en Centros, por su especial importancia, se considerará como una categoría específica de actividades de formación, aunque en su desarrollo puedan darse las modalidades citadas en el punto anterior de este apartado.

En un centro coinciden profesores de muy diversa índole que configuran un microcosmos en el que se pueden dar la mayoría de las características del universo profesional docente. Consecuentemente, las actividades de formación en el centro deberán ajustarse a las peculiaridades de cada equipo docente.

No existe una clasificación de los centros docentes en función de las particularidades de sus profesores. Entre los centros hay las mismas diferencias que entre los individuos. No obstante, nos atrevemos a señalar algunos rasgos propios de dos tipos de centros: el centro ideal (poco frecuente) y el centro real (más extendido).

- En el *centro educativo ideal* los equipos docentes tienen una larga trayectoria de trabajo en común, existen criterios compartidos de actuación con los alumnos, se han realizado proyectos de trabajo en común, etc.

- En el *centro educativo real* existen grupos aislados de profesores con iniciativas y con una actitud de revisión de su práctica que les lleva a acometer proyectos de innovación. Existen profesores que se resisten a las novedades: hay profesores contrarios a las innovaciones y otros que son indiferentes a ellas. En consecuencia, no hay una trayectoria de trabajo en común.

En el primer caso (centro ideal), el equipo docente posee el grado de madurez suficiente para analizar sus circunstancias y condiciones y toma la iniciativa para proponer a las instituciones de formación (Centros de Profesores, Universidad, Ayuntamientos,...) las modalidades y estrategias de formación que desea, los recursos que necesita y los temas de las actividades de formación. De este modo, formula un proyecto y lo incorpora a la organización del centro.

En el segundo caso (centro real) se precisa de alguna exigencia venida del exterior -por ejemplo, la elaboración de los Proyectos Curriculares de Etapa- para que el equipo docente se movilice y se embarque en alguna actividad de formación que, en su día, se puede convertir en un proyecto de formación en el centro.

La realización del Proyecto Curricular de Etapa puede generar procesos de formación permanente dado que no es un proyecto cerrado y está sujeto a revisión permanente.

Sin embargo, si el Proyecto Curricular de Etapa sólo sirve para dar una respuesta estricta a las exigencias legales (situación que también puede darse en la práctica), poco o nada cambiará la vida del centro.

Dos palabras más y acabo.

Para que la implantación de la Reforma del Sistema Educativo produzca los cambios esperados en la práctica docente, parece inevitable que los profesores opten por un modelo de formación centrado en la escuela. La elaboración del Proyecto Curricular de Etapa puede ser un buen momento para ello.

BIBLIOGRAFIA

Antunez, S. et al. (1992). *Del Proyecto Educativo a la Programación de Aula*. Editorial Graó. Barcelona.

del Carmen, L. (1990). *Desarrollo curricular y formación permanente del profesorado*. Formación de Formadores en Didáctica de las Ciencias. Nau Llibres. Valencia.

del Carmen, L. y Zabala, A. (1991). *Guía para la elaboración, seguimiento y valoración de Proyectos Curriculares de Centro*. MEC., Centro de Publicaciones. Madrid.

García Suárez, J.A. (1988). *La formación del profesorado ante la reforma de la enseñanza*. Promociones y Publicaciones Universitarias, S.A. Barcelona.

Plan de Investigación Educativa y de Formación del Profesorado. M.E.C. Madrid, 1989.

Cajas Rojas, *Educación Secundaria Obligatoria*. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid, 1992.

EL ESTUDIO DE CASOS COMO UNA APROXIMACIÓN METODOLÓGICA AL PROCESO DE APRENDER A ENSEÑAR MATEMATICAS

Salvador Llinares Giscar. Escuela Universitaria de Magisterio de Sevilla

1. INTRODUCCION

"me veía incapaz de solucionar los problemas que tenían los niños. Al corregir un ejercicio era diciéndoselo, escribiéndoselo y viendo... como lo copiaban pronto, pero yo tenía la sensación de que no se enteraban de las cosas" (MCEF.22)

"¿qué es lo fundamental que los niños deben tener claro de este tema?, ¿qué actividades puedo hacer?." (MCEF.53)

El protocolo anterior de un estudiante para profesor de Primaria esta inmerso en una crítica al papel desempeñado por un programa de formación de profesores. Para este estudiante para profesor su preparación universitaria no le había proporcionado con lo que él pensaba que podría serle útil en las situaciones prácticas. Cómo ayudar a los aprendices a superar sus problemas de aprendizaje, cuál son las "grandes ideas" en relación a las matemáticas que deberían organizar la acción de enseñanza, qué recursos y actividades concretos se pueden utilizar para cada noción específica, cómo gestionar las ambigüedades en el aula (diferencias de aprendizaje, de organización social del aula, sobre el papel del profesor en cada momento, etc.) son cuestiones que exigen respuesta por parte de los estudiantes para profesor en las situaciones de enseñanza.

Generalmente se reconoce de una manera más o menos implícita las limitaciones que tienen los programas de formación de profesores de Primaria, tanto en su vertiente general, como específica de la Educación Matemática. Tanto si se dan las culpas a la estructura administrativa institucional que tienen dentro del sistema educativo, al papel de las prácticas, como a las características de los propios planes de estudio, existe una especie de disconformidad con los efectos producidos.

Algunas de las dicotomías que caracterizan los programas de formación de los profesores de Primaria son

- los lugares donde se articula (Universidad y escuela), y
- la naturaleza del conocimiento que se proporciona (conocimiento teórico frente conocimiento práctico personal del profesor).

Esta doble dicotomía se pone de manifiesto de manera excesiva en los programas de formación generando implícitamente dos mundos - ¿opuestos?

- sin relación.

Las concepciones implícitas que fundamentan la estructura de los programas de formación de Profesores de Primaria conllevan el proporcionar a los futuros profesores un conocimiento teórico (principios generales, resultados de investigación, etc.) con el propósito de que sean capaces de utilizarlo en las situaciones prácticas. Sin embargo el proceso de transformar el conocimiento teórico en las situaciones prácticas no es tan sencillo.

Por otra parte, las nuevas concepciones sobre el aprendizaje empiezan a subrayar el hecho de que no es sólo un asunto de "trasladar el conocimiento teórico a las situaciones prácticas", sino que la posible interacción entre

- conocimiento teórico,
- condiciones de la situación, y
- concepciones del profesor

hacen que se genere nuevo conocimiento.

2. CAMBIO EN LA CULTURA MATEMATICA ESCOLAR. ¿REFLEXION ACADÉMICA O CAMBIO DE LA PRACTICA DEL PROFESOR?

Desde la perspectiva particular de la Educación Matemática, en estos momentos en los que diferentes documentos empiezan a cuestionarse sobre la necesidad de un cambio en la forma en que se concibe la enseñanza de las Matemáticas en la escuela (NCTM, 1989, Cockcroft, 1985), la cuestión de la formación de profesores se está considerando un elemento clave (NCTM, 1991). Las nuevas perspectivas a través de las cuales se intenta caracterizar los procesos de enseñanza aprendizaje de las Matemáticas definen de forma implícita un cambio en la cultura matemática escolar que impera en nuestras escuelas, apoyado en una traslación epistemológica de la naturaleza del conocimiento matemático escolar.

En la nueva caracterización de la enseñanza de las Matemáticas escolares el énfasis se coloca en las características de la actividad matemática que genera el conocimiento. Esto define unas implicaciones sobre la naturaleza de las prácticas sociales tradicionales en las aulas. Al subrayar la actividad matemática como centro de atención del proceso de enseñanza se derivan nuevas

- responsabilidades y papeles del profesor, y
- caracterización del conocimiento matemático escolar.

La dificultad de generar un cambio de esta índole está enraizado en la traslación epistemológica que implica en relación

- al conocimiento matemático, y
- a la actividad matemática en el aula.

Esto lleva a tener que hablar de una nueva cultura matemática escolar.

Como consecuencia se deriva una cuestión en el sentido de si el contenido de estos documentos constituyen sólo una reflexión académica o aportan los fundamentos para un cambio real de las prácticas habituales del profesor de matemáticas. En este sentido, los movimientos de reforma introducen en la formación de profesores una tensión entre

- las prácticas tradicionales, y
- el propio objetivo de la reforma,

Esta cuestión inicial, en el contexto de la formación inicial de profesores de Matemáticas, toma la siguiente forma:

¿Cómo ayudar a los estudiantes para profesor a desenvolverse como profesores de manera coherente en las nuevas situaciones cuando proceden, como aprendices, de una cultura matemática escolar que se pretende superar?

Esta situación ha definido dos espacios problemas en formación de profesores:

- la caracterización de nuevos dominios y estructura de conocimiento del profesor de Matemáticas (Llinares, 1991; Llinares y Sánchez, 1990), y
- una nueva conceptualización del proceso de aprender a enseñar Matemáticas. ¿Cómo el profesor/estudiante para profesor genera e integra diferentes dominios del conocimiento base para la enseñanza de las matemáticas? (¿cómo lo adquieren y lo utilizan?) (Llinares, 1992).

3. APRENDER A ENSEÑAR MATEMATICAS. ¿UNA NUEVA CONCEPTUALIZACION?

La forma de conceptualizar el conocimiento del profesor y cómo este fundamenta la práctica influyen en diferentes maneras de entender el proceso de aprender a enseñar. Recientes estudios han aportado información sobre la forma de entender el conocimiento base para la enseñanza, tanto en relación a los diferentes dominios como a la estructura y organización que tiene. Como consecuencia se han planteado nuevas cuestiones sobre la conceptualización del proceso de aprender a enseñar matemáticas (Llinares, 1992) que indudablemente deberían tener repercusiones sobre el contenido y organización de los programas de formación de profesores.

Diferentes aspectos aportan información para una conceptualización del proceso de aprender a enseñar Matemáticas. Entre ellos podemos señalar

- el papel desempeñado por las "imágenes" que poseen los estudiantes para profesor de las situaciones de enseñanza de las Matemáticas,
- la naturaleza del uso que el profesor hace del conocimiento base para la enseñanza (por ejemplo el proceso definido por el término "razonamiento pedagógico" utilizado por Shulman). En particular el uso del conocimiento matemático del profesor en situaciones de enseñanza depende de otros dominios de conocimiento junto con las características de las destrezas

cognitivas (generadas a través de procesos de reflexión) para guiar la práctica (Wilson, Shulman y Richert, 1987), y

- las diferencias epistemológicas entre la naturaleza del conocimiento científico y el conocimiento práctico del profesor.

La identificación de la cuestión anterior sobre el papel que pueden desempeñar los programas de formación de profesores de Matemáticas, teniendo en cuenta las características de las Reformas pretendidas, enfatiza, si cabe en mayor medida, el papel desempeñado por las concepciones previas de los estudiantes para profesor en el proceso de aprender a enseñar Matemáticas. En particular, el "aprehendizaje" por observación realizado por los estudiantes para profesor cuando son aprendices de Matemáticas en la escuela hace que posea unas "imágenes" sobre

- cual es el papel del profesor de Matemáticas en la escuela,
- cual es el rol del alumno en clase,
- la "forma" que adopta la clase de Matemáticas (cómo debe ser una clase de Matemáticas),
- el objetivo de la Educación Matemática en los niveles obligatorios,
- características del curriculum de las matemáticas escolares y como viene contemplado el conocimiento matemático,
- que significa aprender matemáticas, etc; que son compatibles con la cultura matemática escolar dominante en estos momentos. Estas "imágenes" pueden tener diferentes niveles de abstracción, desde las que están relacionadas con
 - el papel de la Educación Matemática,
 - el profesor ideal,
 - diferentes formas de enseñar, o simplemente
 - cómo se debería enseñar alguna noción específica.

Para Calderhead (1988) "Cómo estas imágenes en diferentes niveles de abstracción interactúan unas con otras requiere una mayor investigación, pero el término "imagen" parece potencialmente útil para describir el repertorio de modelos influyentes, casos, tipificaciones e incidentes que actúan en la mente de un profesor como ejemplos, metáforas y guías para la acción". (Calderhead, 1988, p. 55).

El que estas imágenes sean compatibles con la cultura escolar no significa que los estudiantes para profesor coincidan con las características de esta. La naturaleza de su propia experiencia en aspectos particulares le permite haber generado una posición más o menos crítica hacia la forma en que ha visto enseñar Matemáticas y cómo él mismo las ha aprendido. Estas concepciones previas, vinculadas a las imágenes, se convierten en referencias para el proceso de aprender a enseñar y por consiguiente condicionan en parte el posicionamiento de los estudiantes para profesor sobre

- lo que se considera conocimiento útil para enseñar (el contenido del proceso de aprender a enseñar), y
- la forma en que este conocimiento se adquiere (dónde y qué es lo que hay que hacer para aprender a enseñar).

Como consecuencia el desarrollo de "destrezas reflexivas" (metacognición) durante el proceso de aprender a enseñar es necesario para generar "aproximaciones críticas" a las situaciones de enseñanza como una forma de cuestionar y superar las concepciones que fundamentan las "imágenes" que se poseen sobre la cultura matemática escolar de la que proceden. Así, hacer conscientes a los estudiantes para profesor de la forma que están aprendiendo se constituye en un paso necesario para intentar responder con éxito a la cuestión fundamental planteada en estos momentos en formación de profesores de Matemáticas.

4. LOS CASOS Y LA FORMACION DE PROFESORES DE MATEMATICAS

El proceso complejo que constituye el aprender a enseñar matemáticas implica el tener que considerar aproximaciones metodológicas alternativas. Los diferentes aspectos considerados anteriormente, que ayudan a conceptualizar y caracterizar el proceso de aprender a enseñar matemáticas, exige el tener que pensar en aproximaciones metodologías diversas que de alguna forma los recojan. Una de estas posibles alternativas lo constituye la metodología apoyada en el estudio de casos (Sykes y Bird, 1992).

Si consideramos que uno de los objetivos del proceso de aprender a enseñar matemáticas es que los profesores y estudiantes para profesores construyan un conocimiento conceptual y destrezas cognitivas asociadas, que les permita dotar de significado y gestionar las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, los entornos de aprendizaje que se diseñen en los programas de formación deben proporcionarles las oportunidades adecuadas para ello. En esta dirección el análisis, reflexión, discusión y trabajo apoyado en los casos puede ayudar a conseguir estos objetivos.

En este sentido los casos son utilizados como un instrumento para la enseñanza por el formador de profesores y como un instrumento de aprendizaje por los estudiantes para profesor. Además, los casos pueden ser entendidos como descripción de situaciones que ayudan a los estudiantes para profesor a introducirse en las nuevas características de la enseñanza de las Matemáticas que se pretende generar, frente a la práctica tradicional que ellos conocen como consecuencia de su paso por la escuela.

El empleo de los casos en formación de profesores no guarda unos canones estrictos en estos momentos. Los casos varían en foco, en la forma de utilizarlos y en su estructura. La literatura sobre el empleo de los casos en formación de profesores presenta diversas alternativas.

En esta sección presentaremos algunas de estas alternativas y se señalarán cuestiones y nuevas perspectivas que generan su uso así como algunas limitaciones. En los próximos apartados describiremos

- propósitos de la utilización de los casos,
- características de los casos en formación de profesores de Matemáticas (¿qué es un caso?),
- un posible formato y uso de los casos,
- quién puede construir los casos, y finalmente
- algunos ejemplos.

Propósito de la utilización de los casos.

Podemos identificar a grandes rasgos varios objetivos en la utilización de los casos como instrumento de enseñanza aprendizaje en los programas de formación de profesores de Matemáticas. Los casos pueden ser vistos para

- proporcionar precedentes a la práctica,
- como un medio para el desarrollo de proceso de reflexión y generar aproximaciones críticas a las situaciones de enseñanza, y
- como situaciones que presentan cuestiones enraizadas en las nuevas aproximaciones a la enseñanza de las Matemáticas que se pretende generar.

La metodología apoyada en los casos pretende proporcionar a los estudiantes para profesor con estas "oportunidades", indicadas con anterioridad, para empezar a pensar sobre contextos específicos del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (los casos como precedentes de la práctica, Shulman, 1992). Los contextos particulares presentados en los casos pretenden introducir a los estudiantes para profesor en los problemas y roles implícitos en la situación descrita. Es decir, pretenden acercar a los estudiantes para profesor

- a la complejidad de las situaciones específicas, y
- a la naturaleza de los procesos de razonamiento pedagógico que se pueden generar en estos dominios mal estructurados que son las situaciones de enseñanza.

De esta manera, el trabajo con los casos se convierte en oportunidades para que el estudiante para profesor pueda "enfrentarse" a los problemas, tensiones y ambigüedades de las situaciones reales proporcionándole un contexto para generar y perfeccionar sus "argumentos prácticos"; es decir, son situaciones -en este momento colectivas - en las que se pretende favorecer el tipo de razonamiento que el profesor puede/debe desarrollar en las situaciones de enseñanza-aprendizaje. Es una forma de aproximar a los estudiantes para profesor a cuestiones relevantes para la práctica cotidiana.

El análisis de casos realizado en contextos colectivos por grupos de estudiantes para profesor se concibe así como una iniciativa que permite generar aproximaciones "críticas" a situaciones concretas. El método de casos intenta generar las condiciones necesarias para que los estudiantes para profesor lleguen a cuestionarse aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de tópicos concretos dados por cierto de manera incuestionable como consecuencia de su propio aprendizaje. Esto podría entenderse como el cauce a través del cual se puede llegar a cuestionar aspectos de la cultura matemática existente como un paso previo para intentar modificarla. En este sentido sólo con una aproximación crítica a la cultura matemática escolar existente se puede aspirar a modificarla.

Este proceso, a través del cual se llega a cuestionar diferentes situaciones, permite caracterizar oportunidades a través de las que el estudiante para profesor pueda llegar a ampliar su comprensión y generar su propio marco conceptual mediante el que dotará de significado a las situaciones de enseñanza futuras (conocimiento práctico personal). El uso de casos en formación de profesores de matemáticas pretende evitar la posible sobregeneralización de principios teóricos en las situaciones de enseñanza.

Por otra parte, para algunos autores (Harrington y Garrison, 1992) los casos no deberían ser contruidos y utilizados para reflejar la existencia de una y solo una teoría correcta que procede de los expertos (científicos, académicos). Evitar la construcción y el uso de los casos como ejemplos de principios teóricos se consigue, para estos autores, integrando profesores en ejercicio y formadores de profesores en equipos dedicados a la elaboración de casos apoyados en los dilemas de enseñanza que forman parte de la experiencia de los profesores.

Finalmente, el contexto de reforma en el que nos encontramos añade otro propósito al empleo de los casos en la formación de profesores y es el de presentar situaciones "enraizadas" en la nueva concepción de la enseñanza que caracterizan las reflexiones realizadas a nivel académico.

¿Que es un caso en formación de profesores de Matemáticas? Existen diferentes contextos en los que los casos son empleados con objeto distinto (Marcelo, C. 1991). Aquí nos centraremos únicamente en características que los casos pueden reunir cuando se utilizan en programas de formación de profesores, y por tanto, con una doble perspectiva (como instrumentos de enseñanza y como instrumento de aprendizaje). En este sentido, los casos pretenden ser "escenas" específicas que presentan cuestiones sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje a resolver; es decir, son situaciones de resolución de problemas, en situaciones de aprendizaje o enseñanza, que no tienen porque tener solución única ni procesos de solución únicos. Desde esta perspectiva los casos suelen ser narraciones que describen alguna cuestión relativa a

- procesos de aprendizaje, o
- situaciones de enseñanza

contextualizadas en un tiempo y lugar particular (por ejemplo una tarea específica, con unos niños y curso determinado).

Los casos pretenden reflejar un aspecto concreto de la realidad. De esta manera se consideran como "fotografías" de un momento de una situación de enseñanza-aprendizaje específica. En este dirección los casos proporcionan "informes" de profesores de cómo una determinada decisión instruccional ha funcionado, o cómo identificar un problema de aprendizaje. Estas narraciones pueden estar escritas en primera persona ("voz" del profesor) o tomando la forma de informes elaborados por un observador.

Los casos son entendidos como problemas que ayudan a articular un proceso de indagación y búsqueda colectivo por los estudiantes para profesor. En este sentido los casos deberían ser vistos como "oportunidades" para que los estudiantes para profesor indaguen en diversas posibilidades relacionando

- teoría y práctica,
- situación específica y concepciones previas, etc.

Para Shulman (1992) los casos en enseñanza comparten ciertas características. Las narrativas que constituyen los casos

- tienen un argumento (por ejemplo, describen una tensión en una situación),
- son particulares y específicas,
- colocan los sucesos en una referencia espacio-temporal concreta,
- describen un aspecto de una acción, y
- eventualmente pueden reflejar características culturales y sociales de los contextos que describen.

Su presentación (formato) puede ser en forma de

- narración escrita más o menos larga, y/o
- grabación en video.

Algunas veces los casos vienen presentados (cuando tienen formato de video) o redactados (cuando están en forma textual) por la "voz del profesor" como decíamos anteriormente. Es decir, los casos intentan presentar la situación-problema desde la perspectiva del profesor y por eso suelen redactarse en primera persona. A veces vienen con una serie de preguntas que ayudan a centrar la línea de discusión inicial, sin menoscabo de la dirección que pueda tomar la discusión asociada en un momento determinado. Las cuestiones, que acompañan al caso, tienen una caracterización diferente. Pueden ser preguntas integradas en la narración del caso, con lo que adoptan la forma de las cuestiones que se plantea el

profesor (la "voz" del caso), o por otra parte, cuestiones que forman un guión para el formador de profesores para la sesión de discusión y análisis. Tanto las cuestiones sean de una forma u de otra sus naturaleza puede ser doble:

- cuestiones vinculadas al caso particular que se presenta, o
- cuestiones de índole más general sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, los objetivos de la educación matemática, etc.

Otras veces, los casos vienen acompañados, de una manera complementaria, con la propuesta de realización de tareas prácticas que de alguna manera pretenden reflejar las perspectivas de acción generadas como consecuencia del análisis y discusión centrada en el caso. En este sentido, el formato que adopte el caso y la manera de presentarlo puede condicionar el tipo de actividad que generen.

El contenido de los casos Los casos suelen centrarse en problemas específicos relativos a

- el proceso de aprendizaje de alguna noción matemática por parte de los niños,
- características de la fase preactiva de la enseñanza (planificación),
- aspectos de la interacción en el aula (fase interactiva), o
- proceso de reflexión y análisis del profesor en relación a lo realizado y conseguido.

En este sentido los casos no deberían concebirse linealmente como la ejemplificación de principios teóricos, sino como el ámbito en el cual los estudiantes para profesor pueden tener oportunidades para generar, modificar, cambiar, etc. sus argumentos prácticos, los cuales sí pueden estar informados por principios teóricos. Así, los casos deberían concebirse como ejemplificaciones de experiencias de "terceros" (de ahí que generalmente se redacten en primera persona para enfatizar la dimensión de experiencia personal del que lo cuenta).

De una forma particular, el foco de los casos puede ser

- las dificultades que tiene un niño en realizar una tarea matemática específica,
- las características de la interacción entre un grupo de niños al intentar resolver un problema matemático (interacción social como contexto de generación del conocimiento matemático),
- los **dilemas** a los que se enfrenta un profesor al pensar

* en la planificación de una unidad didáctica específica para el curso que tiene ese año,

* en resultados no previstos al que se le puede aplicar explicaciones competativas, etc;

- la descripción de acciones de enseñanza del profesor, junto con la valoración del propio profesor de los resultados obtenidos (presentándose interconectados aspectos cognitivos y afectivos de la experiencia diaria).

El que cada caso muestre una situación específica permite que sea considerado como un punto de apoyo para generar

- un proceso de análisis y
- discusión entre los estudiantes para profesor.

Según Richert (1991), la naturaleza descriptiva del caso presenta el trabajo del profesor con toda complejidad incorporando de manera integrada las acciones, justificaciones y sentimientos. En este sentido, los casos describen aspectos del trabajo del docente y de la actividad durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, que en la observación de la práctica real pueden pasar desapercibidas por los estudiantes para profesor. De esta manera los casos pueden ayudar a mostrar a los estudiantes para profesor aspectos cognitivos, actitudinales y prácticos de las acciones del profesor. En este contexto los casos deberían reflejar las posibles tensiones (dilemas) a los que se enfrenta el profesor en situaciones de clase y que en alguna medida pueden reflejar las contradicciones/coherencias, etc. de la cultura matemática escolar.

Por otra parte, el contenido de los casos **debe llegar a ser considerado** por los estudiantes para profesor como problema específico de enseñanza - aprendizaje. Es decir, en la medida de lo posible, debería "encajar" dentro de las referencias personales de los estudiantes para profesor como una situación concreta de enseñanza. La posible "identificación" del estudiante para profesor con el problema planteado en el caso permite una mayor motivación para el análisis, discusión y búsqueda de posibles alternativas. En este sentido, el contenido del caso debería "desafiar", en alguna medida, las concepciones de los estudiantes para profesor. Como mencionábamos con anterioridad, el caso debe favorecer el que los estudiantes para profesor puedan llegar a cuestionarse lo que inicialmente podía considerarse "verdad absoluta". Esta utilización de los casos ayudaría a que los estudiantes para profesor lleguen a cuestionarse sobre la forma en que la cultura matemática escolar funciona. Es decir, lleguen a adoptar una "posición crítica".

- ¿Quién construye los casos?

Los casos pueden ser contruidos por

- profesores en ejercicio,
- el propio formador de profesores,

- los propios estudiantes para profesor, o
- extraídos de la literatura.

Los casos contruidos por profesores en ejercicio permiten reflejar aspectos del conocimiento práctico personal del profesor que puede en alguna medida ser difícil de encontrar en la literatura. Estos casos permiten describir experiencias en contextos estrechamente vinculados a la práctica. La generación de los casos puede estar vinculado al trabajo en seminarios permanentes o grupos de trabajo de profesores en ejercicio en el proceso de análisis de su propia práctica y los resultados que produce, adicionalmente con el apoyo de formadores de profesores. Con posterioridad, los casos y cuestiones vinculadas, generadas en este contexto, pueden ser utilizadas en formación inicial.

Esto es una forma operativa de vincular la formación inicial con la formación permanente y los procesos de desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, así como una forma de integrar en la formación inicial algunos aspectos del conocimiento práctico personal (y características del razonamiento pedagógico) acumulado a través de muchos años de experiencia y reflexión por profesores de Matemáticas. En este contexto una fuente de casos pueden ser extractos de documentos producidos en los seminarios de profesores o extractos de un "diario de enseñanza" de profesores en ejercicio cuando el diario se utiliza como instrumento de análisis y reflexión sobre la propia práctica.

De esta manera, los casos se generan vinculados a procesos de reflexión y análisis en formación permanente y, al mismo tiempo, su uso en formación inicial pretende empezar a generar los mismos procesos de análisis y reflexión en los estudiantes para profesor. En este contexto se articulan cauces por los que aspectos del conocimiento práctico de profesores de matemáticas en ejercicio se transforman en referencias para la formación inicial de los estudiantes para profesor de matemáticas. El propio contexto en el que se generan estos casos puede identificar las referencias de "calidad" del contenido del caso. En este sentido, para L. Shulman (1986) el contenido de los casos es un tipo de conocimiento de la práctica de la misma importancia para los futuros profesores como el conocimiento científico derivado de la investigación. Para este autor, son dos formas diferentes de conocimiento que deberían fundamentar el conocimiento base para la enseñanza.

Por otra parte, el formador de profesor también puede construir una colección de casos a utilizar en un programa de formación determinado. Los casos contruidos de esta forma permiten especificar aspectos de las situaciones de enseñanza que reflejen de una forma particular características de un grupo de estudiantes para profesor en un momento determinado.

Cuando los estudiantes para profesor escriben su propio caso, los datos

proceden de observaciones del contexto aula, de entrevistas con los protagonistas y a través de sus propias experiencias esporádicas en un contexto práctico (Sánchez y Llinares, 1990). En estas situaciones los EPs deben determinar el aspecto-problema de la situación real sobre el que escribir. Según Richert (1991) el que los estudiantes para profesor preparen casos les ayuda a desarrollar destrezas relacionadas con la práctica reflexiva ya que les obliga a elegir sobre qué escribir, y qué tipo de información necesitan. De esta manera, las propias percepciones sobre la situación de los EPs dan forma a problemas a ser posteriormente tratados y se convierten en "puntos de arranque" para el trabajo colectivo.

Finalmente, la investigación en Educación Matemática y Formación de Profesores ha empezado a proporcionar ejemplos de casos que pueden ser incorporados y utilizados, en alguna medida, en los programas de formación.

- El uso de los casos.

Los casos suelen ser presentados para el análisis colectivo realizado por grupos de estudiantes para profesor. Esto implica necesariamente el establecer un buen "clima" para generar una discusión en el aula. Las cuestiones iniciales planteadas permiten "activar" el conocimiento previo de los componentes del grupo con el fin de que reconozcan la situación como un problema. Algunas veces, surge la discusión sobre la posible idoneidad de las cuestiones planteadas; es decir, el problema/dilema descrito en el caso en sí mismo no es identificado como tal. Estas situaciones permiten el análisis y la discusión sobre las creencias epistemológicas mantenidas por los estudiantes para profesor. El uso de los casos de esta manera permite que se puedan expresar las creencias epistemológicas vinculadas a situaciones particulares. Se muestra así cómo, algunas veces, los mismos hechos pueden tener significación distinta para distintos EPs.

La forma narrativa (en texto y/o video) del caso permite que el análisis teórico surja vinculado a la descripción particular. La discusión y deliberación a la que lleva el análisis del caso permite desarrollar una relación mutua entre la situación real y los principios teóricos en contextos reflexivos.

Por otra parte, si se reconoce la situación como un problema el proceso de análisis, la formulación de preguntas pertinentes adicionales, la búsqueda de soluciones alternativas, etc; permite a los estudiantes para profesor generar conocimiento vinculado a la situación específica. El reconocimiento de falta de conocimiento idóneo para la situación lleva a buscar en fuentes alternativas de información (documentos, lecturas, etc.).

El método de casos debería permitir de esta manera

- ayudar a integrar diferentes dominios de conocimiento, y
 - desarrollar habilidades de reflexión (destrezas metacognitivas),
- como una práctica de índole distinta a los contextos de enseñanza reales.

En el ejemplo particular de que el caso muestre un aspecto conflictivo de la experiencia de un profesor permite que el estudiante para profesor pueda aprender cosas relativas a la enseñanza apoyado en la experiencia de otro. De esta manera, y considerando que en los contextos reales existen muchas variables a tener en cuenta que inicialmente pueden llegar a bloquear al estudiante para profesor o hacer que sólo centre su atención en características superficiales de la actividad, el empleo de los casos permite articular la oportunidad para que se pueda tener tiempo de analizar y compartir aspectos de interés en situaciones conflictivas.

Pero, sin embargo y según indica McNamara (1990), si pensamos que el conocimiento y la acción están entrelazados y contextualizados, habría que tener cuidado en pensar sobre la enseñanza como una actividad independiente de la propia acción. El pensar/discutir puede llegar a ser fácil sobre ejemplos "congelados" pero resulta más difícil llevar a la práctica las soluciones pretendidas (perspectivas de acción). Esta objeción lleva a apoyar la necesidad de realización de prácticas clínicas de enseñanza con grupos reducidos de niños como una metodología complementaria. Por otra parte, esta matización sobre el uso de los casos solo tiene sentido en formación inicial, pero posiblemente pierda parte de su sentido en formación permanente cuando son los propios profesores en ejercicio quien construyen sus propios casos.

De todas maneras, los casos permiten ampliar el rango de significado que los estudiantes para profesor pueden dar en un momento determinado a las situaciones de enseñanza. El análisis, reflexión y discusión que se genera con el caso puede conducir al estudiante para profesor a cuestionarse no sólo sobre lo que el caso le muestra y porqué, sino también, sobre lo que podría ser. Es decir, como decíamos en el apartado anterior sobre los propósitos de la utilización de los casos, que el estudiante para profesor llegue a cuestionarse lo que inicialmente podría llegar a ser asumido sin preguntar.

La forma de utilizar los casos se apoya en la interacción social generada en los grupos de EPs. La deliberación en grupo por parte de los EPs les permite generar nuevas ideas y refinar los significados asociados a los principios teóricos. El trabajo cooperativo con los casos permite que los EPs valoren lo que saben, y la forma en que lo saben, además de poder incorporar nuevo conocimiento conceptual vinculado al análisis de situaciones concretas. La forma que adoptan las cuestiones que acompañan al caso, junto con el foco de dichas cuestiones, se convierten en aspectos importantes de la forma en que el estudio de casos permitirá articular y desarrollarse el "contenido" del proceso de aprender a enseñar Matemáticas. Por otra parte, el propio proceso de análisis del caso genera nuevas cuestiones para los estudiantes para profesor que ponen de manifiesto el proceso de integración de diferentes aspectos (dominios de conocimiento, concepciones previas, destrezas cognitivas, etc.).

El razonamiento pedagógico de los EPs vinculado a los casos pretende ser en cierta medida parecido al de los profesores ante situaciones reales. En este sentido este proceso de razonamiento se apoya en la consideración de alternativas competitivas que deben ser

- expuestas,
- defendidas,
- refinadas, o
- rechazadas

que dan forma a la interacción social. El contenido de esta interacción debe empezar a ser el conocimiento generado en el que se debe empezar a integrar principios teóricos. Inicialmente el nivel del contenido de interacción puede mantenerse vinculado al conocimiento previo de los EPs así como a sus propias experiencias particulares, pero con posterioridad el "tono del contenido" suele empezar a incorporar información procedente de los documentos teóricos manejados como apoyo al caso. En este sentido suele existir una traslación en el foco de la discusión desde

- un inicio vinculado a las características particulares del caso presentado, hacia
- una discusión sobre principios generales que son particularizados, en los momentos oportunos a través del propio caso.

En este sentido el método de casos permite generar un cauce a través del cual el análisis de las situaciones prácticas puede llevar a conocimiento teórico y viceversa. El contexto interactivo del análisis del caso permite poder identificar posiciones alternativas que en la mayoría de las veces están "escondidas" detrás de una supuesta compatibilidad de significados atribuidos a hechos o principios. De esta manera el empleo de los casos en los programas de formación de profesores, como se ha descrito en esta sección, permite colocar los cauces para que los estudiantes para profesor generen

- procesos de reflexión individual conectando sus experiencias y concepciones previas, las características del caso,
- la información proporcionada por los documentos adicionales que acompañan al caso, y delimitando futuras perspectivas de acción, y
- las condiciones para fomentar el diálogo y la interacción entre los propios estudiantes para profesor.

Como consecuencia del proceso interpretativo al que los estudiantes para profesor someten la situación descrita en el caso el efecto puede ser distinto para cada estudiante para profesor, aunque el caso, desde la perspectiva inicial del formador de profesores pudiera tener un objetivo preconcebido. Así, aunque un grupo de estudiantes para profesor trabaje con un mismo caso, las perspectivas de acción derivadas, o los principios generales que se adscriben a la situación pueden ser diferentes.

De manera eventual, y concretamente cuando el caso analizado ha sido construido por algún profesor en ejercicio, éste puede aportar su propia perspectiva sobre el contenido del caso como una aportación complementaria al análisis realizado por los estudiantes para profesor y el formador de profesores. Estas situaciones vinculan actuaciones en formación inicial con procesos de desarrollo profesional de profesores en ejercicio. De esta manera, las vinculaciones de los profesores en ejercicio a programas de formación inicial no se reduce únicamente a la construcción de los casos, sino también en su colaboración proporcionando visiones alternativas en el proceso de análisis.

Algunos ejemplos.

En este apartado pretendemos presentar algunos

- ejemplos de casos,
- su formato (la narración del caso y el guión de las cuestiones que articulan la discusión), y
- cómo son utilizados en parte del programa de Formación de Profesores de Primaria de la Universidad de Sevilla en lo relativo a la formación en Educación Matemática.

Los dos primeros ejemplos propuestos son casos que han sido construidos específicamente para discutirlos en una asignatura centrada en la Didáctica de la Aritmética que se desarrolla en segundo curso de la Diplomatura de Maestro en el programa de formación de profesores de Primaria en la Universidad de Sevilla. El formato adoptado en este caso es mixto, presentación a través de un texto más un video.

EJEMPLO 1.

Si multiplico 5 cosas por 3 cosas ¿Porqué no me sale una de las cosas que tenía?.

¿Por qué a veces la multiplicación no es repetir una cantidad de cosas n veces?

"He estado mucho tiempo enseñando en segundo y tercer curso de enseñanza Primaria y siempre he tenido dificultades en ayudar a mis alumnos a que relacionaran sus procedimientos informales de resolución de problemas aritméticos elementales de estructura multiplicativa con la aritmética formal (las cuentas).

Yo había introducido la idea de multiplicación como suma de sumandos iguales. Uno de los ejemplos que había utilizado era "si tengo tres bolsas y en cada bolsa hay cinco caramelos. ¿cuántos caramelos tengo en total?". Mis alumnos eran bastante efectivos resolviendo "problemas de multiplicar con esta misma estructura". Yo pensaba que ellos "sabían resolver problemas de multiplicación". Además, habíamos estado haciendo muchas cuentas de

multiplicar con dos números de un dígito y la mayoría de la clase no tenían excesivas dificultades. Sin embargo, este año estando en cuarto, a principio de curso puse en la pizarra el siguiente problema

"Tengo 3 camisas y 4 pantalones. ¿De cuántas maneras diferentes puedo vestirme?"

Mientras el resto de la clase lo estaba resolviendo me acerqué a Santiago, me senté junto a él, y le pregunté cómo estaba haciendo el problema

M: ... una camisa con ...

E: Puedes dibujarlo si tú quieres.

M: Cuatro (contestando al mismo tiempo que se le indicaba que podía hacer dibujos).

E: Puedes hacer un dibujo.

M: (realiza el siguiente dibujo)

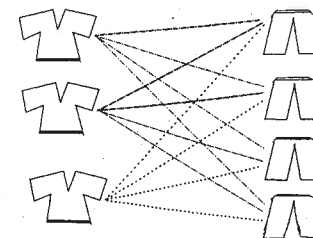


... cuatro.

E: (...pidiéndole que se lo explique)

M: Tienes esa camisa (señalando la camisa dibujada), y si tienes 4 pantalones, ese pantalón te puedes poner con otra camisa ...

Dejé a Santiago pensando su problema. Por la tarde, estaba en una clase de quinto y le propuse a José Manuel el mismo problema que había puesto en mi clase por la mañana. Le pregunté cómo resolvía el problema y me contestó dibujando lo siguiente



luego contó las líneas que unían las camisas y los pantalones y respondió 12.

- ¿Por qué parecía que Santiago tenían dificultades en resolver el problema?

- ¿Por qué, si había estado haciendo cuentas con números más grandes de manera correcta, tenían dificultades en resolver esta situación?

- ¿José Manuel veía este problema como un problema de multiplicar?

- ¿Debería haberle puesto a José Manuel un problema con la misma estructura pero con números mayores?

- ¿Cómo puedo ayudar a mis alumnos a que amplíen su idea de la multiplicación?

- ¿Debería haber explicado a los niños como se resuelven este tipo de problemas antes de proponérselo?

- ¿Sería bueno colocar a los niños en grupos para que resolvieran problemas parecidos?

- ¿Qué clase de actividades adicionales debería proponer para que superaran sus dificultades iniciales?

- ¿Cómo puedo ayudar a mis alumnos a que lleguen a comprender que la operación aritmética 5×3 puede estar vinculada a diversas situaciones y diversos procesos de solución?

Este caso se centra en una de las cuestiones clave en el proceso de enseñar a aprender matemáticas. La relación entre el aprendizaje de las "cuentas" y el proceso de resolución de problemas como eje central de la enseñanza de la aritmética en la enseñanza Primaria. La experiencia de los estudiantes para profesor como aprendices de matemáticas en la escuela normalmente esta caracterizada por el énfasis sobre las cuentas (procedimientos, algoritmos, etc.) y con un significado dado a la resolución de problemas en el sentido de aplicación de las cuentas previamente aprendidas. Superar estas concepciones previas sobre la enseñanza-aprendizaje de la Aritmética de los estudiantes para profesor, junto con una ampliación de la comprensión de las estructuras de los problemas aritméticos elementales, de los procesos de resolución y, subrayar el papel de la resolución de los problemas aritméticos en la enseñanza primaria, son objetivos de este tipo de casos.

Cuestiones previas que fundamentan este caso son por ejemplo:

- diferentes estrategias para resolver un PAE determinado, y

- formas instruccionales de conectar las estrategias informales a la aritmética formal,

- ¿cuál es el papel de los dibujos y los gráficos en el proceso de resolución de PAEs?

- ¿cuál es el papel de la resolución de problemas en la enseñanza de la Aritmética?

- ¿Qué significa resolver problemas en la enseñanza primaria?

La inmersión de los estudiantes para profesor en las cuestiones planteadas

en el caso constituye una forma de acceso al pensamiento del profesor en situaciones de enseñanza específicas.

Cada caso (video o en texto) forma parte de una unidad didáctica en la que hay documentos de trabajo que presentan ideas relacionadas con el contenido del caso. Además estos documentos, artículos, etc; proporcionan la posibilidad de compatibilizar los significados del lenguaje utilizado.

Los estudiantes para profesor discuten sobre el caso apoyados en

- la información propia presentada en el caso,

- los documentos utilizados, y

- su propia experiencia como aprendices de matemáticas

generándose una interrelación entre el "caso concreto" y las reflexiones realizadas a un nivel más general.

Los documentos escritos utilizados sobre diferentes características de los PAE de estructura multiplicativa y sobre diferentes procesos de resolución y sobre las características de diferentes fases de la enseñanza dirigida a la resolución de problemas, proporcionan fuentes adicionales al caso. Después de discutir sobre la situación presentada en el caso, sobre las primeras cuestiones planteadas y leer los documentos se puede pedir a los estudiantes para profesor que redacten sus reacciones en un informe en el que describen y explicitan sus ideas sobre las diferentes cuestiones planteadas. De una forma particular aparecen concepciones sobre

- cómo se produce el aprendizaje escolar,

- qué es lo que se aprende,

- cuál es el papel de la enseñanza de la Aritmética en la escuela, etc.

En este sentido, los casos (segmentos de video o en forma de texto) toman la forma de "imágenes descriptivas" que determinan en parte el contenido de la discusión. Una vez delimitado este contexto de actuación, se discuten estrategias alternativas de enseñanza, sus consecuencias, en qué se apoyan, qué se pretende con ellas, etc.

De esta manera se establece una interacción entre

- las concepciones previas sobre el aprendizaje, y

- los argumentos teóricos de los documentos (lecturas de trabajo vinculadas a la unidad didáctica en la que está incluido el caso).

Para fomentar esta interrelación se pide a los estudiantes para profesor una serie de tareas prácticas adicionales realizadas en grupo y luego defendidas en la clase, como por ejemplo

- Utilizando diferentes tipos de problemas aritméticos elementales de

estructura multiplicativa ENTREVISTAR a algunos niños de segundo y tercero. Describir las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas. Las entrevistas deben ser grabadas en audio y posteriormente transcritas y analizadas.

- Diseñar una secuencia de enseñanza cuyo objetivo general sea la resolución de problemas aritméticos elementales de estructura multiplicativa. Intentad centrarse en

- * tipos de problemas y tamaño de los números utilizados;
- * dinámica del aula: papel del profesor. Trabajo en gran grupo, pequeño grupo, individual;
- * características de las diferentes etapas de la clase;
- * Modos y formas de valoración del aprendizaje;

Este tipo de tareas vinculadas a los casos pretenden "desafiar" la tendencia de los estudiantes para profesor a pensar sobre el aprendizaje de la Aritmética vinculado a la memorización y aplicación de algoritmos de cálculo. En la realización de estas tareas se intenta que los estudiantes para profesor generen discusiones sobre las estrategias de resolución de problemas por parte de los niños, empiecen a pensar en el diseño de un plan de trabajo cuyo foco esté apoyado en otra concepción del aprendizaje.

El uso de los casos de esta forma se apoya en la idea de que la naturaleza del razonamiento pedagógico de los profesores esta vinculado al pensamiento específico de la materia a enseñar. En los ejemplos de este tipo los estudiantes para profesor generan, contrastan y reajustan sus ideas sobre

- la naturaleza de los procesos de resolución de PAE como fundamento de la enseñanza de la Aritmética.

En este ejemplo en particular los casos utilizados se apoyan en videos producidos y realizados directamente para la formación de Profesores (aunque estos videos tienen otras posibles utilidades). Aquí los videos venían complementados con otros materiales como eran

- los documentos de lectura y
- la realización de tareas prácticas (entrevistas y diseño de unidades de enseñanza).

En este contexto los casos pretenden ayudar a los EPs a generar "modelos conceptuales" que les permitan comprender y actuar en situaciones de enseñanza específicas practicando en la toma de decisiones instruccionales fundamentadas que forman parte del proceso de razonamiento pedagógico. Además, los casos, según son utilizados por nosotros en la Universidad de Sevilla pretenden potenciar la interacción entre

- las creencias/ideas previas de los EPs sobre la enseñanza y el aprendizaje las matemáticas y
- la información teórica que se les puede proporcionar en el curso de formación.

* EJEMPLO 2.

El siguiente caso intenta centrar la atención sobre algunas características del proceso de dotar de significado a la idea de fracción. En particular se centra en

- la idea de unidad,
- la idea de partes congruentes, y
- el papel desempeñado por los sistemas de representación instruccionales en dotar de significado a la unidad.

"Cuando he enseñado las fracciones nunca he tenido muchas dificultades. Mis alumnos normalmente han entendido rápidamente la idea de fracción. Con las operaciones ocasionalmente he tenido más dificultades, pero proponiéndoles mucha práctica he conseguido que una mayoría de ellos superaran bien los exámenes. Este año estoy dando quinto y como el año pasado ya vimos alguna cosa de fracciones pensé que podríamos empezar el tema de fracciones recordando alguna cosa del año pasado. Para ello coloque la siguiente tarea en la pizarra

¿Qué es los $\frac{5}{4}$ de



?

Me di cuenta que había algún grupo de alumnos que no entendían bien la tarea.

Mientras estaban realizando este ejercicio, me acerqué a Javier y le repetí la tarea y le pedí que me explicara como lo estaba haciendo. El empezó a dividir en partes un rectángulo que tenía pintado en un folio. Dibujo lo siguiente



Luego sombreó cada una de las partes para indicar que tenía cinco cuartos.

- ¿Era posible que se le hubiera "olvidado" lo que sabía de fracciones del año pasado?
- ¿Existe alguna "influencia" en representar la unidad como un rectángulo o como un círculo?

Para intentar obtener más información sobre el significado de fracción que se podía tener en ese momento le propuse a Carlos la siguiente tarea en la que se utilizan fichas como modo de representación. En estos momentos

sabía que no se habían utilizado este modo de representación en la introducción de la idea de fracción, pero intentaba ver lo que sucedía.

¿Cuántas fichas son los $\frac{2}{3}$ de 6 fichas?

En el proceso de resolución, Carlos dibujó un círculo y lo dividió en tres partes distintas y colocó dos fichas sobre el círculo, dando como respuesta 2 fichas.

- ¿Son las fichas una representación para las fracciones más difícil que el dibujo de figuras geométricas?

- ¿qué papel desempeñan el tipo de tareas que se proponen en la idea de fracción que tienen los niños?

- ¿las fracciones son algo más que "hacer partes y coger algunas"?

- ¿Es necesario saber hacer estos ejercicios para hacer correctamente las cuentas con fracciones?

- ¿Vale la pena dedicar tiempo a este tipo de tareas y no directamente enseñarles las operaciones con las fracciones?

El uso de este caso mantiene la misma secuencia descrita anteriormente.

- Discusión colectiva, generación de preguntas, compatibilizar significados, etc.

- lectura de documentos,

- realización de tareas adicionales (entrevistas, diseño de segmentos de enseñanza -unidades didáctica, análisis de libros de texto, etc.)

En particular, y en relación a las cuestiones que aparecen en las sesiones de discusión y análisis del caso, suelen ser relativas a dos niveles. Por una parte cuestiones vinculadas al caso concreto, como por ejemplo

* la idoneidad de este tipo de tareas para "entender" el concepto de fracción,

* ¿qué significa entender las fracciones?

* ¿cuál es el papel que desempeña la forma de representar el "todo"?, y ¿la estructura de la tarea?

Por otra parte, cuestiones vinculadas a perspectivas más generales sobre la enseñanza aprendizaje, como por ejemplo

* ¿Es "bueno" empezar con una tarea que los alumnos no han visto cuando se pretende "recordar" lo que saben de fracciones?

* ¿Sería "bueno" que estos alumnos presentaran sus soluciones a la clase entera para discutir las?. "Bueno" en un doble sentido, tanto cognitivo como afectivo ¿se sentirían incómodos los estudiantes si se dan cuenta que sus soluciones no son correctas?

* ¿Tiene sentido la enseñanza de las fracciones en la escuela?

* EJEMPLO 3. (Procede de **The Cases Methods for Inservice Education in Mathematics Project**, Far West Laboratory for Educational Research and Development, San Francisco, CA. (Barnett, 1991)

Aquí no tenemos la mitad. He estado utilizando cubitos encajables con mis alumnos de quinto para mostrarles la noción de multiplicar fracciones como $\frac{2}{3} \times 6$.

Primero pedí a mis alumnos que cogieran seis cubitos y los colocaran sobre la mesa. A continuación les pedí que dividieran su grupo de cubitos en tercios. Por último les pedí que cogieran dos tercios de los cubitos y me dijeran la cantidad de cubitos que tenían en sus manos.

Después de mucha práctica resultaba fácil para mis estudiantes modelar los siguientes tipos de problemas

$$\frac{3}{8} \times 32$$

$$\frac{4}{5} \text{ de } 40$$

Varios días después decidí utilizar los cubitos de nuevo para mostrar problemas como $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$. Pedía mis estudiantes que cogieran ocho cubitos y los colocaran sobre la mesa. Luego les pedí que retiraran la mitad de los cubitos, lo que ellos hicieron rápidamente. A continuación les pedí que me mostraran tres cuartos de la mitad que ellos tenían en sus manos. Inmediatamente me di cuenta que había una gran confusión en toda la clase.

"Ms. T. ¿qué quiere usted decir, tres cuartos de la mitad que tenemos en la mano?". Preguntó una niña. "Nosotros tenemos cuatro cubitos, no una mitad".

Esta lección parecía que era tan igual a las otras lecciones que me sorprendí al encontrar este tipo de confusión, especialmente con estudiantes de buen nivel.

¿Cuál fue el origen de la confusión?

¿No fueron claras mis indicaciones?

¿Debería haber seleccionado otro material manipulable para esta lección?

La narración de este profesor de quinto se puede utilizar, según Barnett (1991), como un punto de arranque para las discusiones colectivas. La reflexión, análisis y comunicación se articula a través de las siguientes cuestiones

- ¿el profesor debería haber utilizado un modelo continuo o discreto para las fracciones?

- ¿qué otras representaciones distintas de las concretas podría haber utilizado?

- ¿Los estudiantes podrían haberse confundido por el lenguaje utilizado por el profesor?

- ¿es correcto, desde el punto de vista del desarrollo, enseñar la multiplicación de fracciones en quinto?

5. APRENDER A ENSEÑAR MATEMÁTICAS Y EL USO DE CASOS

La metodología apoyada en los casos viene caracterizada por su conexión a la experiencia personal, con referencia al conocimiento teórico, y fundamentando las perspectivas de acción. En este sentido la actividad generada a través del análisis, reflexión y discusión de casos puede favorecer la posibilidad que los estudiantes para profesor empiecen a desarrollar un modelo conceptual (sistema de referencia cognitivo) que le proporcione con

- un organizador avanzado en sus primeros intentos de desempeñar tareas/destrezas complejas,
- una estructura interpretativa a través de la cuál dotará de significado a las interrelaciones producidas en la fase de reflexión-análisis, y
- un esquema interiorizado para ser utilizado como referencia en su práctica independiente.

En este sentido es innegable el papel de referencia desempeñado por el conocimiento previo en cualquier proceso de aprendizaje, y evidentemente también en el proceso de aprender a enseñar Matemáticas. Desde otra perspectiva y, de manera adicional, hay autores que defienden la idea de que los casos deberían reflejar en alguna medida cuestiones relativas a valores en educación (un aspecto relativamente importante de la estructura de creencias de los individuos).

Por otra parte Shulman y sus colaboradores consideran que si el proceso de enseñanza se fundamenta en el razonamiento pedagógico que desarrolla el profesor (Wilson, Shulman y Richert, 1987) consistente en adaptar/representar las ideas para hacerlas entendibles a sus alumnos, la utilización de los casos en los programas de formación puede aproximar a los estudiantes para profesor a este proceso.

Para Shulman (1992) existen tres perspectivas teóricas que apoyan el empleo de los casos para aprender a enseñar:

- la perspectiva epistemológica, ya que los casos son coherentes con alguna forma de conocimiento práctico,
- la perspectiva profesional, por la credibilidad y relevancia del conocimiento de casos en una comunidad profesional, y
- la perspectiva psicológica, desde las perspectivas con las que se empieza a conceptualizar el proceso de aprender como un "aprehendizaje cognitivo".

Como decíamos al principio de este trabajo, las investigaciones sobre la forma que adopta el conocimiento del profesor y la estructura que lo organiza ha puesto de manifiesto la importancia de las narrativas en la

forma de conocer el profesor, junto al conocimiento de principios teóricos generales.

Por otra parte, desde hace algún tiempo se está empezando a generar reflexiones sobre el carácter profesional del trabajo del profesor de Matemáticas (Romberg, 1988) que invariablemente conducen, entre otras cosas, a los intentos de caracterizar el conocimiento del profesor, y al análisis de la existencia de un conocimiento práctico compartido entre los miembros de esa profesión. Esta línea de reflexión señala el valor que puede tener determinado conocimiento práctico del profesor en ejercicio para caracterizar el trabajo de enseñar Matemáticas como una profesión. Este conocimiento práctico puede adoptar la forma de narrativa/casos.

Por último, las nuevas perspectivas psicológicas con las que se intenta comprender los procesos de aprendizaje en general y en particular los procesos de aprender a enseñar Matemáticas, colocan un gran énfasis en la naturaleza contextualizada de dichos procesos (Llinares, 1992). En estas condiciones, el trabajo de análisis y reflexión generado con los casos puede ser un buen medio para producir la flexibilidad cognitiva vinculada al aprendizaje dirigido a enseñar Matemáticas en los contextos mal estructurados que son las situaciones de enseñanza.

6. ALGUNOS COMENTARIOS FINALES

Teniendo en cuenta como están en estos momentos los programas de formación de profesores de Matemáticas, hay que señalar algunas limitaciones que el empleo de los casos conlleva, así como subrayar las nuevas perspectivas de investigación generadas tras el intento de ir adecuando las reflexiones conceptuales y aproximaciones metodológicas derivadas en los contextos particulares (Grant, 1992; Grossman, 1992).

Por una parte es evidente que la metodología basada en el estudio y análisis de casos debe ser complementaria a otras iniciativas reconociéndose además el hecho de que consuma mucho tiempo como cualquier metodología que se apoya fundamentalmente en la discusión colectiva. Además, cambiar el papel del estudiantes para profesor en las situaciones de enseñanza de ser un mero receptor a participe y responsable de su propio aprendizaje es una de las cuestiones más complicadas que se presentan. Pero el que los estudiantes para profesor construyan significados compartidos, con el formador de profesores como un "facilitador", es coherente con las nuevas concepciones sobre la enseñanza que se pretende que luego el futuro profesor genere en sus aulas. Los entornos de clase en formación de profesores, creados de esta forma, mantienen los cánones de los entornos de aprendizaje constructivistas que pretenden definir la enseñanza de las Matemáticas en la escuela.

Otra cuestión que se genera con el uso de los casos en formación de profesores es determinar la naturaleza de lo aprendido; es decir, se están empezando a identificar cuestiones relativas a lo que significa aprender desde los casos (¿cómo los estudiantes para profesor construyen el conocimiento desde el uso de los casos?).

Estas cuestiones anteriores inducen pensar que el uso de la metodología de casos no es un asunto simple ni fácil. El carácter abierto de la "tarea" representada por el estudio de casos conlleva una ambigüedad y "riesgo" sobre lo que se aprende realmente. Una cuestión importante que se genera en estos momentos es el papel desempeñado por esta metodología en

- la integración de diferentes dominios de conocimiento base para la enseñanza, y

- en el desarrollo de destrezas metacognitivas que eran algunos de los objetivos de su empleo.

En particular, uno de los elementos que desempeñan un papel importante en el proceso de análisis del caso es el conocimiento de contenido pedagógico que los estudiantes para profesor poseen del concepto en particular, junto con las características de su comprensión del contenido matemático escolar. Considerar esta variable es tarea ineludible en particular para el formador de profesores de primaria (García y Escudero, 1993).

Por último, cabría señalar que algunas de estas cuestiones y limitaciones plantean preguntas de investigación que están generando diversos proyectos dirigidos a obtener información que permita una mejor comprensión del proceso de aprender a enseñar Matemáticas. Sin embargo habría que subrayar que no se puede hablar de Reforma de la enseñanza de las Matemáticas sin plantearse al mismo tiempo la Reforma de la Formación de Profesores. Las ideas y acciones reflejadas en este trabajo están dirigidas a este último punto. La Reforma de la Formación de profesores de Matemáticas no es solo un problema a nivel académico/científico, sino también responsabilidad de la Administración Educativa. Compatibilizar las reflexiones conceptuales en formación de profesores de Matemáticas con la condiciones contextuales no es un asunto sencillo pero en estos momentos el campo de la Educación Matemática en nuestro país puede aportar referencias adecuadas a la Administración educativa.

REFERENCIAS

Barnett, C. (1991): "Building a Case-Based Curriculum to Enhance the Pedagogical Content Knowledge of Mathematics Teachers". *Journal of Teacher Education*, 42(4), 263-272.

Calderhead, J. (1988): "The Development of Knowledge Structures in Learning to Teach". En J. Calderhead (Ed.) *Teachers' Professional Learning*.

The Falmer Press: London.

Cockcroft, (1985): *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. MEC: Madrid.

García, M. y Escudero, I. (1993): *Estudiantes para profesor, Matemáticas y aprendizaje. El núcleo de un problema*. Comunicación presentada en las VI JAEM. Badajoz, Abril.

Grant, G. (1992): "Using Cases to Develop Teacher Knowledge: A Cautionary Tale". En J. Shulman (Ed.) *Case Methods of Teacher Education*. Teachers College Press: New York.

Grossman, P. (1992): "Teaching and Learning with Cases: Unanswered Questions". En J. Shulman (Ed.) *Case Methods of Teacher Education*. Teachers College Press: New York.

Harrington, H. y Garrison, J. (1992): "Cases as Shared Inquiry: A Dialogical Model of Teacher Education". *American Educational Research Journal*, 29(4), 715-735.

Llinares, S. (1991): *La Formación de Profesores de Matemáticas*. GID: Sevilla.

Llinares, S. (1992): *Aprender a enseñar Matemáticas. Conocimiento de Contenido Pedagógico y entornos de aprendizaje*. Conferencia pronunciada en el I Congreso Internacional sobre *Didácticas Específicas en la Formación del Profesorado*. Santiago de Compostela, Julio.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990): "El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las Matemáticas". En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Alfar: Sevilla.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1993): Serie *Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las Matemáticas. Aritmética. Enseñanza Primaria*. Video nº 5. *Resolución de problemas aritméticos elementales. Estructura multiplicativa*. Servicio de Medios Audiovisuales y Tecnología Educativa. ICE: Universidad de Sevilla.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1993): Serie *Elementos del conocimiento base para la enseñanza de las Matemáticas. Aritmética. Enseñanza Primaria*. Video nº 6. *Fracciones. La relación parte-todo*. Servicio de Medios Audiovisuales y Tecnología Educativa. ICE: Universidad de Sevilla.

Marcelo, C. y otros (1991): *El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Sevilla: Sevilla.

McNamara, D. (1990): "Research on Teachers' Thinking: its contribution to educating student teachers to think critically". *Journal of Education for Teaching*, 16(2), 147-160.

NCTM (1989): *Estandares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*. NCTM: Reston, VA. (Traducción al castellano, 1991. SAEM Thales)

NCTM (1991): *Professional Standards for Teaching Mathematics*. NCTM: Reston, VA.

Richert, A. (1991): "Case Methods and Teacher Education: Using Cases to Teach Teacher Reflection". En B.R. Tabachnick y K. Zeichner (Eds.) *Issues and Practices in Inquiry Oriented Teacher Education*. The Falmer Press: London.

Romberg, T. (1988): "Can teachers be professionals". En D.A. Grouws, T.J. Cooney y D. Jones (Eds.) *Perspectives on research on effective mathematics teaching*. NCTM: Reston, VA; LAE: Hillsdale, NJ.

Sánchez, V. y Llinares, S. (1990): *Buscando nuevas metodologías en la Formación de Profesores de Primaria*. Comunicación presentada en las VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Huelva, Junio.

Shulman, L. (1986): "Those who understand: Knowledge Growth in Teaching". *Educational Researcher*. February, 4-14.

Shulman, L. (1992): "Toward a Pedagogy of Cases". En J. Shulman (Ed.) *Case Methods of Teacher Education*. Teachers College Press: New York.

Shulman, L. (1992 b): *Renewing the Pedagogy of Teacher Education: The impact of Subject-specific Conceptions of Teaching*. Conferencia pronunciada en el I Congreso Internacional sobre *Didácticas Específicas y Formación del Profesorado*. Santiago, Julio.

Sykes, G. y Bird, T. (1992): "Teacher Education and the Case Idea". En G. Grant (Ed.) *Review of Research in Education*, vol. 18, 457-521.

Wilson, S., Shulman, L. y Richert, A. (1987): "'150 Different Ways' of Knowing: Representations of Knowledge in Teaching". En J. Calderhead (Ed.) *Exploring Teachers' Thinking*. Cassell Education: London.

MESA Nº 8

ASPECTOS SINGULARES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

Secretario: D. Claudio Sánchez Alvarez

MESA 8. ASPECTOS SINGULARES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

AUTOESTIMA Y RENDIMIENTO DIFERENCIAL EN MATEMATICAS

Dña. Fidela Velázquez Manuel. Organización Española para la Coeducación "Ada Bayron"

Hablar del rendimiento diferencial de chicos y chicas en Matemáticas sigue siendo un tema controvertido, a pesar de su actualidad y de los múltiples referentes que existen en diversidad de estudios sobre el tema, así como la aparición sistemática de recomendaciones que al respecto se hacen en los informes y desarrollos curriculares más actuales. A pesar de ello, y a pesar de que el tema ha ido ocupando a nivel internacional y por derecho propio un lugar dentro de los debates sobre currículum y enseñanza de las Matemáticas, aún no ocurre lo mismo en nuestro país, donde se mueve por un territorio casi virgen y cuya urgente necesidad de explorar es manifiesta. Si bien hasta el momento las reacciones han ido desde ignorar el tema totalmente hasta provocar reacciones airadas, pasando por la pregunta ¿qué hacen personas como ustedes en un tema como éste? (a lo que siempre respondemos que nuestros intereses en cuanto a la didáctica de las Matemáticas son otros, pero en tanto este campo no esté suficientemente explorado y se camine de manera conjunta en la búsqueda de soluciones, algunas personas debemos interesarnos por él y trabajarlo de manera paralela a otros aspectos de la didáctica de las Matemáticas). No obstante, también hay que decir que se atisba una mayor comprensión hacia el tema, posiblemente tras las múltiples recomendaciones explícitas e implícitas que aparecen en los DCB, así como la creación, gestada tras variados encuentros nacionales e internacionales de Matemáticas, de la Asociación para la Coeducación en Matemáticas "Ada Byron", sección española de la IOWME, grupo de trabajo del ICMI. Así, se detecta cada vez más la existencia de un cuidado extremado en la confección de materiales curriculares, vigilancia de paridad en comisiones de trabajo y estudio etc. Evidentemente, a pesar de la afirmación con que se suele contradecir el análisis de la situación: ("Yo tengo mejores alumnas que alumnos en Matemáticas"), nadie parece poder explicar por qué ese mejor rendimiento no parece corresponderse, posteriormente, con mejores elecciones profesionales o con el acceso a los niveles de mayor responsabilidad dentro del propio campo profesional.

Los estudios de Sears y Feldman (1974) (1) confirman que los profesores prestan más atención (tanto positiva como negativa) a los chicos, quienes

tienden a aprender la independencia de la afirmación en sí mismos con la aceptación tácita de la profesora/madre. Las chicas, por otro lado, aprenden a reprimir su individualidad y a agradar al profesor; parafraseando a F. Maher y Ch. Rathbone (2) "...las chicas (después de aprender a reprimir su individualidad y a agradar al profesor) ...avanzan no tan mal como muchos chicos ni tan bien como los pocos elegidos" (el paréntesis es nuestro). Los profesores preparan tanto a las chicas como a los chicos para sus futuras carreras mediante un "currículo oculto" de tratamiento diferenciado dentro de la misma clase.

Está claro que, de nuevo según los múltiples estudios hechos hasta la fecha, el problema no es de capacidades, sino de la constatación de que no se ha trascendido la enseñanza mixta, y no se ha conseguido aún, pese a los años transcurridos, unos centros plenamente coeducativos, tal y como era el objetivo inicial. Así, la diversidad, entendida como una serie de características diferenciales entre grupos, no es contemplada con carácter general, y mucho menos en un área que ha sido impregnada de un fuerte carácter androcéntrico, como son las Matemáticas.

Efectivamente, parece que poco ha cambiado desde que, en 1926, el sociólogo alemán Georg Simmel afirmaba que "...el requisito de objetividad en el conocimiento teórico pertenece a la humanidad en general, pero en su actual configuración histórica es masculino de la cabeza a los pies". En este sentido, la profesora Leone Burton (El País, Suplemento de Educación del 12-11-91) afirmaba en una conferencia impartida en Madrid que, en la génesis de la leyenda negra que acompaña a las Matemáticas en todo el mundo, aparece una concepción "ideológica blanca, europea y masculina detrás de las Matemáticas". Esta misma conceptualización aparece en la explicación que da al uso de las nuevas tecnologías informáticas el economista americano Michael Apple en su libro "Maestros y textos", cuando expone:

"También son muy notables las diferencias de sexo. De cada tres estudiantes que aprenden hoy en día con ordenadores, dos son hombres. Incluso aquí los datos son engañosos, pues las niñas tienden a concentrarse en los cursos introductorios, no en los de niveles avanzados. Un analista resume la situación de una manera muy clara: "Aunque abundan las historias acerca de estudiantes que no quieren hacer nada que facilite su acceso a los ordenadores, la mayoría de los jóvenes que trabaja con ordenadores escolares son blancos y hombres (y económicamente bien situados). El incesante aumento de los centros de ordenadores personales y programas fuera del horario escolar y de fin de semana, está dirigido a los muchachos blancos de clase media. La mayoría de los padres pertenecientes a minorías (y pobres) no puede permitirse enviar a sus hijos a participar en esos programas" (3).

Este choque de clases, razas y sexos también aparece en prácticas escolares tradicionales, como la división de los niños según su supuesta

capacidad. Así, las secciones profesionales y de negocios de esta división adquirirán las habilidades correspondientes al procesamiento de textos y serán cubiertas primordialmente por mujeres jóvenes (de clase obrera). Las secciones académicas insistirán en las capacidades y usos más generales de programación y serán desproporcionadamente masculinas. Puesto que en la mayoría de las escuelas los programas de ordenador tienen en general su ámbito básico en las matemáticas y la ciencia, las diferencias de sexo pueden verse realizadas aún más dado el frecuente trato diferencial dispensado a las niñas en estas clases y los modos en que los currícula de matemáticas y ciencia cumplen ya "la función selectiva de la escuela y contribuyen a la reproducción de las diferencias de sexo".

A pesar de que muchos maestros y trabajadores en currícula han dedicado mucho tiempo y esfuerzo a otorgar igualdad tanto a las oportunidades como a los resultados de los estudiantes de matemáticas y ciencia (y esos esfuerzos son importantes), el problema sigue siendo grave y puede empeorar con la informatización de estas asignaturas" (4).

Evidentemente, ya el lector avisado colocará adecuadamente donde dice ordenador la palabra matemáticas, puesto que las afirmaciones que aparecen en el texto de Apple son perfectamente extrapolables, como se desprende del siguiente párrafo procedente de los "Estándares curriculares" (5), donde, bajo el epígrafe "Oportunidades para todos", se dice:

"Ya no pueden tolerarse las injusticias de las antiguas prácticas escolares. Las estadísticas actuales indican que los que cursan estudios superiores de matemáticas son por lo común hombres y de raza blanca. Las mujeres y la mayor parte de las minorías estudian menos matemáticas y están pobremente representados en carreras científicas y tecnológicas. La cuestión no es ya crear una sociedad justa en la que las mujeres y los diversos grupos étnicos disfruten de igualdad de oportunidades y de un trato equitativo. Las matemáticas se han convertido en un filtro crítico a la hora de encontrar empleo y una participación completa en nuestra sociedad. No podemos permitirnos que la mayoría de la población carezca de educación matemática: la igualdad se ha convertido en una necesidad económica".

En este contexto no es de extrañar que la composición de este y similares congresos sea de una ínfima representación femenina en puestos de representación y de participación de prestigio (conferencias), mientras que aumenta a nivel de aportaciones (comunicaciones) y participación de base (más de la mitad). Lo que es evidente es la necesidad de entrar en una dinámica de búsqueda de soluciones. Esta tendencia, que indica no sólo la elevada carga androcéntrica que se le otorga a la materia sino que señala la baja autoestima que, como causa y efecto, se genera en las profesionales dedicadas a las matemáticas, se anticipa en las chicas en hechos como el Torneo de Matemáticas. Los datos en cuanto a participación femenina y

obtención de puestos relevantes en el Torneo figuran en la Tabla I. Así, no sólo observamos, en general, menor participación femenina (el Torneo acoge a aquellos alumnos y alumnas mejores en Matemáticas que sean presentados por sus profesores y se sometan voluntariamente a la prueba o pruebas, lo que presupone una cierta carga de autoestima y facilidad en la toma de decisiones), sino que, asimismo, el número de finalistas supera el índice de participación en el caso de los chicos, lo que pudiera hacer referencia al tipo de prueba. En efecto, éstas presentan una gran tendencia hacia la resolución de problemas, que es el aspecto del trabajo matemático que precisa una dosis más fuerte de seguridad (emisión de conjeturas) y de autoestima (persistencia en la búsqueda de soluciones y uso de los errores como fuentes de conocimientos y no como elementos de fracaso personal).

Respecto a estos resultados en escolares de catorce años, conviene reflexionar sobre la frase de M.E. Badger (6) cuando afirma que:

"El hecho de que comiencen a mostrar las mayores diferencias en funcionamiento intelectual en la adolescencia es el resultado... de la iniciación de chicas y chicos en los papeles adultos que la sociedad dicta. En una sociedad que divide los papeles de acuerdo con el sexo, es lógico que el comportamiento individual se vea influido por lo que se considera sexualmente adecuado.

Si la sociedad considera que las actividades científicas, matemáticas, mecánica son dominio del hombre ... estos juicios se reflejarán en la cantidad de esfuerzo que chicos y chicas dedicarán a estas materias".

Y no cabe duda que, en las actitudes y modelos implícitos de los profesores y profesoras, aparece el sesgo de las expectativas que se tienen sobre alumnos y alumnas en función del rol genérico. Hacer con profesorado que lo desconozca el ejercicio de Antonio y María, en el que se describe un modelo único de persona, que en un caso se llama María y en otro, Antonio (Anexo I y II), ofrece una serie de datos invariables en cuanto a expectativas en función del género de la persona descrita. Así, invariablemente, las perspectivas futuras de las alumnas son inferiores cualitativamente en formación académica y/o promoción personal, apareciendo, además, sistemáticamente connotadas con sus condiciones familiares, hecho este último que no ocurre cuando el valorado es un chico.

¿Qué significado tienen estas ideas implícitas en las propias perspectivas de alumnas y alumnos y cuáles son las consecuencias en su rendimiento académico?

Si hacemos referencia a la caracterización de Brousseau sobre el tipo de comportamiento implícito del profesorado, esto es, efectos no conscientes que condicionan su práctica docente (Anexo III), podemos centrarnos en el efecto Pigmalión, donde se proyectan nuestras expectativas y nuestra propia imagen como modelo para el alumnado. En este sentido, y abundando en el tema de las expectativas ya comentadas con los ejemplos de Antonio y María,

conviene citar, en cuanto al modelo para el alumnado, las diferencias que existen entre el profesorado en Primaria y en Secundaria en lo referente a su distribución por sexos y ciclos (Anexo IV).

Es evidente el hecho de la existencia de profesorado femenino en los niveles inferiores, observándose que el profesorado masculino supera en gran medida su proporción real (baja, por otra parte, en la EGB) en los últimos cursos de esta etapa educativa, fundamentalmente en las áreas de Ciencias de la Naturaleza y Matemáticas, con la importancia que esto tiene si se relaciona con una de las modalidades de aprendizaje (el aprendizaje por modelización) del que se hablará más adelante. Este efecto modelizador masculino se acentúa en las Enseñanzas Medias, por cuanto continúa decreciendo el número de mujeres que enseñan Matemáticas y, sobre todo, Física, existiendo una gran desproporción con respecto al número de mujeres que enseñan disciplinas literario-humanísticas.

Este estado de cosas ha generado una creciente preocupación internacional por el tema de qué les ocurre a las chicas en relación a las áreas científico-tecnológicas, y en nuestro caso, referido a las Matemáticas.

Así, los estudios de N.A.E.P. (National Assessment of Educational Progress) concluyen que "... a los 17 años se producen las mayores diferencias significativas en el rendimiento en Matemáticas; los chicos puntúan un 8% más alto ...), como síntesis de los resultados de la Comisión de Educación de los Estados que, sobre una muestra de escolares estadounidenses de ambos sexos de 13 a 17 años, observan que a los 13 años alumnos y alumnas empiezan sus clases de Matemáticas con las mismas habilidades, pero a los 17 años, los chicos obtienen mejores resultados en habilidades y juicios espaciales y en resolución de problemas (ámbito que exige recuerdo, combinación y aplicación de conocimientos), manteniéndose las chicas con mejores resultados solamente en cálculo".

A este respecto, en el Informe Cockcroft, en sus páginas 77, 78 y 79, aparecen gran parte de los argumentos que aquí se exponen, como elementos desencadenantes de las preocupantes diferencias de rendimiento en Matemáticas de las chicas, también constatadas en Gran Bretaña. Los factores a que alude el Informe Cockcroft pueden clasificarse así:

1) Factores educativos familiares, entre los que se encuentran:

a) La diferente tipología de los juguetes usados por niños y niñas. A este respecto, y fruto de una encuesta pasada a escolares canarios de 13 años de edad, que posiblemente podría generalizarse para amplias zonas del territorio nacional, sobre juguetes usados hasta ese momento por ellos y ellas, se obtienen resultados significativos: mientras la mayoría de los niños usan juguetes que tienen que ver con habilidades espaciales, la mayoría de las niñas (los porcentajes son casi equivalentes) utilizan juguetes que tienen que

ver con la reproducción de roles ¡inexistentes para los chicos! (Anexo V)

b) La independencia de los chicos frente a la dependencia de las chicas. El hecho queda evidenciado en la mejor puntuación de los chicos en actividades creativas que impliquen conjeturar y un trabajo autónomo e investigativo, mientras que las chicas se muestran mejores en aquellas actividades más dependientes, en las que hay que seguir normas o reglas.

c) Existe una tendencia generalizada a considerar a los chicos más interesantes que a las chicas. Este hecho se va a reflejar en la propia autoestima de alumnos y alumnas. A este respecto, las chicas tienden a considerarse peores que los chicos en Matemáticas, atribuyendo sus éxitos al esfuerzo personal y su fracaso a falta de capacidad, mientras que los alumnos achacan sus fracaso a falta de trabajo y sus éxitos a aptitudes personales en porcentajes similares (Ver en Anexo VI el resultado de las respuestas a una pregunta hecha en este sentido a los escolares de la muestra ya citada).

2) Factores sociales, entre los que se encuentran:

a) La elevada carga androcéntrica del área, a la que ya hemos hecho referencia, y

b) El temor de las niñas al rechazo si son consideradas buenas en Matemáticas, puesto que socialmente se connota con una serie de características poco "atractivas" o "femeninas" (en sentido tradicional) a las mujeres con aptitud en el área (Ver en Anexo VII los resultados de la tipología asignada a un alumno y a una alumna buenos en Matemáticas, ofrecida por los propios alumnos y alumnas en respuesta a la cuestión "Juan/María ganó un premio en Matemáticas. Describe a Juan/María").

3) El tercer bloque de factores son los considerados factores escolares, entre los que se encuentran:

a) El descenso paulatino de la presencia de la mujer en la enseñanza de las Matemáticas a niveles superiores, al que ya hemos hecho referencia, con el consiguiente efecto sobre aprendizaje por modelización.

b) Los contextos educativos casi exclusivamente masculinos (enunciados de problemas más interesantes para los chicos, inexistencia en la mayoría de los casos, de referencias en textos a mujeres matemáticas,...)

c) Distintas expectativas del profesorado frente a alumnos y alumnas, a las que ya hicimos referencia cuando hablamos de la actividad de Pedro y María y el efecto Pigmalión, en la que se refleja con claridad nuestras propias expectativas (sesgadas) hacia nuestros alumnos o alumnas.

Todos estos factores combinados van a tener una alta incidencia en el distinto desarrollo de la autoestima en alumnos y alumnas (lo que aún sorprende es cómo algunas de nuestras adolescentes pueden escapar a este

cúmulo de despropósitos) y además abre un importante interrogante sobre el hecho de que, habiéndose logrado generalizar la enseñanza mixta (aún cuando se la denomina coeducación, no deja de ser en la gran mayoría de los casos, un simple deseo) pudiera haber motivos suficientes para la incipiente y creciente reivindicación, en países de tradición "coeducativa", de la vuelta a las escuelas segregadas como más beneficiosas para el aprendizaje y génesis de una autoestima positiva y mejores aspiraciones profesionales de las alumnas. Por ejemplo, el profesorado del sistema escolar coeducacional danés de ciclo elemental (la "folkeskole", con alumnado entre 7 y 16 años) que participa en proyectos pedagógicos innovadores, ha utilizado la vuelta a la segregación como un método de organización para introducir y desarrollar la igualdad de oportunidades y las iniciativas pedagógicas antisexistas. La idea de disponer entornos separados para niñas y niños durante períodos más o menos largos se inició como un medio para proporcionar espacio a las niñas y un medio para reforzar su competencia a nivel profesional, así como para habilitarlas a nivel personal.

Esta preocupación internacional por el tema aparece, asimismo, en uno de los documentos curriculares más utilizados en la actualidad. Nos referimos a los "Estándares curriculares y para la evaluación" de la NCTM en los que, aparte del texto al que ya hemos hecho referencia al inicio de este trabajo, aparece una referencia explícita, en su página 260, cuando bajo el epígrafe "Igualdad" manifiesta:

"Siendo la nuestra una sociedad pluralista y democrática, no podemos seguir alejando a las mujeres y a las minorías del estudio de las Matemáticas. Creemos que los procedimientos actuales de orientación son frecuentemente injustos, y lanzamos el reto de que se desarrollen actividades y programas docentes que traten directamente este tema. Un artículo sobre la Copia de Trabajo de los Estándares sugería el establecimiento de diversos programas piloto de matemáticas en la escuela, basados en estos Estándares que demostraran que todos los estudiantes -incluyendo mujeres y minorías marginadas- podían alcanzar un nivel satisfactorio de logros matemáticos y solicitaba que se le diera una amplia difusión al éxito de los mismos".

También en los Estándares, pero como referencia implícita, aparecen estas dos recomendaciones respecto a las situaciones en que, según hemos visto, las chicas actúan bajo serios obstáculos (página 6 de los Estándares).

Una, que bajo el epígrafe "Adquirir seguridad en la propia capacidad", afirma: "Como consecuencia del estudio de las matemáticas, los estudiantes han de verse a sí mismos capaces de usar su creciente potencia matemática para darle sentido a situaciones problemáticas nuevas en el mundo que los rodea. En cierto modo, todas las personas son matemáticos y usan la matemática conscientemente. Hacer la compra, medir un rollo de papel pintado o decorar una vasija de cerámica con un diseño regular es usar matemáticas. Las

matemáticas en la escuela deben hacer que todos los estudiantes comprendan que usar la matemática es una actividad humana corriente. El hecho de tener experiencias numerosas y variadas permite que los estudiantes adquieran confianza en su propio pensamiento matemático".

La otra, en la misma página, y bajo el epígrafe "Ser capaz de resolver problemas matemáticos", dice:

"Es esencial desarrollar en todos los estudiantes la capacidad de resolver problemas si se quiere que sean ciudadanos productivos. Suscribimos firmemente la primera recomendación que se hace en An Agenda for Action (National Council of Teachers of Mathematics, 1980):

"La resolución de problemas ha de ser el punto de mira de las matemáticas escolares" (p.2). Para desarrollar dicha capacidad, los estudiantes tienen que trabajar sobre problemas que pueden tardar horas, días e incluso semanas en resolverse. Aunque algunos puedan ser ejercicios relativamente simples que puedan solucionarse independientemente, otros deberían implicar trabajo en grupos pequeños o una clase entera trabajando en conjunto. Algunos problemas deben ser abiertos, sin solución única, y otros habrán de ser formulados".

Este ejercicio de especulación y emisión de hipótesis y conjeturas tiene que ver con la seguridad en sí mismo que genere el estudiante, y es evidente, dados todos los datos hasta ahora ofrecidos, que las chicas se encuentran en desventaja respecto a los chicos en esta actividad de conjeturización y comprobación posterior que, por otro lado, es inherente a toda disciplina científica. A este respecto, y en la misma línea, Capi Corrales (documento desarrollado en la ponencia presentada en las V JAEM de Castellón), y sobre los DCB dice que "... en los documentos, la actividad matemática se nos presenta íntimamente ligada a la actividad de la reflexión, del pensar. Y para poder pensar, hace falta tiempo pensando. Si cada vez hay más cuidado en el tipo de libros y juguetes que damos a las niñas, seguimos prestando poquísima atención a su necesidad de tiempo en solitario".

Este tiempo en solitario, preciso para cuestionarse los temas y acometer soluciones es mucho más abundante para los chicos que para las chicas. Si a esto le sumamos el hecho, también recogido por Capi Corrales en el documento citado, sobre que:

"...Muchas de las alumnas tienen la experiencia de que cuando preguntan a los profesores una duda referida a un problema, se les contesta resolviéndoles el problema en cuestión", suerte de paternalismo catalogado como efecto Topaz en la clasificación de Brousseau (Anexo III), con lo cual no sólo se coarta la capacidad de conjeturar de la alumna, sino que se anula su propia seguridad, toda vez que tal hecho produce en la alumna la idea de que, para ese tipo de actividad

a) ella nunca va a ser capaz de hacerla sin ayuda, ó

b) su capacidad es tan limitada que hasta el profesor, dándose cuenta, ha de echarle una mano.

Ambas conclusiones son igual de lesivas para la seguridad con que las alumnas van a afrontar la resolución de problemas. La intervención referida de Capi Corrales en las V JAEM está centrada en un análisis sobre los DCB de Matemáticas, documento curricular que, por primera vez en nuestro país, muestra preocupación sobre el tema (no en vano una de sus autores, M^a Jesús Luelmo, es la Presidenta actual de la ADA BYRON). En efecto, cuando en la página 86 aparecen indicaciones sobre "... adoptar una organización (de la ESO) que asegure la igualdad de oportunidades a todos ...con independencia de ...su sexo ...y otras características individuales y sociales ... (que) tiene que articularse de forma coherente con el principio ...de dar respuesta real a las necesidades educativas de todos los alumnos, es decir, con el principio de atención a la diversidad ...que aumentan de forma sustancial a partir de los 12/13 años y alcanzan una amplitud considerable hacia el final de la educación obligatoria ...", en realidad, y de manera implícita, podemos ver una referencia directa a la necesidad de atender al hecho diferencial de las niñas en las aulas, atendiendo a sus motivaciones, intereses y enfocando la enseñanza de forma coeducativa y, posiblemente, compensadora.

En la página 100 vuelve a aparecer esta necesidad orientadora a contemplar cuando dice "Es a partir de los doce años cuando se reflejan de manera más ostensible las diferencias en los alumnos respecto a sus capacidades, intereses y motivaciones. Es necesario, pues, diseñar una estrategia adecuada que responda a estas diferencias. Es de vital importancia que el alumno intercambie sus puntos de vista con sus profesores respecto a sus posibilidades de elección. La labor del tutor tiene aquí una importancia capital. Los tutores deben analizar con los alumnos los pros y contras de cada elección, qué es lo más adecuado para sus posibilidades y gustos y qué posibles repercusiones tendrían las opciones en las salidas profesionales futuras. Es vital que el profesor ayude al alumno a tener una visión lo más ponderada posible de sus potencialidades, sin eludir la reflexión sobre las propias limitaciones".

Pero reflexionemos a la luz de los datos que hemos manejado. De un lado, la niña percibe que, profesionalmente y en los modelos a su alcance (profesoras) las mujeres se alejan de una orientación científica tanto más cuanto más arriba se sube en la escala de competencia científica (ver estadísticas en ANEXO IV), con lo cual el efecto "modelizador" se circunscribe cada vez más a un profesorado masculino que, sin ser consciente, adopta con las alumnas la actitud paternalista que hemos llamado "efecto Topaz" que es, precisamente, todo lo contrario a lo que necesita la alumna para estimular su

seguridad y autoestima respecto a las disciplinas científicas. De otro lado, y volviendo al documento de Capi Corrales y a una encuesta referida al conocimiento sobre la contribución de la mujer a la ciencia en general y a la matemática en particular al que hace alusión, se observa que

a) las alumnas desconocen la existencia de mujeres matemáticas contemporáneas

b) asimismo, en raras ocasiones las alumnas han estudiado la incidencia de mujeres en la historia de las Matemáticas y, de hacerlo, lo han hecho bajo otro punto de vista distinto al de su contribución a la Matemática (por ejemplo, Lady Chatelet como amante de Voltaire y sin conocimiento de su contribución al cálculo diferencial e integral)

c) las alumnas no son estimuladas a efectuar opciones profesionales no estereotipadas donde la Matemática tenga un lugar importante, ni se hace hincapié en su importancia también dentro de las elecciones profesionales estereotipadas.

Volviendo a los DCB, aparece una referencia a la necesidad de atención respecto al concepto distinto de realidad cuando dice: "Desde el punto de vista de la enseñanza de las matemáticas, las reflexiones anteriores deben tamizarse a través del concepto de realidad que tienen los alumnos. No son los mismos problemas los que necesita resolver un matemático, un adulto, un adolescente y un niño. La realidad de los alumnos incluye su propia percepción del entorno físico y social y componente imaginadas y lúdicas que despiertan su interés en mayor medida que las situaciones reales desde el punto de vista adulto". A este respecto, y hablando sobre concepto distinto de la realidad, conviene resaltar que esa diferencia también existe entre alumnos y alumnas. Así, libros de texto y materiales curriculares, con enfoques sesgados estereotipadamente van a dificultar el aprendizaje de aquellos colectivos en desventaja. En este sentido, podemos hacer mención a la investigación hecha con la muestra de alumnos descrita anteriormente, a los que se les pasó una prueba de cuatro problemas a resolver mediante operatoria básica (la misma en los cuatro), y que presentaban contextos distintos, a saber: un contexto estereotipadamente masculino (motos y cilindradas), uno estereotipadamente femenino (alimentación de bebés), uno supuestamente neutro (compra en un supermercado) y otro inventado (puntuaciones en un deporte inexistente, el "canasbol"). Los resultados (Que figuran en el ANEXO VIII) demuestran que los contextos estereotipados sesgan los resultados en los dos sentidos, fundamentalmente en el hecho de alumnos o alumnas que se retraen de intentar la solución a un problema de contexto poco familiar. No obstante, contextos desconocidos y no identificables con ideas previas presentan igual porcentaje de abstenciones en

alumnos y alumnas. En este sentido, no olvidemos que el papel del modelo de profesorado que tiene a lo largo de su escolarización va a incidir de manera notable en la mayor o menor estereotipización del comportamiento del alumnado (ANEXO IV). No olvidemos las tres formas en que el aprendizaje se produce, a saber: por refuerzo, por modelización (observación e imitación) y estructural (por resolución de problemas). Las dos primeras conducen, ineludiblemente, a asunciones de roles estereotipados. En efecto, la escuela refuerza, mediante los mecanismos descritos, los modelos estereotipados y respecto a la modelización (formación del comportamiento a partir del modelo) hemos visto como, a partir de la adolescencia, cada vez les resulta a las alumnas más difícil identificarse-modelizarse de forma no estereotipada, sencillamente por el constante decrecimiento de modelos femeninos en niveles superiores de dedicación matemática y científica. A pesar de las dificultades con que las alumnas han de enfrentarse en la resolución de problemas, es en este otro tipo de aprendizaje (el aprendizaje estructural) en el que debemos confiar. En cuanto a comportamiento, los problemas a resolver por las alumnas, a las que debemos adiestrar para enfrentarse a ellos, son, de un lado, la ruptura de los esquemas estereotipados que constriñen sus propias aspiraciones y, de otro, el desarrollo y potenciación de su autoestima, hechos ambos que están intrínsecamente unidos y que influyen el uno en el otro a manera de un círculo vicioso. Tres son las principales variables referidas al docente que diversos autores han determinado como influyentes en el logro de un autoconcepto positivo en alumnos y alumnas. De un lado, Yersild, Witty y Sears señalan la propia personalidad del profesor o profesora, esto es, el/la profesor o profesora como modelo. Ryam y Combs señalan como importantes, también, la percepción del profesor o profesora sobre sí mismos y sobre los demás. No hace falta resaltar el papel del profesorado como modelo en los tres tipos de aprendizaje descritos con anterioridad, pero conviene resaltar el papel que sobre la autoestima de las alumnas tiene la existencia de un profesorado que repite las características detectadas en alumnos y alumnas (alta autoestima en profesores y más baja en profesoras), así como la percepción del profesorado sobre el alumnado (mayores expectativas hacia los chicos que hacia las chicas, como ya se ha evidenciado anteriormente).

La autoestima como factor de éxito en el aprendizaje de las matemáticas (o, al revés, los éxitos en matemáticas como potenciadores de la autoestima) aparecen reflejados en los DCB en varias ocasiones. Así, en la página 484 se dice que "...una relación de familiaridad y gusto hacia las matemáticas puede contribuir de forma importante al desarrollo de la autoestima, en la medida en que el alumno llegará a considerarse capaz de enfrentarse de modo autónomo a numerosos y variados problemas"; en la página 486 "la adquisición de una actitud positiva hacia las matemáticas, del gusto por ellas y de la confianza en la propia capacidad para aprenderlas y utilizarlas, es otro

aspecto básico que debe tenerse en cuenta para lograr la funcionalidad del resto de los aprendizajes"; en la página 492 se dice "Otro aspecto fundamental de la valoración que el alumno hace de las matemáticas es la confianza en su propia capacidad para aprenderlas y utilizarlas pertinentemente", y en la página 521, bajo el epígrafe "El papel de los errores" se hacen una serie de consideraciones sobre el error como punto de partida del aprendizaje, para lo que la autoestima es un elemento imprescindible: "desde este punto de vista, los errores y las ideas imprecisas de los alumnos toman una dimensión positiva. El conflicto entre sus conocimientos anteriores y determinadas situaciones nuevas que no encajan con ellos es un paso necesario para reorganizarlos, enriquecerlos y ajustarlos; en suma, para que se produzca un aprendizaje significativo. El papel del profesor no consiste en evitar el error, proponiendo sólo tareas que los alumnos ejecuten correctamente, ni en ignorarlo para partir desde cero. Este cambio de punto de vista implica que error no ha de equipararse a fracaso. Al contrario, el profesor debe transmitir a sus alumnos la sensación de que lo que saben es adecuado para determinadas situaciones, aunque no lo es para otras diferentes o nuevas, y que progresar requiere reconocer estas contradicciones y superarlas. A partir de esta toma de conciencia por parte del alumno, la tarea del profesor consiste en proporcionarle elementos que le permitan reorganizar de nuevo sus esquemas".

Este aprendizaje con el error como punto de partida choca, en el caso de las alumnas, con el llamado efecto Topaz (ANEXO III), en que el profesor o profesora va a conducir de la mano a las alumnas, impidiéndoles la sensación de "sentirse capaz de" y evitándole, tanto el incentivo de la búsqueda y resolución de los problemas como la génesis de la seguridad en sí misma, que aparecería como efecto del desarrollo de la autonomía ante la superación de los errores.

Bajo el epígrafe "El pensamiento y la actitud del profesor" aparece en la página 521 una referencia a la parte del currículo oculto que corresponde a la actitud del profesor cuando se dice que "cada profesor adopta en el aula una serie de decisiones y actitudes que traducen sus ideas acerca de qué son, para qué sirven y cómo se aprenden las matemáticas, sin olvidar su propia predilección hacia una u otra parte de la asignatura o hacia determinado tipo de actividades. Este conjunto de apreciaciones, que generalmente no se hace explícito, se transmite de hecho a los alumnos; de ahí que sea preferible tomarlas abiertamente en consideración y reflexionar sobre ellas, del mismo modo que se reflexiona sobre los conceptos o técnicas que se pretende enseñar". A este respecto, recordemos las variables del docente que influyen en un positivo autoconcepto, en particular el concepto de sí mismo y de los demás que estos docentes tienen. Volviendo a los efectos (ANEXO III), estas ideas del profesor, aún cuando no se evidencien, van a afectar a los alumnos y alumnas tanto desde el llamado "efecto Pigmalión" (proyectando nuestras

propias expectativas e imagen como modelo para el alumno) como desde el "efecto halo" (introduciendo en el acto didáctico elementos que no se deben introducir, como, por ejemplo, contextualizando el área de manera estereotipada).

Una reflexión importante sobre el trabajo en grupo (fundamental para el refuerzo de la confianza en sí mismos y, por lo tanto, de carácter vital para las alumnas) aparece en la página 524 de los DCB, en la que se dice que "las actividades colectivas juegan un papel importante en el aprendizaje de actitudes y valores generales y sobre las matemáticas. Por ejemplo, permiten conocer y valorar puntos de vista distintos, con lo que, poco a poco, el alumno interioriza el carácter abierto y no dogmático de las matemáticas, y se anima a explorar sus propias soluciones. Es conveniente que el profesor planifique de vez en cuando debates para tratar expresamente la opinión que los alumnos tienen de las matemáticas: si creen que son útiles y para qué, si han sido siempre igual, si son fáciles o difíciles para ellos y por qué". Esta tendencia a buscar seguridad en el trabajo en grupo no es sólo exclusiva de las alumnas. También las profesoras tienden a participar más en trabajos colectivos que en trabajos individuales. Basta con rastrear las contribuciones en materia de comunicaciones de las docentes en congresos de este tipo, en que aparecen encuadradas en trabajos de equipo preferentemente que presentando trabajos individuales.

Todas estas reflexiones conviene explicitarlas a profesoras y alumnas, de un lado, porque, parafraseando el título de una obra de Hans Schiefle (Ed. Oriens-Madrid.1980) existe una íntima conexión entre "El problema de la motivación para el aprendizaje y el aprendizaje de los motivos", y porque una adecuada explicitación ayudará, evidentemente, a una desculpabilización de profesoras y alumnas por una serie de acciones, opciones, elecciones etc. a las que se ven abocadas casi inexorablemente, a no ser que aprendamos a conocer las causas y las transformemos en elementos de cambio. En este aspecto, el conocimiento de nuestras propias limitaciones es un primer paso para su superación, de acuerdo con la máxima de que "Quién tiene la información, tiene el poder". Efectivamente, y utilizándolo a nuestro favor, podríamos hacer uso del llamado "efecto halo" para modificar intencionadamente algunos elementos que afectan al acto didáctico y que son competencia exclusiva de la intervención docente.

Regresando a la frase de Georg Simmel con que empezamos esta intervención, podemos, después de todo lo expuesto, llegar a la conclusión de que, efectivamente, aún en nuestros días el requisito de objetividad en el conocimiento (que pertenece a la humanidad en general), en su actual configuración histórica continúa siendo masculino de la cabeza a los pies, así como la consideración de la profesora Leone Burton cuando habla de la existencia de una ideología blanca, europea y masculina de las matemáticas,

teoría similar a la sostenida por Michael Apple al hablar de la división de los niños en función de su supuesta capacidad en la escuela, y que esta función selectiva de la escuela contribuye a la reproducción de las diferencias de sexo (4) y por los Estándares Curriculares cuando hablan de la tendencia a cursar estudios superiores de Matemáticas fundamentalmente en hombres de raza blanca. En este sentido, debemos echar mano del uso de la historia de las matemáticas a la hora de desmitificar el androcentrismo del área, en el aspecto de incorporar las contribuciones de las mujeres a lo largo de la historia de las matemáticas tanto por sí solas como contribuyendo al desarrollo de campos en los que sólo se menciona la acción de los hombres, mediante aportaciones fundamentales. Esta propuesta que hacemos es recogida en los DCB de manera explícita cuando, en sus páginas 101 y 102, se centran en la atención a la diferencia de los alumnos y alumnas, haciendo hincapié en la necesidad de estimular la autoestima de las y los adolescentes (fundamentalmente de las primeras) en los párrafos siguientes:

“Por otra parte, desde la escuela debe prestarse especial atención a los problemas que se derivan de los cambios físicos que se producen en la adolescencia, así como a los que se refieren a la autoestima o a la relación con los demás. En este sentido, el papel del profesor consistirá prioritariamente en favorecer la comprensión de los cambios que se producen, en conseguir que se dé una valoración positiva de los mismos y que se les considere como algo enriquecedor. Procurará que el estudiante juzgue lo que le acontece sin complejos, con criterios progresivamente más personales y menos dependientes de los cánones establecidos. Ello lleva implícito el análisis crítico de la valoración social de los roles sexuales y de los elementos de género ligados al sexo.

El alumno va conformando en esta etapa el concepto de sí mismo y es muy importante que ello derive hacia una autoestima personal. El educador, consciente de la importancia de que este aspecto se resuelva de modo positivo, tenderá a mostrarle confianza, creará ocasiones en las que pueda verse capaz y le ayudará a estudiar los límites de sus posibilidades valorando el esfuerzo empleado en lograr sus propósitos. De este modo, el alumno y la alumna se sentirán impulsados a continuar y confiarán en obtener nuevos progresos gracias a su actividad y capacidad para controlar situaciones. Por último, el profesor debe estudiar las relaciones que se establecen, seguir su evolución e intervenir para propiciar que se analicen y resuelvan los conflictos personales o de grupo, en un clima de aceptación, ayuda mutua, cooperación y tolerancia. Se trata de lograr que el alumno tenga oportunidades de conocerse a sí mismo más allá de tópicos y tabúes y para desarrollar su racionalidad y autonomía frente a la creencia sumisa a normas y valores”.

En esta línea, nuestra sugerencia de estrategias docentes para incrementar un positivo autoconcepto en las alumnas tiene cuatro vías fundamentales, a saber:

- 1) Hacer manifestaciones explícitas sobre los aspectos positivos de cada alumno
- 2) Establecer refuerzos basados en informes sobre logros alcanzados y dar nuevas direcciones para resolver los aspectos negativos
- 3) Asumir efectivamente expectativas positivas respecto a alumnos y alumnas (no olvidar el papel de los efectos, ANEXO III)
- 4) Establecer reorientaciones curriculares siempre que se detecten sesgos estereotipados en las usadas.

De esta forma, podremos neutralizar el elevado androcentrismo del área desde el aula, androcentrismo que ponen de relieve los DCB (páginas 188 y 189) cuando dicen: “Otro factor que contribuye a la dificultad que el conocimiento matemático presenta para los alumnos de la Educación Secundaria Obligatoria es la valoración de la que es objeto este conocimiento en nuestra sociedad. Así, el nivel de competencia matemática no sólo es uno de los criterios decisivos para determinar el grado de éxito o fracaso de los alumnos en el transcurso de la educación obligatoria, sino que condiciona fuertemente las posibilidades de acceso a las diversas modalidades de formación en la educación postobligatoria. Más aún, existe el convencimiento generalizado, favorecido sin duda por el espectacular desarrollo tecnológico de las últimas décadas y por su influencia creciente sobre las formas de vida, de que los puestos de trabajo cualificados están fuera del alcance de los alumnos que no obtienen un buen nivel de conocimientos matemáticos al término de la educación obligatoria. Hay que añadir también determinadas creencias, aún arraigadas en sectores de nuestra sociedad, que vinculan al estereotipo masculino aquellas actividades y profesiones de tipo científico y tecnológico; como consecuencia, bastantes alumnas tienen que vencer la dificultad añadida de un ambiente que no favorece su interés y gusto naturales por las matemáticas”.

Nuestra contribución como docentes es primordial a la hora de verificar que, efectivamente, se cumple la afirmación de Dale Spender (2) en el sentido de que “la filtración de la investigación sobre las mujeres en las disciplinas académicas y en los currículos escolares ha revelado que muchos conceptos tradicionales no se han basado en verdades universales, sino en la experiencia de varones occidentales de raza blanca”. Así, y volviendo a nuestros DCB (página 493), “es necesario fomentar la confianza de los alumnos y de las alumnas hacia sus propias habilidades matemáticas, presentados en la forma y en el momento en que puedan ser comprendidos y evitando a todo precio las frustraciones, los bloqueos y los rechazos que provocan las descalificaciones globales basadas en el rendimiento”.

Pero no sólo tenemos que preocuparnos por el elevado androcentrismo de las matemáticas profesionales. También hay que pensar en la relevancia de las

matemáticas en la vida adulta. Así, y volviendo a los DCB (página 485), se nos recuerda lo siguiente:

"Pero la finalidad utilitaria de las matemáticas escolares tiene, además, en el marco de la educación obligatoria, un referente claro: las necesidades matemáticas en la vida adulta. Así, en la sociedad actual, es imprescindible comprender los mensajes matemáticos que se lanzan continuamente a través de los medios de comunicación: es necesario un conocimiento matemático para analizar y tomar decisiones en el ámbito del consumo y economía personales; con frecuencia es preciso realizar medidas y estimaciones de diferente naturaleza; etc. Dentro de este ámbito de preparación para la vida adulta, es necesario hacer una referencia especial a la necesidad de promover la participación de las alumnas, analizando la forma más adecuada de desarrollar su interés y su propia estima con respecto a las matemáticas, para evitar elecciones estereotipadas que condicionen tanto sus opciones profesionales futuras como su capacidad de actuación como ser adulto".

El androcentrismo docente se pone de manifiesto cuando los profesores contestamos a estas dos cuestiones:

- a) "Tu mejor alumno en clase de Matemáticas es Juan. Lista las características de Juan"
- b) "Tu mejor alumna en clase de Matemáticas es Ana. Lista las características de Ana"

Aquí, las respuestas de profesores y profesoras no difieren mucho de las que dan alumnos y alumnas a una pregunta similar referente a sus compañeros.

En efecto, esclarece lo que pasa en el cerebro de nuestros/as adolescentes respecto al área la siguiente actividad: se les dice a grupos de alumnos y alumnas que describan a un alumno (Juan) y a una alumna (Ana) que han ganado un premio en Matemáticas. Los resultados dicen lo siguiente: mientras Juan es inteligente (el 19%), Ana en un porcentaje similar, aunque ligeramente inferior (el 12%), es solamente lista (nótese el salto semántico entre ambos términos). En atención, memoria y trabajo son calificados de manera similar, pero mientras el 13% dice de Juan que tiene mal comportamiento, de Ana no lo dice nadie. Esto es, un alumno puede ser malo de comportamiento y ser bueno en Matemáticas (¿Será importante tener mal comportamiento para ser bueno en Matemáticas? ¿Tendrá algo que ver con la creatividad necesaria para ser buen resolutor de problemas, o con el dominio del espacio al ser un poco "trasto"?), mientras este binomio parece estarle prohibido a las chicas (algunas niñas atribuyen su éxito en Matemáticas a que se portan bien). Pero, no obstante, Ana es literalmente sepultada con "otras características" que no tienen nada que ver con el

aprendizaje de las Matemáticas (el 43%, frente al 20% para Juan). Así, frente a características comunes a ambos (simpáticos, empollones, pacientes, educados, rápidos, artistas), Juan es "razonable" y "huraño" (puede permitirse el lujo de serlo), mientras Ana debe ser esmerada y limpia; es presumida y soberbia (¿cómo se atreve a sacar un premio en Matemáticas? ¿Dónde está la modestia consustancial al ser mujer?), es sociable (describen a las alumnas buenas en Matemáticas que, para hacerse perdonar, ayudan a sus compañeros, explicándoles o dejándoles copiar), es cariñosa (¿Qué tendrá que ver la afectividad personal con la efectividad en matemáticas?), es obediente (¿Recuerdan que Juan se portaba, en cambio, mal?), le gustan los exámenes (se supone que exámenes convencionales, donde se emplean fundamentalmente mucha operatoria y pocas estrategias), es fea y con gafas en un porcentaje considerable de estimación (7%), y es gordita (4%). Es decir, una chica buena en Matemáticas no puede "ligar" porque es fea. O no "liga" porque es buena en Matemáticas y es orgullosa y soberbia. O es buena en matemáticas y no es fea y tiene que hacérselo perdonar siendo modesta, modosita, cariñosa, esmerada, limpia y sociable. Lo tienen extremadamente difícil nuestras adolescentes, ¿no?

Para la profesora M^a Eugenia Jiménez (El País, 12-11-91, Suplemento de Educación), "El problema es que en este país está mal visto que las chicas se apliquen en el estudio de asignaturas científicas. En este país persiste el tópico de que las buenas alumnas son feas y antipáticas".

Otra actividad que nos ofrece muchos datos sobre el autoconcepto de chicas y chicos ante las Matemáticas consiste en hacerle al grupo de alumnos las dos preguntas siguientes: ¿Te consideras bueno/a en Matemáticas? ¿Por qué?. Los resultados de una muestra fueron los siguientes:

Aproximadamente el mismo porcentaje de alumnos y de alumnas evidenciaron éxito o fracaso personal en el área. La diferencia fundamental estriba en los factores a los que atribuyen el éxito o el fracaso, además del hecho, ya significativo, de que las chicas contestan "regular" y dan razones de fracaso (infravaloración), mientras los chicos contestan "regular" y dan razones de éxito (supravaloración). Así, mientras las chicas atribuyen fundamentalmente su éxito al trabajo (el 46%), los chicos lo atribuyen a la habilidad (el 43%). Esto es, mientras las chicas sólo se consideran buenas por un factor de esfuerzo personal, sin el cual nada tendrían que hacer en el área, los chicos manifiestan que tienen éxito en Matemáticas por su propia valía personal, porque es un área para el que tienen una habilidad especial. Aparece un factor de éxito sólo descrito por las chicas: el buen comportamiento. Pareciera como si las alumnas acostumbraran a ser premiadas (calificaciones, entre otras cosas) por ser modositas, con todas las connotaciones que presenta este premio por tal motivo: refuerzo de actitudes estereotipadamente femeninas, conformidad, poca iniciativa... En cuanto a los

factores a los que se les atribuye la causa del fracaso en Matemáticas, vemos como se invierte el razonamiento: mientras el 50% de los alumnos argumenta que fracasan en el área porque no trabajan, para el 64% de las chicas la razón fundamental de su fracaso en el área estriba en la falta de habilidad en el área. Observemos la simetría bilateral existente entre ambos factores. Esto es, los chicos son buenos en Matemáticas porque son hábiles en la materia, mientras las chicas lo son porque se esfuerzan. Los chicos son malos en la materia porque no trabajan, mientras las chicas lo son porque son poco hábiles.

Casos paradigmáticos son las respuestas de Raquel y Daniel. Raquel es una alumna brillante en Matemáticas, posiblemente la mejor del grupo. Raquel manifiesta que es buena en Matemáticas, y al desvelar las razones dice que es "porque estudio y se me dan un poco" (obsérvese el tono de disculpa que le ha de imprimir, estereotipadamente, una mujer a sus éxitos en un área tradicionalmente masculina). Daniel es un niño límite, de los que aparecen con frecuencia integrados en la EGB y que van pasando de curso por razones de edad. Tiene notorias dificultades para el trabajo en Matemáticas. Daniel se manifiesta malo en Matemáticas. Pero la razón que esgrime Daniel para su fracaso en el área es la falta de estudio.

Reforzando los datos obtenidos con estas respuestas de los alumnos y alumnas, el Informe Cockcroft en su página 78 dice:

"Diversas investigaciones indican que, así como los niños suelen atribuir su éxito en las matemáticas a su capacidad y el fracaso a la falta de esfuerzo o a la mala suerte, las niñas atribuyen el éxito a la buena suerte o al esfuerzo, y el fracaso a la falta de capacidad. Si esto es así, no viene sino a subrayar la necesidad de hacer cuanto sea posible para que las niñas adquieran confianza en su capacidad matemática. Se ha afirmado que se desenvuelven mejor en esta asignatura cuando se les enseña en grupos del mismo sexo..."

La falta de confianza de las niñas hacia el área se manifiesta por sus miedos. Las alumnas tienen miedo

a) Al no dominio efectivo del área como motivo de buenas notas, identificando el aprobado con la buena conducta (no sé lo suficiente, sólo podré aprobar si me porto bien)

b) A no responder las expectativas (generando una gran hiperresponsabilidad, que se traduce en estados anímicos de elevada ansiedad)

c) A hacer cosas que nunca ha hecho y que le salgan mal (miedo al ridículo, a fracasar, a no responder a las expectativas). De ahí la negativa, en general, de las niñas a conjeturar.

d) A la imposibilidad, por falta de tiempo o de espacio, de verbalizar sus procesos mentales en los exámenes (lo sé pero no lo puedo o no lo consigo explicar; o por no ser sintético, virtud poco desarrollada en las niñas, me va a faltar tiempo).

e) Miedo a las intervenciones orales (falta de seguridad personal y de costumbre de hacerse oír y ser oída en sus opiniones)

f) Miedo a no ver reflejados sus intereses en clase (el nunca suficientemente ponderado papel de los contextos), y, por consiguiente, a no poderse interesar en profundidad en los temas tratados en clase, con frecuencia ininteligibles por poco familiares.

g) Miedo a apartarse de la norma (a ser empollona, con los elementos negativos que connotan esto, como ya hemos visto, asumiendo el hecho de las matemáticas como terreno ajeno)

h) Consecuentemente al apartado anterior, miedo a la valoración de "él" y del grupo (Fallo del motivo de pertenencia)

i) Miedo a la valoración del/la profesor/a... (Fallo del motivo de afiliación)

En todo proceso de desarrollo de la autoestima parece incidir la adecuada sustentación de dos necesidades humanas, cuyo equilibrio se hace necesario: la necesidad afectiva y la necesidad de éxito. La necesidad afectiva se sustenta en dos pilares: el motivo de pertenencia (a un grupo o persona) y el motivo de afiliación (a ese mismo grupo o a una persona, mayor o no, de la que se aprenda y que ofrezca seguridad), que afianzan a la persona en tanto que satisfacen su necesidad de reconocimiento y de ser tenida en cuenta. La necesidad de éxito, a su vez, se sustenta en tres pilares: el motivo de ser el/la causante (autonomía para decidir y actuar), el motivo de autocontrol y competencia (de las propias decisiones autónomas) y el motivo del logro (satisfacción por la resolución exitosa de situaciones difíciles ante las que es posible tanto fracasar como tener éxito).

Este necesario equilibrio entre los dos factores que sustentan la autoestima está desplazado en las mujeres, como norma general, hacia el lado de las necesidades afectivas. Ante este hecho, la reflexión a hacer con las alumnas es cuál es el motivo. Desde la compensación de las inseguridades previas, generadas por la descompensación histórica del esquema, hasta la mayor facilidad de alcanzar la autoestima sobrevalorando este factor. El adiestramiento de las chicas en este sentido facilita el desplazamiento hacia lo afectivo. Es menos fácil, y por lo tanto exige un aprendizaje adecuado, el que las alumnas adquieran su autoestima cubriendo adecuadamente su necesidad de éxito. De un lado, hay que enseñarlas a ser causantes, promoviendo su autonomía, a controlar las mismas y a tomar decisiones ante problemas. Esto es muy difícil para ellas porque:

a) Supone un entrenamiento en actividades hasta el momento poco familiares

b) Trastocan la idea de éxito personal, sustituyendo el meramente afectivo por el de logros personales, más gratificante pero más arriesgado

c) Es más difícil actuar que dejarse dirigir

d) Exige, en muchas ocasiones, una toma de decisiones para escapar al control del grupo, que a veces desemboca en un desclasamiento contracultural, que puede generar problemas afectivos al descompensarlas momentáneamente hacia el lado de la necesidad de éxito.

Es en este último aspecto en el que hemos de dotarlas (y dotarnos) de mecanismos de autodefensa que puedan proteger su propia autoestima. Para ello, sugerimos el adiestramiento de las alumnas en técnicas de desarrollo de la asertividad, en su acepción de "firmeza pacífica; hacer valer, sin herir a los demás, el punto de vista propio".

El cultivo de la asertividad es, pues, una actividad interesante (no sólo para ser usado por las chicas, también las profesionales la necesitamos. Si no, preguntémosnos y a nuestras compañeras por el miedo a hablar en público y la necesidad de hacer intervenciones muy pensadas. Esta impresión de fracaso previo no suele tener correlato entre nuestros compañeros)

Así, y en la línea de la asertividad pacífica, se debe enseñar a las alumnas a usar

a) La "asertividad reactiva", esto es, saber decir que no. (En muchas ocasiones, la conformidad de las alumnas no reflejan su asentimiento ante un hecho, sino el miedo a dejar de pertenecer al grupo, o a perder la afiliación por mostrarse claramente en desacuerdo. El hacerlo sin violencia, pero con firmeza es un aprendizaje necesario y útil)

b) La "asertividad activa", esto es, saber pedir ayuda. (este tipo de conducta también es necesario aprenderlo. Pedir ayuda es el final de una serie de actividades mentales del proceso de toma de decisiones que también conviene aprender. Tener dificultades y saber/poder exponerlas indica la necesidad de seguir el proceso de ser el/la causante una vez solventada la dificultad y muestra un perfecto manejo del autocontrol de la autonomía)

c) La "asertividad expresiva", esto es, controlar la expresión de los propios sentimientos y manifestarlos ante los demás. Es interesante, en este aspecto, "desmitificar" las ideas preconcebidas que alumnos y profesores tienen del éxito de las chicas.

Este "miedo al éxito" que acompaña a la actividad escolar o profesional de las mujeres es estudiado por Leder y Gilah (1982) como un factor explicativo de las diferencias de rendimiento en Matemáticas, llegando a la conclusión de que "El éxito supone, por un lado, competición, y por otro, la idea aceptada socialmente de que el éxito profesional en las mujeres supone la renuncia al éxito afectivo".

Para acabar, creemos que es relevante reproducir una frase de Johann W. Goethe, que sintetiza de manera espectacular las acciones que propugnamos para que, desde la actividad docente, se establezcan los correctores necesarios para mejorar este estado de cosas:

" Trátemos a los demás como si ellos fueran lo que debieran ser y ayudémosles a convertirse en lo que son capaces de ser".

TABLA 1

TORNEO	PARTICIPANTES	CHICOS	CHICAS	% CHICOS	% CHICAS
PRIMERO	25	18	7	72,00	28,00
SEGUNDO	106	56	50	52,83	47,10
TERCERO	433	217	216	50,12	49,88
CUARTO	380	237	143	62,37	37,63
QUINTO	364	189	175	51,92	48,08
SEXTO	353	210	143	59,49	40,51
SEPTIMO	287	153	134	53,31	46,69

TORNEO	PARTICIPANTES	FINALISTAS	CHICOS	CHICAS	% CHICOS	% CHICAS
PRIMERO	25	4	3	1	75,00	25,00
SEGUNDO	106	3	2	1	66,67	33,33
TERCERO	433	16	11	5	68,75	31,25
CUARTO	380	15	12	3	80,00	20,00
QUINTO	364	14	11	3	78,57	21,43
SEXTO	353	16	10	6	62,50	37,50
SEPTIMO	287	15	8	7	53,33	46,67

ANEXO I

ANTONIO (15 AÑOS)

Tiene estas características:

- Es estimado por el profesorado y el alumnado.
- Es atractivo.
- Ha obtenido sobresaliente en: inglés, matemáticas, química, geografía y economía.
- Le interesa ayudar a la gente.
- Le gusta el colegio, pero ...
- Quiere ganar dinero pronto.

Poneos de acuerdo sobre:

- Lo que estará haciendo un año después de terminar sus estudios y a qué edad terminó éstos.
- Lo que estará haciendo a los treinta años.

ANEXO II

MARIA (15 AÑOS)

Tiene estas características:

- Es estimada por el profesorado y el alumnado.
- Es atractiva.
- Ha obtenido sobresaliente en: inglés, matemáticas, química, geografía y economía.
- Le interesa ayudar a la gente.
- Le gusta el colegio, pero ...
- Quiere ganar dinero pronto.

Poneos de acuerdo sobre:

- Lo que estará haciendo un año después de terminar sus estudios y a qué edad terminó éstos.
- Lo que estará haciendo a los treinta años.

ANEXO III

CARACTERISTICAS DE LA INFLUENCIA DEL DOCENTE EN EL APRENDIZAJE DE LOS ALUMNOS SEGUN BROUSSEAU.

EFFECTO PAPY (HALO)

Deslizamiento metacognitivo. Se introducen en el acto didáctico elementos que no se deben introducir.

EFFECTO TOPAZ

El profesor propone una tarea, el alumno o alumna no la sabe hacer; el profesor da pistas, el alumno o alumna no la sabe hacer y el profesor acaba por realizar la tarea.

EFFECTO JOURDAIN (El burgués gentilhomme)

Se le dice al alumno que ha hecho algo científico, cosa que él desconoce.

EFFECTO PIGMALION

Se proyectan nuestras expectativas y nuestra propia imagen como modelo para el alumno.

PROFESORADO DE E.G.B. (PORCENTAJE DE MUJERES)			
ETAPA	% TOTAL	% PUBLICO	% PRIVADO
PREESCOLAR	93,79	92,91	95,48
CICLO INICIAL	79,99	77,67	85,91
CICLO MEDIO	65,82	64,87	68,14
CICLO SUPERIOR	46,10	41,48	54,86
TOTAL E.G.B.	62,10	59,96	66,69

DISTRIBUCION DE PROFESORAS Y PROFESORES EN LOS CICLOS DE E.G.B.		
	TOTAL PROFESORAS	TOTAL PROFESORES
CICLO INICIAL	35.802 (32 %)	9.955 (13 %)
CICLO MEDIO	43.731 (39 %)	22.706 (32 %)
CICLO SUPERIOR	33.019 (29 %)	38.592 (55 %)

	Situación espacial	Habilidades psicomotoras	Memoria relacional	Finanzas
NIÑOS	74 %	5 %	2 %	5 %
NIÑAS	22 %	6 %	6 %	3 %

	Habilidad verbal	Reproducción rol	Investigación	Des. estrategias	Conocimientos
NIÑOS	2 %		7 %	1 %	2 %
NIÑAS	1 %	57 %	3 %	1 %	1 %

ANEXO VI

LA PREGUNTA

¿ Te consideras bueno/a o malo/a en matemáticas ?

¿ Por qué ?

	EXITO	FRACASO
NIÑOS	32 %	68 %
NIÑAS	34 %	66 %

FACTORES ATRIBUIDOS

EXITO

	TRABAJO	HABILIDAD	GUSTO POR AREA	BUEN COMPORTAMIENTO
NIÑOS	29 %	43 %	29 %	
NIÑAS	46 %	23 %	23 %	8 %

FRACASO

	FALTA TRABAJO	FALTA HABILIDAD	DIFICULTAD DEL AREA	MAL COMPORTAMIENTO
NIÑOS	50 %	10 %	37 %	3 %
NIÑAS	28 %	64 %		8 %

ANEXO VII

LAS CUESTIONES:

1. Juan ganó un premio en Matemáticas. Describe a Juan.
2. Ana ganó un premio en Matemáticas. Describe a Ana.

TIPOLOGIAS

	INTELIGENTE	LISTO/A	ATENCION	MEMORIA
JUAN	19 %	8 %	12 %	2 %
ANA	8 %	12 %	11 %	1 %

	TRABAJO	GUSTO AREA	MAL COMPORTAMIENTO	OTRAS CARACTERISTICAS
JUAN	22 %	4 %	13 %	20 %
ANA	23 %	2 %		43 %

OTRAS CARACTERISTICAS DE JUAN:

Simpático, empollón, *huraño*, paciente, *razonable*, educado, rápido, artista, feo, con gafas.

OTRAS CARACTERISTICAS DE ANA:

Simpática, empollona, paciente, educada, rápida, artista, *esmerada*, *limpia*, *presumida*, *soberbia*, *cariñosa*, *obediente*, *le gustan los exámenes*, fea (7 %), con gafas (7 %), *gordita* (4 %).

(La cursiva representa los valores cualitativos que aparecen sólo en uno de los dos. El resto aparece en ambos con distinta incidencia).

ANEXO VIII

CONTEXTO "MASCULINO"			CONTEXTO "FEMENINO"	
	CONTESTA	NO CONTESTA	CONTESTA	NO CONTESTA
NIÑOS	83 %	17 %	87 %	13 %
NIÑAS	78 %	22 %	89 %	11 %

CONTEXTO "NEUTRO"			CONTEXTO "INVENTADO"	
	CONTESTA	NO CONTESTA	CONTESTA	NO CONTESTA
NIÑOS	91 %	9 %	70 %	30 %
NIÑAS	89 %	11 %	70 %	30 %

BIBLIOGRAFIA

1. Citado por F. Maher y Ch. Rathbone en "La formación del profesorado y la teoría feminista: Algunas implicaciones prácticas". REVISTA DE EDUCACION Nº 290.
2. F. Maher y Ch. Rathbone. "La formación del profesorado y la teoría feminista: Algunas implicaciones prácticas". Revista de Educación Nº 290.
3. Campbell, Patricia B., "The computer revolution: Guess Who's Left Out?", *Interracial Books for Children Bulletin* 15 (N. 3, 1984), citado por Michael Apple en "Maestros y Textos: Una economía política de las relaciones de clase y sexo en educación". Editorial Paidós MEC, Barcelona 1989.
4. Michael Apple "Maestros y Textos: Una economía política de las relaciones de clase y sexo en educación". Editorial Paidós MEC, Barcelona 1989.
5. N.C.T.M., "Estándares curriculares y para la evaluación". S.A.E.M. "Thales".
6. Badger, M.E. (1985). "¿Por qué no son mejores las chicas en matemáticas?". Editorial Akal. Revista Educación y Sociedad Nº 2.

ACCESIBILIDAD DEL NIÑO CIEGO AL CONOCIMIENTO MATEMATICO

*Dolores Carmen Polo Serrano, Profesora de E.G.B. y Psicóloga del C. Luis
Braille de Sevilla*

INTRODUCION

Tomando como punto de partida de este trabajo una sencilla definición, "las matemáticas son el medir, el contar y el pesar", cabe formularse, como simple hipótesis en aras de nuestros propósitos, la siguiente interrogante: ¿son accesibles las matemáticas al niño ciego? La respuesta de la experiencia es tajante e irrefutable: sí. No obstante, para la comprensión exacta de la cuestión planteada, a la sencilla definición apuntada más arriba, hemos de confrontar la descripción, menos simplista sin duda, de lo que la realidad nos presenta como niño ciego. Ello nos conducirá, por complejos caminos no carentes de engañosas encrucijadas, a una visión más amplia y fidedigna del problema abordado en esta ponencia.

Cuando hablamos de "niño ciego" no nos referimos a un sujeto marcado en todos los casos por idénticas características inmutables y universales. Muy por el contrario, englobamos en este término a una heterogénea clase de individuos que posee un rasgo de distinción significativo: la pérdida total o parcial del sentido de la vista. Si admitimos que el setenta por ciento de la información dimanante de su entorno la recibe el ser humano mediante la visión, concluiremos, sin necesidad de apelar a otras consideraciones, que la afectación o la ausencia de este canal privilegiado supone un handicap considerablemente restrictivo, a priori podría pensarse que incapacitante, para las potencialidades naturales del individuo. Pero de lo anteriormente expuesto pueden deducirse de inmediato una serie de variables diferenciadoras que incidirán de manera decisiva en el tratamiento de cada caso. Por resaltar la evidente diversidad a la que nos enfrentamos, señalaremos a modo de ejemplo tres puntos extremos, pero típicos, de la gama de discapacidades visuales que encontramos a nuestro alrededor: niño ciego total de nacimiento (carente por tanto de toda experiencia visual); niño al que le sobreviene la ceguera total posterior al nacimiento (capaz de tener imágenes visuales dependiendo de la edad a la que contrajo la deficiencia); niño con resto visual (entendiendo que sus limitaciones serán menos graves en relación al mayor o menor residuo visual que posea). Prolijo resultaría, y nos alejaría indefectiblemente del objeto de esta ponencia, analizar con detalle la extensa casuística derivada de estos simpares grados de deficiencia, pero el fundamento teórico de esta introducción nos exige describir, aunque sea de forma muy somera, aquellos condicionantes que bien pudiéramos llamar

"factores de riesgo" que conlleva la ceguera. Estos factores de riesgo pueden aplicarse, generalizando en exceso tal vez y conviniendo en su carácter no profético, al niño ciego total de nacimiento, al de ceguera adquirida a corta edad y a los que mantienen un escaso resto visual.

A fin de comprender mejor las consecuencias que para el desarrollo evolutivo del deficiente visual comporta la ausencia de visión y justificar la intervención en el terreno pedagógico, presentamos los efectos de la deficiencia en dos dimensiones: consecuencias derivadas directamente de la deficiencia visual y las derivadas de un discriminado trato familiar y social. De entre las primeras destacan, la reducción en el caudal de información (debiéndose suplir la fácil accesibilidad de la realidad por medio de la vista, por otros caminos, el tacto y el oído fundamentalmente); la facultad del medio ambiente como generador de respuestas (provocando que la cantidad de estímulos sea casi inexistente y, por ello, se agudice el retardo en la adquisición de conductas tales como la prensión y la marcha); el aprendizaje observacional (produciendo una nula capacidad imitadora); y por último, la función integradora de la experiencia (faltas de referencias para asimilar el concepto de espacio y del lugar que ocupa en el mismo). De la segunda dimensión, familiar y social, sobresalen con especial importancia: la dificultad para el establecimiento de vínculos humanos, la posible inadecuada actitud familiar (sometida a un reto inesperado) y el posible inadecuado ambiente educativo.

Preciso es indicar, antes de concluir estas líneas, que los factores de riesgo citados en el párrafo anterior no actúan por igual en todos los sujetos, dándose entre los niños ciegos similares diferencias de desarrollo, que puedan encontrarse entre los videntes.

1. ETAPAS DEL DESARROLLO EVOLUTIVO EN EL NIÑO CIEGO

Contempladas estas posibles consecuencias de la ceguera en un orden evolutivo, nos encontramos ante un perfil de desarrollo que fácilmente se ajustará a los hitos y peculiaridades que ahora se señalan. En su exposición, y por el mejor ensamble al enfoque educativo, tomaremos como referencia el marco piagetiano y su descripción del desarrollo cognitivo.

a: Período sensoriomotor (de 0 a 2 años). Reconocida la apoyatura que exige la organización cognitiva de este período sobre la percepción y manipulación de los objetos para la elaboración de los primeros esquemas perceptivos y de acción, no nos será difícil entender las vicisitudes que en tal sentido atravesará el bebé ciego. Dificultades que se harán notar por el retraso, a veces superior a un año, en la manifestación de la ansiedad ante el extraño y el logro de la conservación del objeto. El sonido no confiere a los objetos la sustancialidad que son capaces de transmitirnos cuando los percibimos visualmente; ello hace que se retrase sensiblemente la

coordinación oído-mano. Lo que provocará retardo en la prensión, que unido a las dificultades apuntadas más arriba para el logro de marcha independiente y el establecimiento del diálogo con quienes le rodean, podrá afectar seriamente al desarrollo del pequeño, si no le ayudamos a encontrar las estrategias adecuadas para su adquisición.

b: Período preoperacional (2 a 6 años). Como una prolongación de la situación anterior que afectaba básicamente a la familiarización con los objetos y a la movilidad, ahora el proceso evolutivo se verá alterado en las imitaciones directa y diferenciada, la elaboración de imágenes mentales, la expansión del lenguaje, el juego simbólico... Destacamos la repercusión de un distorsionado desarrollo psicomotor en la construcción de la imagen corporal y la noción del espacio. Como consecuencia de conductas motrices inadecuadas son frecuentes comportamientos: desconocimiento de segmentos corporales -los niños ciegos, muchas veces representan con plastilina el cuerpo humano con orejas y manos agrandadas, extremidades excesivamente largas y cabeza y tronco desproporcionados- de planos del cuerpo y de su relación con superficies y objetos, deficiencias en la marcha -piernas en exceso separadas, tacción del suelo por los pies-, deficiente equilibrio y coordinación dinámica general, alteraciones posturales; frecuente hipotonía muscular, blindismos. Acerca de la expansión del lenguaje y el importantísimo papel que juega en el desarrollo de las funciones mentales superiores -análisis, generalización, atención..., queremos destacar aquí la extraordinaria trascendencia que ello va a tener para el niño ciego tan limitado en los demás soportes del desarrollo cognitivo. Sin embargo, al asistir a la expansión del lenguaje del niño ciego, también podemos apreciar el riesgo de caer en el abuso del verbalismo. Su reducida experiencia de la realidad y las limitaciones perspectivas, le obligan a hablar de cosas de las que muchas veces no conoce más que su nombre; verbalismo que, aunque frecuente entre la población ciega, establecerá una correlación negativa o inversa con el C.I., la edad y el ajuste al medio, definido este ajuste en términos de madurez personal e interés y conocimiento del entorno. Por su interés pedagógico, al final de este período, señalamos que, el niño deficiente visual, para la adquisición de los conceptos básicos presentará algunas diferencias en comparación con sus iguales videntes. Así, adquirirá al mismo tiempo que ellos, los conceptos que tienen un valor absoluto -otro, nunca, siempre, igual- y con retraso los que representan valores relativos -medio, a través, mitad, doble, algunos, muchos, alrededor, el más lejano, sobre, el más ancho y entre-.

c: Período de las operaciones concretas (6 a 12 años). Definido en su naturaleza el carácter de este período por la exigencia que tiene el sujeto de apoyar sus operaciones lógicas en los objetos reales o sus representaciones figurativas, de suyo se seguirá a estos efectos la importancia de los procesos perceptivos y la construcción de imágenes mentales para la adquisición de

dicha lógica operatoria. Siguiendo, a este respecto los estudios de Rosa Ribero sobre las operaciones de seriación y conservación y la construcción de imágenes mentales en niños ciegos totales de nacimiento, constatamos nuevamente el retraso de estos sujetos en su adquisición. Tal retraso afectará al logro de las primeras coordinaciones, pero se recuperará posteriormente, nivelándose la ejecución de estas pruebas al final del período entre los niños ciegos y los dotados de visión. Idéntica posición podemos describir respecto de la construcción del espacio, la noción del espacio en su dimensión topológica es adquirida por el niño deficiente visual sin retraso en comparación con sus compañeros videntes. Sin embargo, el espacio, en sus dimensiones proyectivas y euclidiana, presenta dificultades para su construcción en el deficiente visual en este período, en tanto requiere la representación de los objetos y su ubicación, y en cuanto exige una amplia experiencia táctil y un desarrollo de la movilidad que no es frecuente en los niños ciegos de esta edad.

d: Período de las operaciones formales. Habiéndose alcanzado ya, hacia el final del período anterior, la equiparación entre los niveles de desarrollo cognitivo de los niños nacidos ciegos y videntes, serán en lo sucesivo idénticas sus posibilidades achacándose las diferencias que puedan darse, no a los efectos de la ceguera, sino a las capacidades y circunstancias personales de cada sujeto. La experiencia, trabajosamente acumulada y, sobre todo, creemos, la posesión del lenguaje en todas sus posibilidades, permiten al niño ciego, tras la carrera de obstáculos que se ha descrito, alcanzar la meta de un completo desarrollo cognitivo en iguales condiciones a la de sus pares sin tara. La relación entre pensamiento y lenguaje, insistimos, es para nosotros la clave de este milagro, aunque ello no debe minimizar ni en un ápice la importancia del papel que, en orden al desarrollo cognitivo, juegan los restantes factores del aprendizaje. No obstante, y como ya se indicó en puntos anteriores, podemos afirmar que, las alteraciones del desarrollo que se han descrito, no se presentarán necesariamente en todos los sujetos deficientes visuales, sino que serán producto de un inadecuado tratamiento educativo de los mismos, sobretudo, en los primeros estadios de su desarrollo. Por todo ello, denunciamos la importancia que tiene en todo el proceso la "atención temprana". De cualquier manera, hemos de congratularnos, pues afortunadamente, la detección de casos con este tipo de deficiencias se viene haciendo cada vez a más cortas edades, lo que favorece una mejor integración en todo el proceso educativo.

2. CONTENIDOS Y METODOLOGIA

Cuando comenzábamos esta ponencia lo hacíamos con una pregunta, "¿puede el niño ciego acceder al conocimiento matemático?", que

respondíamos sin dilación de manera afirmativa, "sí"; no obstante, ese "sí" aún no ha sido corroborado con pruebas. Es más, se diría que, tras analizar las dificultades con que se encuentra el niño ciego en su desarrollo evolutivo, nos estamos acercando más a una respuesta negativa que a la rotundidad de nuestro convencimiento inicial. Las apariencias, como casi siempre -el ciego sufre con frecuencia este axioma popular- engañan. Abriremos, pues, este apartado con otra pregunta, que, como aquélla, genera una respuesta diáfana y sin paliativos: ¿contempladas las dificultades señaladas en el desarrollo cognitivo del niño ciego, deben modificarse los contenidos matemáticos a impartir según establecen los programas escolares de dicha área? En absoluto, y para mayor abundamiento, sostenemos que cualquier cambio en este sentido sería de todo punto contraproducente. Entonces, si los contenidos son los mismos, pero existen diferencias en el desarrollo, ¿dónde han de producirse las adaptaciones significativas? En la metodología, o sea, en la manera con que esos contenidos llegan al alumno ciego; los medios, las estrategias de actuación, los recursos o materiales específicos... Este conjunto de cosas hará que los conceptos matemáticos sean alcanzados en cada momento de su formación, a lo largo de todo el proceso educativo. Así, y a modo de ejemplo, cuando en el ciclo inicial (primer ciclo de Educación Primaria ahora) se ha de explicar la suma, se tendrá siempre presente la utilización de objetos conocidos, accesibles y manipulables por el chico (5 bolas más 3 bolas, 4 monedas más 2 monedas, etc.), procurando que posean la cualidad de que "quepan en su mano". Y, ¿esto por qué? La mano, el que el niño ciego abarque el objeto o los objetos con ella, sustituye, como ya se ha indicado, a la visión en su aspecto globalizador.

A la hora de poner en práctica esa metodología, "algo diferente", queremos analizar tres factores del aprendizaje que, a todas luces, inciden de manera decisiva en la adquisición de todo concepto y en particular, del matemático. Estos son: —Motivación; —Lenguaje; —Memoria.

a: Motivación:

Dada la complejidad de la materia a estudiar (las matemáticas siempre han sido vistas como algo que termina siendo bastante árido o difícil de comprender para todo niño), se hace imprescindible que el sujeto, en nuestro caso el niño ciego, se halle suficientemente motivado; así cabe destacar (aquí no existen diferencias con sus iguales con resto visual) que el interés del niño depende del ambiente sociocultural que le rodea. Así, a modo de ejemplo, las actividades, los problemas que se le empiezan a plantear han de ir relacionados con la experiencia previa del niño, con objetos, que él ha visto, ha percibido con sus manos, de los que conoce muchas características.. en definitiva, le son familiares; por ello, en esos problemas hablaremos de "pollos", "gallinas", etc., a niños provenientes de estratos sociales de origen

rural, mientras que trataremos de coches o motos con niños de zona urbana. Pero en infinidad de ocasiones nos encontramos con que el niño ciego, a causa del trato "especial" recibido, se halla muy poco estimulado, desconociendo gran parte de las cosas de su entorno familiar normal; en estos casos, hemos de proporcionarle esa información que de los objetos le falta. De este modo, ha de promoverse el juego y todas aquellas experiencias que le acerquen a la realidad que les rodea, a su mundo próximo. El niño ha de moverse y de tocar cuanto esté a su alcance. El maestro juega aquí un papel fundamental, ya que va a ser el intermediario entre esa realidad y el pequeño... (—Mira esta pelota. ¿Cómo es? ¿Grande? Pequeña? ¿Redonda?). Del mismo modo, y seguimos insistiendo en ello, se ha de lograr que tenga una gran destreza manipulativa: debe fijarse en cada detalle, en cada rasgo diferenciador. Fomentar su curiosidad se erigirá en reto prioritario del maestro. El niño ciego debe investigar, ir más allá, romper las fronteras que le impone su deficiencia.

b: El lenguaje:

La indudable importancia del lenguaje en la adquisición de conceptos, se multiplica, nunca mejor dicho, en el caso de las matemáticas: podríamos decir, sin temor a equivocarnos, que los niños no resuelven problemas matemáticos sencillos porque son incapaces de interpretar y comprender las palabras de sus enunciados. En los primeros estadios del aprendizaje encontramos con frecuencia una lectura deficiente (factor que se agrava en el niño ciego por la dificultad añadida del sistema Braille). En estos momentos, la pizarra se alza como un instrumento imprescindible: el maestro dibuja, muestra, suple la carencia de lectura. Pero esto, obvio en el caso del alumno vidente, no vale en el del alumno ciego: él no ve la pizarra. Deberá entonces el maestro trasladarle mediante el lenguaje oral cuantos datos y orientaciones le sean necesarias para la comprensión total del problema.

c: Memoria:

Pese a las nuevas líneas pedagógicas en que parece que la memoria no tiene un desarrollo claro, para todo el proceso matemático, tanto en el aprendizaje de términos, como en el sentido de crear hábitos matemáticos, resulta de una capital importancia sobre todo para el niño con residuo visual escaso o nulo. Por ello, se llevarán a cabo, a lo largo de toda la enseñanza primaria y secundaria gran cantidad de actividades que favorezcan la potenciación de esta "capacidad intelectual", ligada a tantas propiedades y leyes matemáticas, sin cuyo conocimiento resulta difícilísimo llegar a la correcta resolución de problemas.

Por lo que se refiere a los métodos, propiamente matemáticos, a emplear, hemos de señalar que no se diferencian sustancialmente en su secuenciación,

con respecto a su aplicación en el niño vidente. Quizás, por las razones que se adujeron antes, se comienza con un método que, si bien no puede calificarse de matemático o científico, nos es de gran ayuda para la comprensión de muchos conceptos, en especial en el área de geometría, al que denominaremos "de construcciones". Al niño se le da un modelo, un cuadrado, un cubo, una esfera y se le pide que lo haga en plastilina, por ejemplo; cuando logre terminar la tarea con éxito, se le indica que eso que él ha conseguido tiene un nombre. Y así, con todo aquello que el niño pueda fabricar por sí mismo. Con esto, además de que se alcanza una buena asimilación de conceptos, acercamos al niño a la realidad y conseguimos que desarrolle una óptima destreza manipulativa. De cualquier manera, la diferencia de la metodología en relación a la empleada con el niño vidente no debemos buscarla en el método a utilizar (inductivo o deductivo), pues estos no cambian; dichas diferencias se hallan fundamentalmente en la gran cantidad de estrategias de actuación, en los recursos humanos y de material... En definitiva, en la didáctica, en cada caso, aritmética o geometría que hemos de aplicar en cada etapa evolutiva y de conocimiento, teniendo muy claro qué debe conocer, qué debe percibir, para que los contenidos sean asimilados en todo momento. Y aquí, el material juega un papel primordial, como ya se ha dicho y se explicará extensamente en el apartado siguiente. El niño debe manejar gran cantidad de material natural, así como debe ayudar a su confección.

3. DIDACTICA DE LA ARITMETICA Y DE LA GEOMETRIA

3.1. DIDACTICA DE LA ARITMETICA:

Para la idea de número se utilizarán primero objetos reales; a continuación se empleará la regleta Mottessori y el ábaco real (el de madera que está adaptado), utensilios estos muy válidos para lo que se denominan prematemáticas. Con el ábaco real se trabaja la noción de número y el contar de la manera siguiente: manejando sólo el cajón de las unidades, donde cada ficha vale uno, se hace al niño que meta una ficha en ese cajoncito y, al mismo tiempo se le pide que escriba 1 en Braille, y así, hasta que haya introducido nueve y haya escrito todas las cifras. Quiere esto decir, que se combina la automatización del concepto con la lectura y la escritura en Braille. Cuando queramos enseñarle la idea de decena, habrá de introducir una ficha más en el cajón de las unidades y entonces le diremos que esas diez valen lo mismo que una en el cajón de las decenas. Lo mismo haremos para las centenas. Similar procedimiento se puede seguir con la regleta Montessori y con ambos instrumentos se pueden realizar operaciones de suma, restas sencillas con niños pequeños. En adelante, se puede llegar a operaciones de mayor complejidad, sobre todo con el ábaco.

Las ideas de suma y resta se aprenden primero con objetos manipulables, con el fin de aprender las cantidades homogéneas y después con los dos instrumentos indicados.

Para la confección de tablas de multiplicar basta con la máquina perkins o simplemente se ejecutan sobre la caja de aritmética, donde las operaciones se colocan igual que se hacen en tinta, si bien los números están en Braille, igual que los signos.

Cálculo operatorio:

Haremos la división del mismo en ciclos. Primer ciclo: se utilizará la caja de matemáticas por considerar que: desarrolla la manipulación, la orientación, el sentido de orden y la permanencia de los datos. Segundo ciclo: para los alumnos cuyas destrezas no estén bien conseguidas se debe continuar el cálculo operatorio con el mismo instrumento que antes; en cambio, para aquellos alumnos que demuestren una habilidad suficiente, se ha de proseguir con el ábaco japonés (soroba). Esto, siempre que se reúnan los requisitos de: buena manipulación, asimilación del concepto y soltura en el sistema Braille. Con este aparato se consigue una considerable rapidez en el cálculo sin errores significativos de ningún tipo.

A partir de la enseñanza secundaria, y en consonancia con las nuevas líneas marcadas por la LOGSE, recomendamos la introducción de la calculadora, bien en Braille, bien parlante. No obstante, ha de instruirse al alumno de cómo, dónde y cuándo ha de utilizarla. Por otra parte, y ya para todos los ciclos, conviene reseñar que, desde el principio hasta el final del proceso de adquisición de conceptos matemáticos, debe fijarse como prioridad absoluta la práctica continua y variada de ejercicios de cálculo mental. Para ello se enseñarán al alumno estrategias de cálculo tales como: composición-descomposición, simplificación, propiedades de las operaciones, etc. Estas estrategias que son sencillas, se aprenden poco a poco con números pequeños, resultan de gran utilidad, sobre todo, para el niño ciego, cuya memoria y habilidades mentales se deben fomentar y desarrollar.

3.2. DIDACTICA DE LA GEOMETRIA

Insistimos en que es de capital importancia el hecho de que el niño ciego posea una buena manipulación de objetos; manipulando objetos él sabe cómo están constituidos y puede llegar a saber cómo se hace su descomposición. Y empezamos, como se ha dicho, con objetos que quepan en su mano (se recuerda que este requisito le dota de la idea de globalidad, como la vista al vidente).

Los conceptos espaciales requieren de mucho movimiento por parte del alumno: recorriendo lugares para adquirir la idea de distancia, tocar líneas para comprender el concepto "una dimensión", (longitud), tocar planos para

captar las dos dimensiones (una loseta, una hoja de papel, la superficie de su mesa), o tocar cuerpos geométricos para abarcar las tres dimensiones (bien mediante la caja de cuerpos, u objetos a su alcance como libros, cajas de zapatos y otros). No renunciaremos a recalcar la importancia en la manipulación de objetos convencionales de enseñanza, tales como puzzles, elementos insartables, clasificación de figuras según el tamaño, forma, rugosidad (esta característica como sustitutiva del color). Con este tipo de material logramos, no sólo que el niño adquiera el concepto matemático, principal objetivo del profesor de matemáticas, sino que se entrene en la sicomotricidad fina y una buena orientación espacial, tan básica a lo largo de toda la vida del ciego. Así mismo, hemos de situar en un lugar preponderante al dibujo en la enseñanza de la geometría y, a ser posible, realizado por el propio alumno. Para ello contamos con dos métodos diferentes en su ejecución, pero complementarios en su utilización:

Dibujo negativo: se realiza sobre un material muy sencillo que consiste en un tablero recubierto de paño, sobre el que el niño coloca la hoja de papel grueso y dibuja con un compás, obteniendo relieve negativo (el dibujo sale hacia abajo); se trata de un dibujo lineal y que, salvo que se provoque, es de trazo continuo; es un dibujo preciso, pero que exige una gran habilidad por parte del alumno. b: Dibujo positivo: se realiza sobre papel plastificado y sobre un tablero de goca, donde el niño dibuja con un simple punzón, bolígrafo o compás normal al que una de las puntas se ha hecho roma; el dibujo sale hacia arriba y el niño lo puede observar al mismo tiempo que lo va ejecutando; es menos preciso que el anterior, pero por su mejor ajuste a la realidad es el que pensamos se debe utilizar como material habitual en el aula.

Cuando se planteen problemas de geometría, el niño ha de dibujar todas y cuantas figuras o formas geométricas se traten o aparezcan en el problema, y esto antes de acometer la resolución del mismo. En caso de que no pueda dibujarlas solo, el profesor le ayudará en tal cometido, o si realmente es incapaz de hacerlo, se le presentarán dibujadas, igual que ocurre en los textos para niños con visión normal. Dentro de los problemas de geometría del espacio, podemos afirmar que existe gran dificultad, sobre todo para el niño ciego de nacimiento, para comprender las líneas interiores de un cuerpo (diagonales de un cubo, diámetro de una esfera); para salvar estos escollos se utilizan cuerpos geométricos huecos (existen en el mercado); así, mediante cuerdas, gomas, se pueden trazar esas líneas interiores de manera que el niño pueda tocarlas sin ninguna complicación.

4. MATERIAL

Mucho se ha hablado durante este trabajo sobre la enorme importancia del material en la enseñanza de las matemáticas para el niño ciego. Incluso,

ha podido inferirse en ocasiones -y ello no se aleja demasiado de la realidad- que en él radican las verdaderas diferencias didácticas o metodológicas. Siendo cautos en este sentido, y no cayendo en simplificaciones que pueden conducirnos a error, sí convendremos que este aspecto, el material, merece un apartado exclusivo para su tratamiento.

El material utilizado en este área podría dividirse en cuatro clases: el confeccionado por el maestro o los alumnos en el propio aula; el adaptado de aquel que puede hallarse en el mercado; el que propiamente se adquiere en el mercado y no necesita adaptación; y el específico para ciegos.

a: El confeccionado por el profesor o los alumnos en el aula:

El aula, como centro vivo de experimentación, ha generado una serie de material muy diverso. Por una parte se cuenta con el fungible que día a día realizan alumnos y profesores, y que en todos los casos tiene una utilidad limitada: figuras hechas de plastilina, formas recortadas en papel o cartón, esquemas, tablas, etc.. Por otro lado, la investigación cotidiana del maestro ha contribuido a la elaboración de materiales permanentes y de gran validez: metro cuadrado, varillas de triangulación, teorema de Pitágoras...

b: Material adaptado procedente del mercado:

Valiéndose del ingente material que puede encontrarse en cualquier casa dedicada a material didáctico, tanto los maestros de manera individual, como los equipos de producción de los centros de la ONCE, han adaptado diferentes instrumentos. Citaremos a modo de ejemplos, y dada su importancia: el ábaco real, el ábaco japonés, la regleta Montessori, los bloques lógicos, entre otros.

c: Material que se adquiere en el mercado y no necesita adaptación:

En contra de lo que se pueda creer en un principio, es muy abundante el material que podemos encontrar en el mercado y que no necesita adaptación alguna. Señalamos: caja de cuerpos geométricos, juego de bases (10 y 3), etc.

d: Material específico:

En su obligación de facilitar el aprendizaje de las matemáticas al niño ciego, la ONCE ha incorporado una serie de material, bien de propia creación, bien exportado de otras instituciones extranjeras: máquina Perkins, caja de aritmética, calculadoras (parlantes o en Braille), etc.

Para finalizar este punto y el trabajo, relacionamos a continuación una somera lista del material más empleado en la enseñanza de ciegos.

- 1.- Regleta Montessori (para contar y sumar).
- 2.- Colorines con gomillas (para geometría).

- 3.- Bloques lógicos y clasificador.
- 4.- Abaco de madera.
- 5.- Bases.
- 6.- Caja de aritmética.
- 7.- Soroba.
- 8.- Perkins.
- 9.- Caja de cuerpos geométricos. 10.- Calculadora Braille.
- 11.- Pizarra de dibujo positivo.
- 12.- Tablero de dibujo negativo.
- 13.- Metro lineal, regla graduada, transportador de ángulos.
- 14.- Metro cuadrado.
- 15.- Metro cúbico.
- 16.- Varillas, rombo, triángulo y ángulo.
- 17.- Triangulación.
- 18.- Medidas de capacidad.
- 19.- Teorema de Pitágoras.
- 20.- Ordenador vista y línea Braille.

LOS LENGUAJES GRAFICOS-GEOMETRICOS Y EL ALUMNO CIEGO

*José Enrique Fernández del Campo, Profesor del Centro de Recursos
Educativos de la ONCE de Madrid*

1. EL LENGUAJE GRAFICO-GEOMETRICO. HISTORIA

Antes de abordar el problema concreto que da título a esta exposición, convendrá una aproximación, por somera que sea, a la generación y motivaciones de esta forma de comunicación didáctica, en sus aspectos generales, sus finalidades y características.

Los más claros vestigios del empleo del dibujo y la representación gráfica -no la escritura de la lengua, ni la simbólica, en sentido estricto- de conceptos y situaciones matemáticas, los encontramos de forma fehaciente en el entorno griego. No significa esto que en ámbitos culturales diversos no se hiciera anteriormente un empleo de tales representaciones con fines pedagógicos: pero las noticias que nos llegan, o son aisladas y ocasionales, o más bien parecen restringirse a usos técnicos por parte de especialistas. Pero fueron sin duda los **"maestros"** de la cultura helenista -en sentido amplio- quienes se servirán de la representación, sobre todo geométrica, como vehículo de transmisión de conceptos, soporte del razonamiento e instrumento facilitador de aprendizaje por los alumnos: Si no fueron los primeros en emplearlo, sí lo serían en generalizarlo, unificarlo -en alguna medida- y fijar implícitamente algunas **"reglas"** y/o funciones de su sistema. Buena cuenta de ello encontramos desde Tales y Pitágoras a Euclides y Ptolomeo.

La Geometría, como **"esquemmatización"** -primera abstracción- de la realidad física, llevó la mejor parte, por no decir la única. Esta realidad se restringiría a formas o aspectos de cuerpos y edificios o terrenos, posiciones y movimientos; en suma, de lo directamente observable, estática o dinámicamente.

Más Arquímedes iba a dar un paso decisivo: la representación vectorial de las fuerzas, y, con ellas, de los fenómenos mecánicos; de otra parte, aplicaría los métodos geométricos a los fenómenos ópticos. La originalidad era notable: se adoptaba un convenio, capaz de presentar en forma visible causas invisibles de los hechos visibles.

Sin detenernos en análisis de razones históricas, deberemos avanzar hasta el siglo XVII, hasta encontrar a Fermat, quien -retomando las ideas de Apolonio en su estudio sobre las cónicas, y siguiendo la línea algebraizante emprendida por Vieta- sentaría las bases de conexión entre Geometría y Álgebra, entre propiedades geométricas y cálculo de magnitudes. Establecería un primer sistema de representación geométrica mediante **"coordenadas"**

de ciertas expresiones algebraicas, éstas aún rudimentarias. Tal vez sin saberlo, **"inventaba"** una forma de representar relaciones abstractas en forma visible bidimensional. El camino quedaría expedito para que Descartes simplificara el sistema mediante la introducción de referencias ortogonales, y se difundiera al amparo de su prestigio -incluso internacional-. Estos nuevos convencionalismos permitirían, en su visualización, hacer más fácilmente comprensible realidades matemáticas abstractas expresivas de relaciones entre magnitudes mensurables de cualquier tipo, mediando la formulación algebraica: se convenía una representación, asequible a muchos, de lo abstracto, difícil para casi todos.

Se atribuye a Euler, en el siglo XVIII, una forma convencional muy simple de representar relaciones lógicas, universalidad de conceptos separación y conjunción, mediante curvas cerradas, puntos y símbolos del lenguaje ordinario. No quedaría restringida esta representación al ámbito de la Lógica: la eclosión de la Teoría de Conjuntos en el siglo XIX, y el esfuerzo -a veces obsesivo- por estrechar lazos entre Matemática y Lógica, permitirían a Venn servir de aquellos diagramas de Euler para representar hechos conjuntistas.

Los **"diagramas de Venn"** tenían una intención declaradamente didáctica y los resultados serían espectaculares: lo que en lenguaje o forma simbólica -pura- era farragoso y atrabiliario, resultaba sencillo y expresivo en grado sumo; por ende, el sistema contenía posibilidades matemáticas impensadas: no sólo "representaban" conceptos y relaciones abstractas, facilitando su comprensión, sino que permitían el propio razonamiento deductivo a partir de la mera interpretación de la manipulación gráfica. Pero hay más: los "diagramas de Venn" son un convenio en sí mismos; la representación pasa a tomar un significado relativo, como veremos más abajo, son elementos de un lenguaje. Ya sea con Euler, ya con Venn, había aparecido un nuevo dominio de representación para la Matemática, semejante al de las representaciones geométricas.

No pasaría mucho tiempo antes de que se intentara transplantar a la Matemática el concepto lógico de implicación, generando su símbolo la **"flecha"**. Fuera como representación de prelación u orden entre objetos de un todo -Hasse-, fuera como expresión de relaciones entre objetos de clases diferentes en correspondencias, las "flechas", representativas de pares ordenados, florecieron por doquier. Su significado podía ser distinto según el dominio, el autor, el capítulo de la obra, según el momento del discurso. Se subrayaba el carácter convencional y local de una representación gráfica en Didáctica de la Matemática.

Aún consideraría una última aportación: la consideración del color, hecha por Papy, desde finales de los años cincuenta. El color permitirá simplificar en algunos casos las representaciones por "diagramas de Venn" y **"diagramas de flechas"**, pudiendo evitarse aditivos simbólicos de designación o reconocimiento; e introduce un estímulo motivante en el quehacer didáctico,

sobre todo útil en niveles más elementales de la enseñanza. En algunos casos -Topología del plano-, alcanzará valor sustantivo.

2. SUS CARACTERISTICAS

Puede así vislumbrarse cómo, a lo largo de no mucho más de veinticinco siglos, la representación gráfico-geométrica en Matemática ha ido adquiriendo y profundizando los rasgos de lo que llamamos **"lenguaje"**, con todas sus consecuencias. No es momento éste para extenderse en las características definitorias de "lenguaje", sus **"elementos"** y **"estructura"**; bástenos el concepto de "sistema de signos que sirve para comunicar y expresar ideas".

Los "signos" del lenguaje gráfico-geométrico de la Matemática no aparecieron como hemos visto, de forma espontánea, universal, simultánea y repentina; hicieron falta esfuerzo inventivo, no pocas veces genialidad, pulimento, difusión; y así es también como siguen hoy produciéndose e implantándose. Los signos del lenguaje gráfico son fruto de convenciones, inventadas y propuestas por alguien en un momento determinado, y aceptadas después paulatina o rápidamente por otros, como medio o instrumento facilitador de la comunicación de ideas matemáticas.

Lo que entendemos por "signo" es un "instrumento" que está por una idea, un concepto, con los cuales el signo mismo no coincide; un instrumento que EVOCA en particular un concepto en virtud de una "convención" y de acuerdo con una tradición determinada. Pero que no tiene con el concepto evocado ninguna relación de causa a efecto o viceversa. Ni siquiera las representaciones geométricas euclídeas vulneran este aserto, mas que pese a los miembros de las escuelas psicologistas. Una representación de "círculo" -significante-, no es un **"círculo matemático"** -significado-: ni el más hábil de los dibujantes con el compás más delicado sería capaz de conseguirlo, como tampoco la Naturaleza nos proporciona **"círculo perfecto"** alguno; pero quien lo dibuja "realiza" esa idea matemática de "círculo", y así la percibe también el receptor -merced a la convención explícita del lenguaje natural, o implícita del contexto-. "El signo lingüístico" -para nosotros: una representación gráfico-geométrica concreta- **"es síntoma"** como expresión del hablante, es decir, en cuanto manifiesta algo acerca de quien lo produce; es "señal" en relación con el oyente, o sea, con su receptor; y es "símbolo" en relación con su significado "real", es decir, en cuanto designa a través de un concepto (o desde el punto de vista psicológico, a través de una **"imagen"**) algo que pertenece a una realidad que es -o por lo menos se considera- independiente tanto del hablante como del oyente" -tanto del **"dibujante"** como del **"espectador"**-.

Estas últimas palabras pertenecen a E. Coseriu, quien, a propósito del

"habla natural", levanta una teoría -revisión aristotélica de las diversas escuelas estructuralistas-, que me permite trasladar esencialmente a la consideración de esta nuestra modalidad de lenguaje, sin detenerme en distinciones -ciertamente necesarias-.

En forma concreta, no existen "lenguas", sino sólo "actos lingüísticos" de expresión y comunicación, distintos de un individuo a otro y distintos también en el mismo individuo, según las circunstancias. Ningún signo lingüístico tiene exactamente la misma forma y el mismo valor (significado) para todos los individuos que lo emplean ni en todos los momentos en que se emplea. En el lenguaje existe identidad entre intuición y expresión, pues cada individuo que habla expresa íntegramente -para sí mismo- los contenidos de su conciencia. Mas no existe identidad entre expresión y comunicación, entre expresión y recepción, entre la expresión de un individuo A y la intuición que la misma produce en un individuo B." Piénsese, si no, en la confusión que en el receptor puede generar el dibujo de **"un círculo"**, interpretable euclídeamente o como diagrama de Venn para innumerables conjuntos.

"Siendo siempre expresión de una intuición inédita y única, el acto lingüístico es acto de creación, acto singular que no reproduce exactamente ningún acto lingüístico anterior, y que sólo por los límites que le impone la necesidad de la intercomunicación social se "parece" a actos lingüísticos anteriores, pertenecientes a la experiencia de una comunidad. Es decir, que el acto lingüístico es, por su naturaleza, acto eminentemente individual, pero vinculado socialmente por su misma finalidad, que es la de "decir a otros algo acerca de algo". Tradúzcase "acto lingüístico" por "representación gráfico-geométrica concreta" y "comunidad" por "grupo en acto didáctico", y puede encuadrarse íntegramente en estas páginas.

La **"naturalidad"**, **"claridad"** o **"diafanidad"** expresiva son cualidades extrínsecas, convenientes sin duda a la finalidad comunicativa o didáctica, pero fruto del convenio esencial al lenguaje. Es decir, su significado es conferido en un contexto determinado, por una comunidad que los utiliza como instrumento de comunicación de un quehacer matemático. El dibujo, la representación gráfica, ya no es "lo que se ve" o "lo que parece a cualquiera": hay que decir o convenir de antemano "qué quieren significar **"a qué clases de objetos nos estamos refiriendo"**". Por ejemplo, tratando con diagramas de Venn: en ellos, una "curva cerrada" no es la correspondiente representación de la Geometría, sino el lugar de una clase de objetos, fruto de la abstracción matemática; como un "punto" no es un punto de la Geometría: es un objeto de la clase que se convenga representar. Importan tanto la precisión o rigor -intensidad del nexo significante-significado- como la sencillez o claridad perceptiva. Con el dicho publicitario: **"Decir lo que hay que decir, decirlo lo más claramente posible"**; y aquí quien habla es el dibujo, la representación concreta.

Este último aspecto de convencionalismo representativo servirá de guía, desde mediados de nuestro siglo, a la práctica totalidad de los movimientos innovadores en Didáctica de la Matemática. El lenguaje de flechas, por ejemplo, representará, según los casos y conveniencias, pares ordenados singulares -tanto en correspondencias como en relaciones binarias-, representantes modélicos de clases de pares, ejemplificaciones de leyes de composición interna, etc. Y se jugará con la elipsis o la posición como elementos cualitativos de claridad.

Continuando en esta línea, podríamos distinguir entre representaciones concretas, norma individual, norma social y sistema, sus relaciones y distinciones. Contexto. Generación y difusión... Pero..., ¿qué interesa, didácticamente, de esto? Mucho, si concebimos el acto didáctico como acto de comunicación, con sus variantes profesor-alumno, alumno-alumno, alumno-grupo, alumno-situación... Mucho, si consideramos al lenguaje gráfico-geométrico un vehículo eficaz de esta comunicación en el quehacer matemático del aula.

Y no sólo en Matemática: este género de representaciones ha traspasado las fronteras de esta nuestra ciencia, y, ya sea por mimetismo admirativo, ya por conveniencia expresiva, se la encuentra por doquier, en campos tan alejados como la Lingüística, la Biología o el Derecho. Ciñéndonos al título de este trabajo, será tanto más interesante profundizar en el entramado íntimo de este lenguaje, cuanto que -"a priori"- su empleo parece menos accesible a las personas con dificultades visuales. Por último, tal vez puedan extraerse directrices dinamizadoras para un uso adecuado del lenguaje formal de la Matemática o simbólico-matemático, e incluso para la propia lengua natural.

3. POSIBILIDADES DIDACTICAS SEGUN NIVELES

Pocos afirmarían que **"la Matemática puede hacerse exclusivamente con la lengua natural"**. Y, sin embargo, durante algún tiempo, debió ser así, aunque muy lejos no se llegara. De hecho, no han faltado ejemplos de matemáticos ciegos -árabes, sobre todo-, que no dispusieron de sistema alguno de escritura o dibujo.

Cualquiera afirmaría que **"la Matemática es una ciencia de símbolos"**. Indudablemente, se puede hacer Matemática, llevar una clase, escribir un artículo o tratado, casi exclusivamente a base de notación simbólico-matemática. Algunos llegarán a decir que "el lenguaje simbólico es el propio de la Matemática". Pero yo prefiero la afirmación de que "el lenguaje simbólico ha facilitado, merced a su unificación convenida, la intercomunicación entre los matemáticos de todas las lenguas", y que, por ello, ha favorecido grandemente el desarrollo de nuestra ciencia. Es más, con los métodos cuantitativos, ha permitido la aplicabilidad de la Matemática en innumerables dominios del saber científico.

Pero serían muy pocos los que afirmaran que **"puede hacerse Matemática empleando fundamentalmente esquemas y dibujos"**; tal vez lo aceptarían para el ámbito geométrico. Sin embargo, Puig Adam se atrevería: **"la Matemática es la artística ciencia de los esquemas"**; ¿puede decirse más en menos palabras?: objeto, métodos, génesis, orientación, lenguaje, didáctica.

Sí, son muy pocos los que aceptan el valor matemático del lenguaje gráfico-geométrico, si no se reduce a los aspectos relacionados directa o indirectamente con las Geometrías. Pienso que es problema, principalmente, de juventud: ¿qué fue del Algebra, antes de la introducción de la representación cartesiana de funciones?; ¿o qué sería de la Teoría de Conjuntos, sin los diagramas de Venn o Karnaugh? Y, sin embargo, abundan los matemáticos que, si bien aceptan un cierto valor comunicativo -facilitador de la comprensión- de estos instrumentos, niegan su valor instrumental constructivo, sus posibilidades conjeturales y aún demostrativas.

Su grado de convencionalismo, el carácter extremadamente local de éste, parece cortarle las alas que le permita transpasar fronteras mentales y geográficas. Digo que es problema de juventud, pues confío en su valor múltiple, y las **"alas"** crecerán con el tiempo -que, a veces, fueron siglos-; y responsabilidad tenemos en esto los profesionales de la enseñanza.

Para mí, el lenguaje de las representaciones gráfico-geométricas es ya hoy el propio de la Didáctica de la Matemática. Y esto, a pesar de su bajo nivel de desarrollo, escasez de términos, estructura poco esclarecida y limitada aceptación entre los **"matemáticos profesionales"**. Es más: pienso que determinados conceptos matemáticos encuentran precisamente su dificultad para ser asimilados, y aún incorporados al curriculum según niveles, precisamente por carecerse de una representación gráfica precisa y clara.

Llegado el momento de abordar el problema de la aplicabilidad didáctica del lenguaje gráfico, permítaseme fijar mi postura acerca de la Matemática y su Didáctica.

La Matemática es abstracta, de acuerdo. Es fruto de una abstracción, de un modo específico de abstracción que hemos dado en llamar **"matematización"**. Y los objetos así obtenidos, objetos matemáticos, pueden ser expresados y representados mediante un lenguaje propio, "el lenguaje matemático o simbólico-matemático", y gozan de unas relaciones y diferencias harto curiosas, e incluso sorprendentes: demasiado ricas para pensar que son invención humana. Es que la Matemática nace de la realidad física propiamente dicha, de lo tangible: la Matemática está en lo físico, y la abstraemos mediante un proceso especial.

Un objeto matemático está en una representación gráfica, como está en una expresión simbólica o de la lengua natural, como la materia sustenta la

forma. Y se descubre en esas representaciones, merced a los convenios que los rigen, como se descubre en la realidad física, aunque por itinerario diferente.

Y la Matemática "sirve para algo", "tiene que servir para algo". Ya sería bastante ayudarnos a conocer mejor la realidad; pero se nos muestra además como instrumento potente de trabajo, en ayuda de otras ciencias, de casi todas las ciencias que tratan con lo físico. Más vale buscar la Matemática, lo matemático, en lo cotidiano, en lo próximo, en la vida misma, que en construcciones artificiosas.

Concebida así la Matemática, como abstracción de lo concreto, preferentemente de lo concreto físico y próximo, de lo cotidiano, mediante un proceso peculiar, no me detendré a considerar la naturaleza de los objetos resultantes, el proceso de matematización o las hipótesis psicológicas sobre cómo se lleva a término este proceso en sus diversos estadios. Sólo un recuerdo a la escuela piagetiana: **"Las abstracciones no se enseñan: las obtiene el propio sujeto, ejerciendo esa forma específica de conocimiento que llamamos abstracción"**. Aunque este proceso se sustente en imágenes y/o términos lingüísticos de cualquier género. Dicho de otro modo: la Matemática se aprende al descubrirla en lo concreto.

En segundo lugar, y en íntima conexión con lo dicho, estimo que la vía más propicia para llevar a cabo este proceso es la manipulación de lo concreto. Es decir: el empleo de las propias manos en actividades con objetos y materiales físicos. Algo más que la simple observación o representación interior de manipulaciones ajenas o grabados de cualquier tipo; si bien, la mera observación implica, en algún modo, la reconstrucción psicomotriz interior de lo observado -cómo lo exploro, cómo lo representaría-. Es decir: los aspectos sensibles estimulan y facilitan el proceso de descubrimiento de lo matemático.

En tercer lugar, siguiendo en el dominio de la Didáctica de la Matemática, que el lenguaje gráfico es el más importante medio con que contamos en la clase para facilitar el proceso de aprendizaje, precisamente porque se adecúa como expresión o soporte sensible para los esquemas empíricos, plasmación de las experiencias lógico-matemáticas de referencia. La representación gráfica es tanto más eficaz didácticamente, cuanto más se acerca o refuerza el esquema empírico conveniente al objeto matemático.

¿Queda todavía alguna duda sobre la utilidad didáctica del lenguaje gráfico? Cada cual podría contar su propia experiencia, ya sea como alumno o como profesor-alumno: positiva, afirmo sin titubeos. Es más: no pocas veces nos lamentamos de no disponer de modelos de expresión gráfica para determinados temas; pero me aventuro a asegurar que no faltan, aunque nos parezcan -y lo sean- imperfectos, insuficientes. Falta investigación, sentimiento de insatisfacción, confianza en las posibilidades del sistema, tal vez desconocimiento: he aquí una hermosa línea para una reflexión práctica en investigación-acción.

¿Y en qué niveles educativos alcanzará mayor eficacia comunicativa? Me arriesgaría a afirmar que su eficacia es independiente del nivel en que se emplee. Pero puede depender del contexto, en cuanto que las **"norma social"** y/o convenciones del "sistema" -no estén suficientemente incorporadas por los alumnos en **"normas individuales"**-; carencia proveniente, generalmente, de las características del curriculum precedente de los alumnos, o de una asimilación inadecuada de tales directivas.

¿En qué momento del proceso de matematización debe expresarse gráficamente una situación matemática? Claramente, cuanto antes; pero debe preceder a la expresión simbólica, y actuar la lengua natural como metalenguaje o lengua auxiliar -cosa que ocurre necesariamente, a lo largo de todo el proceso-.

4. EL ALUMNO CIEGO EN EL AULA DE MATEMATICA. NECESIDADES DE ATENCION DIFERENCIAL

En relación con la educación de ciegos y la Didáctica de la Matemática, la consideración histórica y la investigación psicométrica nos suministran dos hipótesis de trabajo que, sin riesgo excesivo, elevamos a la categoría de principios orientadores.

No hay ámbito o dominio de la Matemática vedado para un ciego. Bastaría un repaso histórico, un recuerdo a Euler, Pontrjaguin y tantos otros, para mostrar que la falta de visión no impide el estudio y la investigación matemáticas. Otra cosa es pensar que todos los ciegos estén o estemos igualmente dotados para la Matemática: hay de todo, como en cualquier grupo humano diferenciado.

Algo muy distinto es el ser conscientes de las dificultades de orden material y técnico, que, en no pocas ocasiones, condicionan el ritmo de trabajo de un alumno ciego a la hora de aprender Matemática. Esta es la razón por la que podemos y debemos hablar de una **"Didáctica Especial de la Matemática para Ciegos"**: una selección y adecuación de materiales pedagógicos, instrumental de trabajo, quizás de itinerarios didácticos y, sobre todo, de ritmo especial de aprendizaje -condicionado por todo lo anterior-; pero sin modificación de objetivos.

Una segunda consideración, apreciada experimentalmente y que acepto con algunas restricciones: el proceso de desarrollo psicológico del niño ciego padece, en general, un retraso medio de cerca de dos años en lo referente a la adquisición de experiencias lógico-matemáticas; retraso que se va aminorando, hasta neutralizarse a la edad de doce a catorce años.

Esta observación fue contrastada experimentalmente hace ya cerca de veinte años por el equipo de la profesora Hatwell en París, de la escuela piagetiana, y corroborado en España por los profesores Rosas y Ochaíta, sin

apenas modificaciones de la hipótesis. El retraso parece agudizarse en sujetos que adquirieron la ceguera en edad temprana o congénitamente, y suavizarse en los que disponen de una mayor riqueza de imágenes visuales, por haber perdido la visión más recientemente. Los alumnos con residuo visual que les permite distinguir objetos a corta distancias o grabados, parecen no padecer tal desfase. Hasta el presente, se ignora el influjo que en este tipo de retraso tiene una estimulación precoz y un curriculum escolar o didáctico que podríamos llamar *"rico en experiencias de manipulación y representación"*; o la relación entre experiencias y correlato lingüístico: piénsese en la adquisición de los conceptos topológicos -dentro, fuera; arriba, abajo; derecha, izquierda; etc.

No debe, pues, extrañarnos un cierto retraso escolar en los alumnos ciegos; aunque no podemos ni debemos conformarnos con él. Esta "comprobación" experimental revela hechos de población -por otra parte, en muestra muy limitada-, no comportamientos por naturaleza o deficiencia: nos da indicios de en qué y por qué hay que interaccionar; pero no podemos aceptar fatídicamente el carácter inamovible de esa manifestación deficitaria, sino atajarla en sus causas -en lo que suponemos sus causas.

De otro lado, esta conclusión lleva el sello de la escuela; es decir, no afirma nada acerca de la posibilidad de alcanzar objetivos matemáticos determinados por un alumno concreto. Más bien se refiere a los comportamientos globales de la población sometida a las experiencias, con intención de análisis psicogenético. Por consiguiente, no puede servir de excusa o justificación apriorística de las dificultades de cierto alumno; más bien debiera ser un acicate para la búsqueda y ensayo de nuevas vías de acceso a conceptos matemáticos supuestos dificultosos, tal como F. Papy consiguió demoler la misma hipótesis genética de aparición de las estructuras algebraicas según Piaget.

Pero el caso concreto al que se refiere esta conclusión afecta muy directamente a nuestro instrumento, el lenguaje gráfico-geométrico, su percepción, comprensión y producción. ¿Será instrumento útil a un alumno ciego total determinado, incorporado al nivel de escolarización que corresponde a su edad cronológica?; ¿o habrá que esperar a ese "desarrollo "natural" psicomotriz", de forjado interior de tales estructuras lógico-matemáticas, conforme al ritmo previsto para los de su "situación"? ¿Deberán condicionarse, para ese alumno, los objetivos matemáticos a una conclusión experimental? No. También en este caso, la Didáctica puede y debe no conformarse con las apreciaciones de la Psicología evolutiva -por ende, diferencial, en este caso-. Y puede y debe ensayar nuevos caminos y apoyos extraordinarios -si fuere menester-, que también aquí, y una vez más, superen la rigidez de conclusiones teñidas de generalidad pigmaliónica.

De cualquier manera, es inevitable plantearse cuál debe ser la versión háptica de ese recurso eminentemente visual que es el lenguaje gráfico-

geométrico. Distinguiremos dos aspectos bien diferenciados: la forma gráfica y el color. Con estas premisas, trataré algunos temas de Didáctica de la Matemática que considero de interés general, relacionados sobre todo con la Geometría y el lenguaje gráfico-geométrico, y el modo en que son abordados en la enseñanza de alumnos ciegos con empleo de material específico.

No queda sino hacer dos consideraciones finales. Si bien se observa con frecuencia una menor disposición del alumno ciego para el dibujo, no debe cederse nunca ante una aparente mayor dificultad instrumental; objetivamente, no es así. Puede encubrir, por el contrario, una apatía natural o consecuente a la inacción prolongada, que sólo se vence con la práctica cotidiana, casi permanente; y esta práctica llevará a una mayor destreza y gusto por el empleo del dibujo, valorando su auxilio como casi imprescindible en la clase de Matemáticas.

Y, en segundo lugar, que el alumno ciego, al no poder contrastar sus representaciones con las que se vayan efectuando en el tablero o las que realiza el compañero más próximo, precisa, eso sí, de una mayor atención; ya sea por parte del profesor o de un compañero. Necesita de la seguridad de saberse en el buen camino, de estar trabajando correctamente, de que sus representaciones no le engañan. Precisa una atención diferencial por parte del profesor, no tanto de unos especiales conocimientos en Pedagogía o Psicología.

5. EL INSTRUMENTAL DE DIBUJO PARA CIEGOS

El lenguaje gráfico se presenta como paso conveniente entre la manipulación y la abstracción matematizante propiamente dicha; como lenguaje adecuado a los esquemas empíricos forjados por las experiencias lógico-matemáticas interiorizadas. Pero lo que para un alumno ordinario parece no tener mayor trascendencia -cómo dibujar: basta un papel y un bolígrafo, lápiz o rotulador-, ha planteado, en la enseñanza de ciegos, no pocas dificultades. Hasta un plazo reciente -unos quince años- no se ha contado con un instrumental de dibujo suficientemente potente, sencillo y económico.

Desde hace más de cincuenta años, se viene empleando en España un sistema de dibujo geométrico, ciertamente útil y bastante "exacto" para las representaciones geométrico-euclídeas. Una simple lámina de fieltro adherida a un tablero de madera que, a su vez, la enmarca; como instrumentos móviles nos servimos de cartabón ordinario, regla, punzón de escritura Braille y compás de puntas secas romas. El papel a emplear es uno cualquiera, de gramaje superior a 100 g./m. . Si se desea que el dibujo sea "**visible**", basta interponer entre el papel y el fieltro una hoja de papel tintado o de calco.

El dibujo resulta exacto, sí; pero presenta la grave dificultad de que exige

tornar el papel para comprobar la marcha adecuada o no del desarrollo geométrico. Con el compás, pueden mantenerse distancias, y, con ayuda del cartabón y el marco que encuadra el conjunto, permiten trazar fácilmente paralelas y perpendiculares. Las intersecciones quedan perfectamente determinadas por un punto, que puede emplearse fácilmente como referencia para la toma de distancias y como centro para el trazado de arcos. Es un buen instrumento de dibujo en geometría euclídea, pero es mal instrumento en Didáctica de la Matemática.

Vencidos ya los años sesenta, algún centro de élite inglés intentó el desarrollo de un sistema de dibujo para ciegos en el que el alumno pudiera reconocer lo dibujado por él sin necesidad de tornar el papel. Llegaron así al diseño de prototipos muy sofisticados, con empleo de recursos electrónicos. De buena aproximación en cálculo de medidas, pero costosos, complicados y, además, bastante lentos.

En las escuelas francesas para niños ciegos se venía empleando un sistema de dibujo basado en una lámina de caucho adosada a un tablero de madera -que servía, a su vez, para sujeción del papel-, compases y "tiralíneas" de rueda dentada, reglas y cartabones ordinarios. Como soporte del dibujo empleaba papel especial, semejante a nuestro papel vegetal resistente o papel de celofán. No se empleaba en el aula de Matemáticas, sino en el Área de Expresión Plástica; a lo sumo, como auxiliar en Geometría.

Presentaba un inconveniente: las intersecciones no quedaban bien definidas al tacto, y las distancias se conservaban mal; y una ventaja muy notable: el relieve aparecía "*hacia arriba*", pudiendo seguir el alumno sin dificultad el resultado de sus trazos. En esta misma línea, se emprenden desarrollos en Holanda y Estados Unidos.

Mediados los años setenta, trabajando ocasionalmente con este material francés, nos encontramos en España con la dificultad de disponer del papel adecuado. Y así, ocasionalmente, se ensaya el trabajo con papel ordinario de escritura: el resultado no parecía satisfactorio. Pero la sorpresa surge cuando, casi accidentalmente, se prueba a dibujar con bolígrafo ordinario, en vez de los instrumentos -digamos- "apropiados". La ejecución del trazo era sencilla, y el relieve satisfactorio: podría emplearse en la clase de Matemáticas con la agilidad que ésta exige en el dibujo.

Animados por el éxito, se intenta multiplicar el número de "*tableros*" de dibujo. Pero era poco menos que imposible localizar el origen de los dos o tres ejemplares de los que se disponía. Nos lanzamos así a obtener materiales análogos en nuestro país. No hizo falta buscar por mucho tiempo: un taller de recauchutados para automóviles nos suministró láminas de diferente espesor. Cortadas, limpias y pulidas, fueron suficientes; sobraba incluso el soporte de madera y el sistema de sujeción del papel. Hemos llegado; pues, a una lámina de caucho de entre 3 y 6 mm. de espesor -adquirible en

cualquier almacén de cauchos-, papel ordinario de unos 60 u 80 g. m. , y un bolígrafo corriente -a ser posible, de **"punta gruesa"**. Disponemos de un conjunto absolutamente económico, sencillo de manejar y suficiente para el empleo en Matemáticas. Si se desea, se le pueden añadir regla, cartabón, compás -basta una de las llamadas **"bigoterías"**, cuidando de limar adecuadamente la "punta seca". Contamos así con un instrumental de dibujo o representación gráfica para Matemáticas, análogo al empleado por el vidente. En él, dibuja el ciego y reconoce inmediatamente el resultado de su representación; pero no sólo él: el profesor vidente o un compañero cualquiera, puede observar estas representaciones, ya que el dibujo está en relieve y marcado en tinta; y viceversa: sin necesidad de técnicas especiales, otro alumno o el profesor pueden colaborar con el alumno ciego, completando representaciones o indicando aspectos erróneos en el trazado por éste. Es, por tanto, un buen medio para la intercomunicación ciego-vidente y vidente-ciego, importante en la enseñanza en centros ordinarios.

No faltarán los críticos que afirmen -y con razón- que este sistema adolece de falta de exactitud, de precisión en las medidas, intersecciones, paralelismo, etc. Pues bien, me atrevo a afirmar yo también que todos esos conceptos son buenos al hablar de diseño, de proyectos, de cálculos físicos; que son muy convenientes en el laboratorio de Física o en el aula de Plástica; pero que, para aprender Matemáticas, me basta y sobra **"lo aproximado"**, "lo subjetivo", casi. ¿Quién se atrevería a dibujar una circunferencia exacta? Ni siquiera el mejor delineante, con el más fino de los compases: siempre habría un error, inevitable, inobservable a simple vista, pero patente a un instrumento suficientemente agudo. En Matemáticas, lo que me interesa es que "aquello" me sirva de representación de una circunferencia: que *"sea una circunferencia, a mis propósitos"*. Y otro tanto podría decir de rectas, segmentos, paralelas, perpendiculares. Así y todo, esas críticas sólo alcanzan a las representaciones en Geometría euclídea. Quedan a salvo los diagramas conjuntistas -de Venn o de Karnaugh-, diagramas de flechas, de flujo lógico, etc. Y, si no nos dejamos impresionar por los puritanos del dibujo geométrico, es suficientemente potente para éste, en Geometría Elemental, gráficas cartesianas, etc. Me permitiré incluso traer un par de ejemplos de "regalos" o **"valor añadido"** de este material, válidos casi exclusivamente en la enseñanza de ciegos, no inherentes al material ordinario de dibujo para el niño vidente.

Este material permite las dos funciones sintácticas esenciales en la representación gráfica en Matemática: la posición y la orientación. Falta el color, y no es fácil la incorporación de símbolos o fórmulas, que fijan la asignación de significados; por lo que esta función se completa ordinariamente haciendo uso de la posición relativa, con referencia espacial al sujeto.

Ahora bien, no basta con disponer del instrumental. El alumno debe

aprender a manejarlo autónomamente. A su vez, esto implica la aplicación adecuada de los recursos táctiles, y desarrollar destrezas varias: reconocimiento de puntos y líneas, determinación de posiciones, comparación de distancias y ángulos, Manejo adecuado del bolígrafo, control de la presión sobre el papel, etc., y plasmación por sí mismo tanto de los contenidos mentales como de los mensajes de intercomunicación verbal; verdaderas prácticas de descodificación y codificación en las claves del lenguaje gráfico. Aprender a reconocer, a copiar, a dibujar significados matemáticos; en una palabra: desarrollar el **"arte de palpar"** -que diría P. Villey- y "aprender a dibujar", siempre en el dominio del lenguaje de representación gráfico-geométrica de la Matemática.

No obstante, no nos dejemos llevar por el optimismo inconsciente. Surgen aquí toda una serie de matizaciones y preguntas. Entre los ciegos, como entre los videntes, los encontraremos mejor y peor dotados de habilidad para el dibujo y la representación con este material. Y toda una serie de cuestiones: ¿desde qué edad o momento puede el niño ciego alcanzar destreza con él?; el desarrollo en tal destreza, ¿es paralelo a las necesidades en Didáctica de la Matemática?; ¿puede acelerarse?, ¿o está condicionado por el desarrollo psicomotriz del niño ciego?; a su vez, ¿puede éste acelerarse?; ¿de qué modo?... ¿existe un itinerario de optimización en el desarrollo de esta destreza o adquisición de las técnicas oportunas?... Todo un panorama ilimitado de investigación. No se dispone aún de una metodología específica para desarrollar estas técnicas, detección de irregularidades y su corrección; pero puedo adelantar que la práctica totalidad de los ya varios centenares de alumnos con los que he trabajado han logrado un nivel aceptable de empleo del material sin necesidad de sesiones especialmente dedicadas a adquirir tales técnicas: ha bastado la ejercitación en el aula, simultáneamente al trabajo matemático.

6. EJEMPLIFICACIONES

Como prometí, comprobemos su aplicación. Hagamoslo en el tratamiento de isometrías del plano y gráficas cartesianas; con resultados poco esperables: extraordinarios.

Si al dibujar una figura que deseamos trasladar hacemos uso de dos hojas de papel, bastará un trazo más intenso para que ambas láminas queden **"dibujadas"**; evidentemente, sólo la exterior quedará marcada en tinta por el bolígrafo, pero la segunda, la inferior, está "dibujada" en relieve. Levantemos ahora la lámina superior en uno de sus ángulos, y tracemos sobre la inferior el **"vector desplazamiento"** al que queremos someterla. Doblamos o cortamos la lámina superior justo por el extremo-final del vector, marcando el borde de la lámina superior en ese punto.

Si deslizamos con cuidado la lámina inferior -con el cuidado suficiente, para que se mantenga el paralelismo entre los bordes de una y otra lámina-, sosteniendo la exterior, hasta que el extremo-origen del vector de desplazamiento coincida con el punto indicado, la lámina inferior se habrá desplazado o trasladado cuánto y cómo indique el vector. Y, con ella, la figura, copia exacta -por simultánea- dibujada en un principio. Esta figura no es "*perceptible a la vista*", pero puede ser percibida por el tacto, por debajo de la lámina exterior. Lo que no percibe la vista, lo alcanza el tacto, igual o mejor. Análogo resultado obtendríamos, deslizando la lámina superior. Todo es cuestión de querer resaltar el original o el imagen de la traslación.

Disponemos no sólo de un sistema de representación para las traslaciones en el plano, sino también de una expresión física de sus efectos. Y, recíprocamente, partiendo de éstos, podríamos definir una traslación como **"el movimiento -siguiendo la antigua nomenclatura- de los puntos del plano que me conserva las dos hojas con iguales dibujos -distancias y ángulos- y mantiene paralelos los bordes de ambas, sin alterar su posición relativa"**.

¿Qué ocurre si consideramos las "**trayectorias**" de dos puntos cualesquiera para una misma traslación? Podemos observarlo uniendo puntos homólogos de una figura y su transformada. El paralelogramo resultante nos conduce, naturalmente, al concepto de "equipolencia", si es que deseamos introducirlo explícitamente. No me detengo, por su analogía con la situación para alumnos videntes, de la evidencia para los conceptos de "traslación nula", "traslación inversa"; "composición de traslaciones", y, con ellos, la estructura de grupo conmutativo, "múltiplo de una traslación", etc. Sólo resaltar, dada su importancia didáctica, las repercusiones que esta manipulación tiene en la introducción y cálculo en el espacio vectorial bidimensional; que, aunque me permito considerarlo como un camino más -tal vez no el mejor ni el más rico- para la introducción al concepto algebraico de Espacio Vectorial, sí de gran importancia para su aplicación como instrumento adecuado en los cálculos de la Física.

Veamos ahora su utilización en el tratamiento de las simetrías axiales en el plano. Procedemos exactamente igual que antes, con dos hojas de papel. Podríamos haber determinado de antemano el eje de simetría, o hacerlo en este momento. Si lo hacemos ahora, ni siquiera es preciso dibujarlo: basta con doblar la lámina superior siguiendo el eje, dibujado o imaginario.

Al hacerlo, la lámina superior se pliega sobre sí misma, llevando consigo la figura, dibujada en tinta y en relieve. Pero al proceder así, la figura, en su posición inversa, sólo es perceptible al tacto, y difícilmente a la vista. En su posición de origen, queda todavía la copia en relieve sobre la lámina inferior: se cuenta con original e imagen, sensibles al tacto, aunque difícilmente a la vista.

En una primera observación, la figura transformada no difiere de la

original: son "**iguales**". De nuevo, nos hallamos ante una isometría, que parece conservar distancias y ángulos, "**formas**". Eligiendo adecuadamente la figura, observaremos con más cuidado que sí cambia algo: "**hacia dónde miran una y otra**", la distinta manera de "recorrerlas", su "orientación".

Sin esfuerzo, se responde ahora a la cuestión de "*si hay puntos del plano que no cambian de lugar*". Más dificultad entraña determinar la propiedad que relaciona un punto cualquiera, su homólogo y la recta de puntos invariantes. Para mejor estudiar este último aspecto suele ser preferible trabajar sobre una única hoja de papel, doblada por una recta, que nos servirá de eje de la simetría. Trazada la figura sobre la hoja doblada, y desplegada ésta, se unen dos puntos homólogos; la respuesta surgirá así inmediatamente.

Este procedimiento nos sirve tanto para estudiar los efectos de una simetría de eje dado, como las imágenes de una figura dada mediante simetrías de ejes diversos -sin repetir el dibujo, basta con doblar la hoja superior por ejes distintos. La conclusión será siempre la misma, y estamos en condiciones de enunciar la definición dinámica de simetría axial en el plano. Con una sola hoja resulta también inmediato comprobar el carácter diedral de las simetrías, y, con una buena elección de la figura original, la condición de no cerrado del conjunto de las simetrías respecto de la composición. Con dos hojas, y aplicando simetrías de ejes paralelos -cuidando de doblar tan sólo la hoja superior-, podemos relacionar simetrías axiales y traslaciones. Y, análogamente, con simetrías de ejes secantes, simetrías y rotaciones. Aunque para la correcta "**exacta**" comprobación de las hipótesis resultantes, fuera menester acudir-¿por qué no?- al tablero de fieltro.

Encaminémonos hacia un nuevo campo: la Geometría Analítica. O, más exactamente: el trabajo sobre el plano cartesiano. No merece la pena -pienso- detenernos en los ejercicios de "**graduación de una recta**" y "representación de conjuntos numéricos"; ya sean naturales, enteros, racionales y aún reales. Según la introducción metodológica, nos llevaría por sendas de traslaciones y proyecciones paralelas. Demos esto por supuesto, y pasemos directamente al trabajo sobre el plano dotado de un sistema de referencia cartesiano.

Con alumnos ciegos, podemos servirnos, en un primer momento, junto con la lámina de caucho, de hojas de papel ordinario sobre las que se han impreso tanto los ejes graduados como los puntos correspondientes a coordenadas ambas enteras. De carecerse de este tipo de papel, basta trazar los ejes, graduarlos y poner un poco más de cuidado en los ejercicios de iniciación. Los primeros ejercicios -al igual que para alumnos videntes-serán los de introducción de los conceptos de "abscisa" y "ordenada", "localización de puntos con ciertas coordenadas", "**determinación de coordenadas de un punto**", etc. Inmediatamente, vendrán los de dibujo de lugares geométricos

de puntos de igual abscisa o igual coordenada -rectas paralelas a los ejes. Y, el gran salto, nexo de unión entre Álgebra y Geometría: determinación de los puntos cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Aquí es donde suelen aparecer las primeras dificultades, inherentes a la poca precisión del tacto y del dibujo de representación. No será fácil que los puntos resultantes queden alineados. Convendrá, pues, elegir adecuadamente los ejemplos, procurando sobre todo que los pares de soluciones comprendan pares de coordenadas enteras. Si es necesario, puede acudir a la regla para verificar la realidad de tal observación.

Salvadas éstas, no surgirán otras que las ordinarias con alumnos videntes. Lo importante es crear el hábito del dibujo analítico, de la inclinación refleja a representar las expresiones algebraicas y estadísticas. Recordemos una vez más que lo que interesa, en términos didácticos, es la representación, la expresión en lenguaje gráfico-geométrico, ni mucho menos la exactitud o perfecta correspondencia métrica.

De esta forma, no es difícil adentrarse en los terrenos de la Analítica. Puedo asegurar que no hay obstáculo para que el alumno ciego trabaje normalmente los tópicos de la Matemática a cualquier nivel, en lo relativo a representaciones planas: sistemas de ecuaciones con dos incógnitas, funciones reales de variable real, derivación e integración, trabajo con vectores y bases bidimensionales, Trigonometría Plana, etc.

Otro ejemplo de ventajas del material lo proporciona la definición de la función logarítmica como inversa conjuntista de la exponencial.

Al estudiar la representación de funciones reales de variable real, así como la expresión gráfica de sus propiedades y elementos analíticos, también se estudia el significado y expresión gráfica de la función inversa; comprobándolo, por ejemplo, con funciones polinómicas. Más tarde, al tratar la función exponencial en todas sus variedades, se profundiza en el valor de la representación cartesiana, adelantando sus propiedades, y comprobándolas algebraicamente y observando la variación de aquéllas en función de la base. Pero, ¿qué ocurre con su inversa?

Dibujada la gráfica de la función exponencial -por ejemplo, de base 10-, su inversa se obtiene inmediatamente -conforme a la regla general-, sin más que "cambiar ordenadas por abscisas, y viceversa": es decir, hallando la gráfica simétrica respecto de la diagonal de los cuadrantes primero y tercero. Esta operación de trazado de la gráfica simétrica resulta aquí inmediato: basta "plegar" el papel, haciendo coincidir semiejes de abscisas y ordenadas, para "desplegar" después la otra mitad. La gráfica "visible" queda del lado oculto, pero la simétrica es claramente perceptible al tacto, como lo era la original. Tal inversa tiene una gráfica bien definida, en la que pueden deducirse no pocas propiedades. Mas carecemos de expresión algebraica: hay que inventar

una fórmula para esa gráfica. Etc. Yo no conozco itinerario más intuitivo y natural de introducción de la función logarítmica; ni para ciegos, ni para videntes. Pero para los alumnos con residuo visual, me debo servir de láminas transparentes, mucho más caras y difíciles de encontrar en el mercado.

Otros problemas, y muy distintos, son los relacionados con las representaciones planas de la Geometría del Espacio, recuperada para la Enseñanza Secundaria. Habría aquí que acudir más que a las representaciones bidimensionales convencionales -por ejemplo, las resultantes de la proyección isogonal-, al empleo de materiales que permitieran construcciones tridimensionales: cartulinas, "poliexpan", agujas de tricotar o alambres, cuerdas, etc.

7. POR LA REFLEXION EN LA PRACTICA

No son pocos los alumnos ciegos o con deficiencia visual grave -residuo visual no superior al 10%-; en España, unos 2.000. Lo que significa que, por término medio, en uno de cada ocho Centros Educativos podemos encontrar a uno de estos afectados. En otros términos: la mitad de los profesionales de la Educación tienen o tendrán contacto directo o indirecto -lo tendrá algún colega próximo- con un alumno con dificultades visuales para una escolarización "normal". Las cifras parecen tender a crecer. De una parte, la propensión a incorporar o permanecer este tipo de alumnado en los Centros ordinarios, en vez de escolarizarlo en los Centros Especializados gestionados por la O.N.C.E.; de otra, el progreso en las técnicas de diagnóstico y tratamiento precoz de los problemas de visión.

Esta población reclama una atención adecuada. Información, puesta en contacto con los Centros o equipos especializados... No basta: el problema surge en "el día a día", en el aula. Y trasciende este ámbito reducido, alcanzando esta responsabilidad al equipo docente, al Departamento, al Centro en su globalidad. Y no bastan -nunca serán suficientes- los prometidos apoyos institucionales, sea al alumno, sea al profesor de aula.

Concretamente, al profesor del Área Matemática que encuentra por vez primera un alumno ciego o deficiente visual en su clase, le asaltan docenas de preguntas: ¿qué puede o no hacer este alumno?; ¿cómo lo hará?; ¿con qué instrumental cuenta?; ¿qué deberé yo hacer, para que siga las actividades al compás de sus compañeros?; ¿podrá trabajar en equipo?; ¿en qué tipo de tareas?; ¿en qué forma trabajaremos sobre el tablero?; ¿podrá dibujar?, ¿cómo?, ¿qué?, ¿cuándo?, ¿por qué?, ¿quién?. Formularse preguntas. Ya es algo, mucho: el principio de la solución, si se persevera en el empeño por hallarla. Que cómodo y fácil es refugiarse en el desentenderse por impotencia -falsa; y no quiero hablar de negligencia-, o en el conformismo fácil de la cesión conmisericordiosa o admirativa; el daño aquí es acumulativo, falseador del currículum de ese alumno.

Los problemas y los interrogantes se multiplican con la diversificación de actividades en la clase de Matemática, con una cada vez más marcada Pedagogía activa, de acción y participación de todos y cada uno de los alumnos -individualmente, en pequeños grupos, todos al unísono-; generalizándose la evolución de la clase hacia una concepción del aula como laboratorio-taller, donde, con estructuras dinámicas, se ensayan técnicas de observación, estrategia y sistematización matemáticas. ¿Cómo podrá ser uno más, el alumno ciego, sin modificar sustancialmente objetivos, contenidos, actividades? ¿Con qué instrumental de medida, tabulación y representación contará ese alumno?

Sin querer -o queriéndolo-, nos hemos adentrado en campos de investigación; de investigación para la acción. Nos vemos precisados de una información en material y técnicas especiales, en conclusiones de ciencias pedagógicas aplicadas; llevados a profundizar en los mismos fundamentos de las correspondientes Ciencias Básicas. Para luego diseñar y programar posibles soluciones adecuadas a las previstas situaciones concretas. Sin querer -queriéndolo!, nos vemos arrastrados por el torbellino de la investigación-acción de la labor docente ordinaria.

Y este ir y venir de lanzadera que es la actitud reflexiva y práctica del profesor, con frecuencia nos sugerirá proyectos de solución para otras situaciones **"conflictivas"**, ya sea relativas a alumnos con otro tipo de deficiencias o irregularidades psicopedagógicas, o a saber percibir precisamente esas disfunciones sensoriales, psicomotrices, de aprendizaje en general. Es que la investigación en un dominio concreto de discapacidad, motiva y genera líneas de investigación y vías de respuesta para otras deficiencias: tiene un valor añadido, como factor multiplicador, en Didáctica, sea en la práctica, o como ciencia básica o aplicada.

Esa tensión investigadora se ve compensada -no son palabras de consuelo- por los frutos de dificultades superadas, más o menos satisfactoriamente; mucho más de lo que hubieran quedado abandonadas al paio. El profesor ha reflexionado fecundamente en su quehacer diario, ha solicitado y buscado información sobre aspectos diversos de los procesos de aprendizaje. Ha procurado ahondar en su formación científica y técnica. Críticamente, ha consolidado o modificado sus presupuestos didácticos. Sin querer -o queriéndolo-, se halla inmerso en un proceso de fecunda formación permanente; no en teorías ajenas al diario quehacer, sino implicadas de lleno en problemas acuciantes y reales.

Didáctica de alumnos con deficiencias visuales; Didáctica de alumnos con otras deficiencias sensoriales o psicomotrices; Didáctica de dificultades generales en el aprendizaje; Didáctica de la Matemática en general; Formación Permanente del Profesorado. ¡Todo por un alumno ciego que encontró en su clase, y que no sabía qué hacer con él! Los modos de trabajar en Didáctica de la Matemática para ciegos pueden facilitar la reflexión y búsqueda de soluciones en la Educación Especial para otros grupos de minusvalías, salvando adecuadamente las diferencias, e inclusive en Didáctica de la Matemática en general. Porque la metodología de

investigación es análoga, las soluciones pueden ser indicadoras de direcciones a seguir en cada caso y porque los logros en un dominio alientan la búsqueda de soluciones en otros próximos.

Era consciente, pues -o, al menos, éste era mi estado de ánimo-, que mis palabras podían tener una repercusión algo más que puntual: de sensibilización y metodológica. Procuraba ante todo, abrir horizontes, despertar iniciativas, y, claro está, quedar a vuestra disposición para cualquier género de información, orientación y gestiones que estén a mi alcance.

TERCERA PARTE

**COMUNICACIONES
PRESENTADAS
EN LAS
MESAS DE TRABAJO**

MESA 1: MATEMATICAS EN PRIMARIA

PROBLEMAS ADITIVOS DE DOS ETAPAS CON IGUAL OPERACION Y ESTRUCTURA SEMANTICA DUPLICADA. ESTUDIO PRELIMINAR EN 5º DE PRIMARIA

Gutiérrez Pérez, J.; Morcillo Delgado, N.; Rico Romero, L.; Castro
Martínez, E.; Fernández García, F.; González González, E.; Pérez Morales, A.;
Segovia Alex, I.; Serrano García, M.; Valenzuela Herrerías, J.
Dpto. de Dca. de la Matemática. Universidad de Granada

I. CONTEXTUALIZACION DE LA INVESTIGACION

Este trabajo ha sido parcialmente financiado con una ayuda de la Investigación Educativa para Niveles no universitarios (BOJA nº 131, 19 de diciembre de 1992), concedida por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía al Proyecto denominado: **"Diagnóstico de Procedimientos y Evaluación de Destrezas Terminales para la Resolución de Problemas Aritméticos en el Tercer Ciclo de la Educación Primaria Obligatoria (E.P.O.)"**.

Dentro del campo de estudio de los problemas aritméticos verbales, se denominan problemas de estructura aditiva o, simplemente, aditivos a aquellos problemas cuyas soluciones implican solamente sumas y restas. Los estudios sobre problemas aditivos han estado dedicados principalmente a los problemas en cuya solución interviene una sola operación de las mencionadas; a éstos problemas se les denomina problemas de una etapa y constituyen la categoría más sencilla de problemas aditivos.

Recientemente (Shallin, 1985; Nesher, 1991) se ha despertado el interés por el estudio de los problemas aritméticos de dos etapas, que son aquéllos en cuya solución intervienen dos operaciones aritméticas consecutivas. Los problemas aritméticos aditivos de dos etapas son, pues, los problemas cuyas soluciones implican solamente sumas y restas y, en todos los casos, son necesarias dos de estas operaciones.

Por las operaciones implicadas, los problemas aritméticos de dos etapas admiten cuatro posibilidades, que notamos mediante los pares ordenados:

$(+,+)$; $(+,-)$; $(-,+)$ y $(-,-)$.

Uno de los enfoques de investigación más productivos en los estudios sobre problemas aritméticos es el enfoque estructural basado en las categorías semánticas de los problemas (Castro, 1992). Las categorías semánticas universalmente aceptadas (Nesher, 1982; Carpenter y Moser, 1982, 1983; Rico, 1988) son las denominadas:

cambio, se refiere a los problemas en los que se produce algún evento que cambia el valor de una cantidad inicial; abreviadamente la denominaremos **Ca**.

combinación, problemas basados en una relación estática existente entre un conjunto total y una partición del mismo en dos subconjuntos; abreviadamente la denominaremos **Co**.

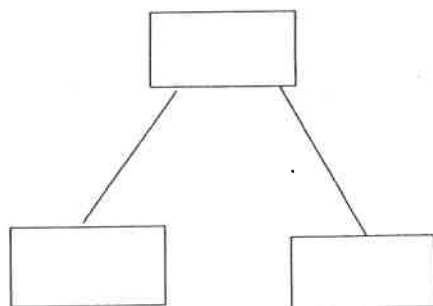
comparación, son problemas que implican una relación comparativa entre dos cantidades; abreviadamente **Cp**.

igualación, son aquellos problemas en los que se plantea una acción para lograr que una cantidad sea igual a otra; abreviadamente **Ig**.

Si atendemos a las posibilidades que ofrecen estas cuatro estructuras en los problemas de dos etapas encontramos las 16 opciones siguientes

(Ca, Ca); (Ca, Co); (Ca, Cp); (Ca, Ig); (Co, Co); (Co, Ca); (Co, Cp); (Co, Ig);
(Cp, Cp); (Cp, Ca); (Cp, Co); (Cp, Ig); (Ig, Ig); (Ig, Ca); (Ig, Co); (Ig, Cp).

Para analizar las posibilidades estructurales de los problemas de dos etapas Nesher (1991) utiliza el esquema:

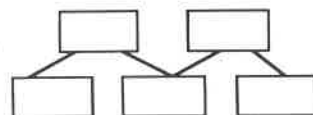
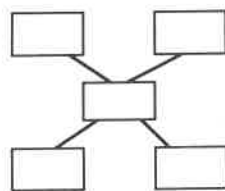
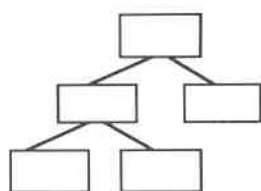


en donde los recuadros inferiores representan las cantidades que operan y el recuadro superior representa el resultado de esa operación. De acuerdo con este esquema, Nesher establece tres posibilidades para los problemas de dos etapas, que representa por:

A

B

C



En el caso A el resultado de una operación es un dato para la otra operación; en el caso B las dos operaciones comparten resultado; en el caso C las dos operaciones comparten un dato.

Limitamos nuestro estudio a problemas del tipo A, es decir, aquéllos en que el resultado de una operación entra como dato para la otra operación; con mayor precisión, vamos a considerar problemas en cuyo enunciado aparecen en primer lugar dos datos con los que hay que operar para obtener un tercer número, este otro número hay que operarlo a su vez con el tercer dato del enunciado para alcanzar la solución. Esquemáticamente:

datos ordenados del problema: a, b, c

orden de operaciones para alcanzar la solución:

$a * b \longrightarrow d$

$c * d \longrightarrow \text{solución}$

Hemos delimitado tres características clave para el estudio de problemas aritméticos de dos etapas:

operaciones, con cuatro posibilidades;

estructura semántica, con dieciséis posibilidades;

estructura ordenada de las operaciones, limitada a una opción.

Si consideramos otras características relevantes, vemos que las sentencias abiertas a las que se van a ajustar los problemas son:

$$1) (a + b) + c = []$$

$$2) (a + b) - c = []$$

$$3) (a - b) + c = []$$

$$4) (a - b) - c = []$$

debido a las operaciones contempladas y a la estructura ordenada de las operaciones.

Vamos a establecer un universo de problemas aritméticos de dos etapas en base a las características anteriores y manteniendo constantes en sus enunciados estas otras características:

- el tipo de números naturales;
- el tamaño de los números, inferiores a 60;
- el tamaño del resultado, inferior a 60;
- el tipo de magnitud: discreta;
- la naturaleza de los agentes: personas;
- el contexto del enunciado: familiar al niño;
- la longitud de los enunciados;
- la situación de la pregunta en el enunciado;
- el formato del enunciado: tres frases al final;
- separadas por signos de puntuación.

En las dos primeras frases se aportan los datos, manteniendo el mismo orden en el que luego hay que operar con ellos; en la tercera se plantea la pregunta.

Tenemos así un universo de 64 tipos de problemas aditivos de dos etapas, de los que hemos enunciado un problema por tipo (presentamos en este trabajo solamente 8 problemas, los correspondientes a una de las pruebas).

II. DESCRIPCION DEL INSTRUMENTO

Para obtener una primera información sobre las actuaciones de los alumnos de Primaria con problemas aditivos de dos etapas decidimos realizar un estudio exploratorio con alumnos de 5º nivel de EGB. Dado que estudiar los 64 tipos de problemas con los mismos alumnos podría resultar desmesurado, hicimos una clasificación en grupos de 8 problemas, lo que nos permitió elaborar 8 pruebas distintas.

Las características de estas pruebas son las que siguen.

Prueba A. Incluimos en esta prueba aquellos enunciados en los que la estructura semántica de las dos operaciones es la misma, es decir, los pares: (Ca, Ca); (Co, Co); (Cp, Cp); (Ig, Ig), y las dos operaciones también son idénticas: (+, +) y (-, -). Se presentan así 8 problemas que denominamos de **estructura duplicada** (a los que dedicamos este trabajo: Cuadro 1).

Prueba B. Los problemas de esta prueba tienen también la misma estructura semántica en las dos operaciones, como en el caso anterior, pero la segunda operación es distinta de la primera: (+, -) y (-, +). También surgen así 8 enunciados de problemas, simétricos por parejas respecto de las operaciones.

Prueba C. Hemos emparejado en esta prueba las estructuras de Cambio y Comparación (en el mismo enunciado), por una parte, y las estructuras de Combinación e Igualación, por la otra. Según que vaya primero una estructura u otra en cada pareja se presentan cuatro posibilidades: (Ca, Cp); (Cp, Ca); (Co, Ig); (Ig, Co). Si mantenemos el tipo de operación en cada problema, es decir, sólo consideramos los pares (+, +) y (-, -), tenemos otros 8 problemas. En este caso cada dos problemas son simétricos respecto de la estructura semántica, por un lado, o bien respecto de la operación global.

Prueba D. Elaborada con los mismos criterios que la prueba C, pero en este caso se emparejan las estructuras Cambio - Igualación, por un lado, y Comparación- Combinación, por otro. Se mantiene la operación en los dos pasos del mismo problema.

Prueba E. Elaborada con los mismos criterios que las dos anteriores, pero emparejando las estructuras Comparación-Igualación y Cambio-Combinación.

Prueba F. En este caso se vuelven a emparejar las estructuras Cambio-Comparación y Combinación-Igualación, como en la prueba C, pero los pares de operaciones que se contemplan por cada una de las cuatro combinaciones de estructura, son los pares (+, -) y

(-, +). Estos problemas son doblemente simétricos: en relación con el orden de las estructuras semánticas y en relación con el orden de operaciones.

Prueba G. Se vuelven a emparejar Cambio-Igualación y Comparación-Combinación, como en la prueba D; los pares de operaciones son también (+, -) y (-, +). Los pares de problemas tienen las dos simetrías posibles: estructura y orden de operación.

Prueba H. El emparejamiento de estructuras vuelve a ser el de la prueba E: Comparación- Igualación y Cambio- Combinación; los pares de operaciones son (+, -) y (-, +).

Cada una de las pruebas elaboradas estudia algún tipo de simetría, bien en relación con la estructura semántica (pruebas C, D y E), bien con respecto a las operaciones (prueba B), o bien con respecto a ambas (pruebas F, G y H); los problemas de la prueba A son sus propios simétricos.

III. CARACTERISTICAS DE LA MUESTRA

El estudio exploratorio lo realizamos durante el Curso 91-92 en 5 Colegios de Granada, elegidos intencionalmente. En cada uno de los Centros aplicamos una sola prueba; las tres últimas pruebas no se aplicaron en esta primera exploración. Los Colegios y pruebas aplicadas fueron:

Colegio Fuente Nueva (Granada), prueba A, número de alumnos 51
Colegio Juan XXIII, Chana (Granada), prueba B, número de alumnos 39
Colegio Ave María Casa Madre (Granada), prueba C, número alumnos 37
Colegio Nº 5º del Rosario, Purchil (Granada), prueba D, número alumnos 51
Colegio Santa Marta (Granada), prueba E, número de alumnos 35.

TOTAL = 5 Colegios de Granada 213 alumnos de 5º nivel

IV. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACION

1.- Analizar los niveles de idoneidad de Problemas Aritméticos aditivos de estructura duplicada e igual operación en 5º de E.G.B., centrándonos en la Prueba A solamente.

2.- Comparar el rendimiento de los alumnos en estos problemas según estructura semántica y tipo de operación.

3.- Neutralizar la influencia de variables relevantes en la resolución de Problemas Aritméticos de dos etapas con estas características.

V. LAS HIPOTESIS A CONTRASTAR

1.- Existen diferencias significativas en los niveles de rendimiento de alumnos de 5º de E.G.B. respecto a la tarea resolución de problemas aditivos de dos etapas con idéntica operación, resultando la variable (+,+) superior a la variable (-,-).

2.- No existen diferencias significativas en los niveles de rendimiento de los alumnos de 5º de E.G.B. respecto a la resolución de Problemas Aritméticos aditivos de dos etapas e idéntica estructura semántica, en los cuatro casos posibles: Ca-Ca ; Co-Co , Cp-Cp e Ig-Ig.

VI. ANALISIS DE RESULTADOS: PRUEBA A.

El Programa estadístico empleado para el análisis de los resultados obtenidos en la Prueba A ha sido el Stat View II™ para ordenadores Apple. Con este programa se han llevado a cabo los siguientes análisis:

1. Cálculo de Fiabilidad de la Prueba A.- A partir del estadístico de Cronbach, hemos obtenido un valor de $\alpha = 0,77$.

2. Índice de Dificultad de cada Item. El criterio empleado para la clasificación de los Items según su Índice de Dificultad ha sido el propuesto por la Investigación Granada Mats (1985).

CATEGORIA	ITEM	TOTAL ITEM
Muy Fácil (0,90-1)	Co-Co(+, +); Ca-Ca(+,+) Cp-Cp(-,-);	Tres
Fácil (0,80-0,89)	Cp-Cp(+,+); Ig-Ig (-,-); Ig-Ig (+,+)	Tres
Idóneo (0,70-0,79)	Ca-Ca(-,-); Co-Co(-,-)	Dos
Difícil (0,50-0,69)		
Muy Difícil (0-0,49)		

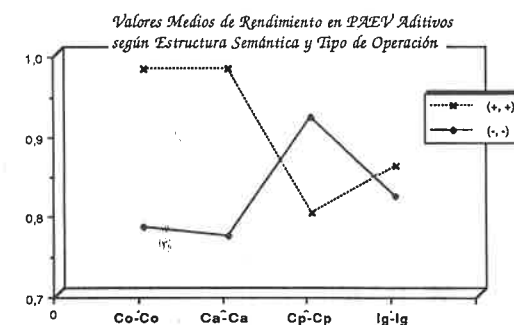
3. Índice de Dificultad de la Prueba. A partir de la media ponderada de los índices de dificultad de todos los ítems se ha obtenido este indicador, resultando I.D. = 0,86, catalogada como una prueba fácil para el nivel de 5º de E.G.B.

4. Índice de Homogeneidad. Este estadístico se ha utilizado para verificar la pertinencia o idoneidad de cada uno de los problemas a esta prueba, para ello se ha empleado el Coeficiente de correlación Biserial Puntual, puesto que una de las variables es dicotómica. A esta correlación le hemos aplicado un índice corrector debido que el número de ítems de la prueba es reducido. El valor obtenido en cada uno de los ítems aparece reflejado en la tabla que se adjunta.

5. Contraste de Hipótesis.- Para verificar las hipótesis planteadas, se ha utilizado el estadístico "T de Studens", comparando por una parte los cuatro problemas (+,+) con los cuatro problemas (-, -). A su vez, hemos abordado la comparación de parejas de problemas según idéntica estructura y distinto par de operaciones.

	Combinación-Combinación	Cambio-Cambio	Comparación-Comparación	Iguualación-Iguualación
(+,+)	Pedro tiene 17 bolas de madera blancas y 9 bolas de madera rojas. También tiene 22 bolas de cristal. ¿Cuántas bolas tiene Pedro? [Co-Co (+,+)] $\bar{X}=0,98$ $\sigma=0,14$ $\sigma^2=0,02$ I.D.= 0,98 I.H.= 0,67	Pedro tenía 23 video-juegos y por su cumpleaños compra 8. Su amigo Juan le regala 15 video-juegos. ¿Cuántos tiene ahora? [Ca-Ca (+,+)] $\bar{X}=0,98$ $\sigma=0,14$ $\sigma^2=0,02$ I.D.= 0,98 I.H.= 0,67	En lo que va de año, Pedro ha visto 23 películas más que Pedro. Juan ha visto 8 películas más que María. ¿Cuántas películas ha visto Juan? [Cp-Cp (+,+)] $\bar{X}=0,80$ $\sigma=0,40$ $\sigma^2=0,16$ I.D.= 0,80 I.H.= 0,79	Pedro tiene 25 PTA y para tener tantas como María necesita que le den 9 PTA. Para que María tenga tantas PTA como Juan necesita que le den 17 PTA. ¿Cuántas PTA tiene Juan? [Ig-Ig (+,+)] $\bar{X}=0,86$ $\sigma=0,35$ $\sigma^2=0,12$ I.D.= 0,86 I.H.= 0,77
(-,-)	Juan tiene 48 bolas, de las que 22 son de madera. De las de madera 9 son rojas y las demás blancas. ¿Cuántas bolas de madera tiene Juan? [Co-Co (-,-)] $\bar{X}=0,78$ $\sigma=0,42$ $\sigma^2=0,17$ I.D.= 0,78 I.H.= 0,87	Inés tenía 46 video-juegos y se le han roto 15. De los que le quedan le regala 8 a María. ¿Cuántos video-juegos tiene ahora? [Ca-Ca (-,-)] $\bar{X}=0,77$ $\sigma=0,43$ $\sigma^2=0,18$ I.D.= 0,77 I.H.= 0,64	En lo que va de año, Pedro ha visto 23 películas más que Pedro. Juan ha visto 8 películas más que María. ¿Cuántas películas ha visto Juan? [Cp-Cp (-,-)] $\bar{X}=0,92$ $\sigma=0,27$ $\sigma^2=0,07$ I.D.= 0,92 I.H.= 0,64	Inés tiene 51 PTA y para que Inés tenga tantas PTA como Pepa tiene que gastar 17 PTA. Para que Pepa tenga tantas PTA como Andrés, ésta tiene que gastar 9 PTA. ¿Cuántas PTA tiene Andrés? [Ig-Ig (-,-)] $\bar{X}=0,82$ $\sigma=0,39$ $\sigma^2=0,15$ I.D.= 0,82 I.H.= 0,67

Índice de Dificultad e Idoneidad de cada uno de los Problemas de la Prueba A, según estructura Semántica y Tipo de Operación



VII. CONCLUSIONES PROVISIONALES:

1. Puesto que la fiabilidad e índice global de dificultad es adecuado, e incluso fácil para el nivel de 5º, podemos concluir que, con las limitaciones de la muestra empleada, esta prueba puede servir como indicador del nivel de dominio que posee un alumno sobre las estructuras aditivas de dos pasos, igual operación e idéntica estructura semántica.

2. Globalmente, hemos obtenido diferencias significativas entre los cuatro problemas de estructura (+, +) frente a los de (-, -), siendo la media de los primeros más alta que la de los segundos. El análisis pormenorizado de cada una de las parejas de estructuras según tipo de operación produce diferencias significativas respecto a las estructuras Co-Co y Ca-Ca, en los dos casos puntuando más alto la operación suma. Sin embargo, hemos de aceptar la hipótesis nula para las estructuras Cp-Cp e Ig-Ig, admitiendo que no existen diferencias significativas.

3. Respecto a la segunda hipótesis hemos de aceptarla en totalidad, puesto que comparadas entre sí, todas las parejas de problemas con idéntica estructura semántica, no se han obtenido diferencias significativas en ningún caso. Podemos admitir que la variable estructura semántica está perfectamente controlada en esta prueba y no interfiere en el objetivo básico para el que fue diseñada: el estudio de la variable operación en problemas de dos pasos del tipo (+,+), y (-,-).

VIII. BIBLIOGRAFIA

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1982). The Development of Addition and Subtraction problem-solving skills , en T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (eds), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*, pp. 9-24. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T.P. y Moser, J.M. (1983). The Acquisition of Addition and Subtraction concepts, en R. Lesh y M. Landau (eds), *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 7-44. Orlando, Florida: Academic Press.

Castro, E.; Rico, L. y Gil, F. (1992). *Enfoques de Investigación en Problemas Verbales Aritméticos Aditivos* . Enseñanza de las Ciencias, Vol 10, nº 3.

Nesher, P. (1982). Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems, en T.P. Carpenter, J.M. Moser y T.A. Romberg (eds), *Addition and Subtraction: A cognitive perspective*, pp. 25-38. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. (1991). *Two-Steps problems, Research finding*, en Furinghetti, F. (ed.) *Proceedings Fifteenth PME Conference*, Vol. III, pp. 65-71. Assisi, Italia.

Rico, L. et al. (1985). Investigación "Granada-Mats" . Instituto de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada. Granada.

Rico, L. et al. (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas*. Granada: Departamento Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Shallin, V.L. y Bee, N. V. (1985). *Structural Differences between two-step word problems*, presentado en el Meeting de la American Educational Research Association.

BUSCANDO LAS CUATRO DIMENSIONES EN PRIMARIA A PARTIR DEL ENTORNO

Giménez, Joaquín

Facultad de Educación. Universidad de Tarragona

PRINCIPIOS

Si bien la geometría estaba muy olvidada en la etapa primaria hasta los planteamientos de la Reforma, aún más la vivencialidad de las cuatro dimensiones. En la propuesta didáctica que estamos experimentando (en el marco de cursos de formación del profesorado), nos basamos en el planteamiento interdisciplinar propuesto por P.Boero (1986), adaptado a los Ciclos de Primaria, y la vivencia específica de situaciones ligadas a la astronomía (Lorenzoni 1987). En ese sentido, se trata experiencialmente entre otros objetivos de lo siguiente: (a) asociar los elementos geométricos con el entorno, (b) reconocer diagnósticamente concepciones de los estudiantes sobre las vinculaciones espacio-temporales y trabajar específicamente sobre ellas, (c) integrar una metodología tipo laboratorio, adaptable a rincones de trabajo que usualmente realizan los profesores adaptando el estilo de cacería, investigación y problemas expuesto para secundaria en otro momento (Batlle, Burgués, Giménez, Partegás 1984) (d) incorporar una reflexión constante con diversas representaciones con énfasis en el lenguaje y (e) vivir experiencias imaginativas (Sauvy 1982).

LAS SECUENCIAS

Se integran diversos bloques de secuencias que corresponden a elementos de interés diversos con trabajos a distintos niveles de habilidad:

(1) Elementos del entorno natural, (2) El parque, (3) La ciudad, (4) Geometría y utilidad, (5) Rejas, (6) Chorizo y velas, (7) Figuras imposibles, (8) Monedas, (9) Sombras y (10) Vivimos en cuatro dimensiones.

El esquema general abierto se está empleando en la formación de profesorado con un diseño que permite la implantación inmediata, observación de dificultades de los alumnos, análisis de contenidos de las secuencias y elaboración de los consiguientes diseños curriculares en tercer nivel de concreción (Generalitat de Catalunya 1986) y colaboración a una dinámica cooperativa en los Centros. (El esquema de un grupo de esas actividades se muestra en el cuadro número 1)

La experiencia se lleva a cabo en un núcleo de escuelas de la provincia de Tarragona, con la colaboración de un coordinador pedagógico. Con todo ello, se trata de reconocer el contenido práctico del profesor, sus preconcepciones, tratar de modificar su conducta y ejercer así una influencia positiva en su aprendizaje.

	Nivel 3	Nivel 4
NATURALEZA	Estrellas y sombras	Instrumentos del jardín
PARQUE	Parques y formas	Caminando por el parque
CIUDAD	Observando casitas Escuelas y hospitales	Formas, fiestas y ciudades
GEOM UTIL	Usando las paralelas	Bancos y formas
REJAS	Reproduciendo una reja	Tramas con monedas
CHORIZOS	Cortando chorizos	Cortando cajas
FIG.IMPOSIBLES	Desapariciones	Rompecabezas
MONEDAS	Círculos y cruces	Construimos el círculo
SOMBRAS	Corrigiendo sombras	Sombras y ángulos
4 DIMENSIONES	¿Es larga la sombra?	Ordenando espacio-tiempo

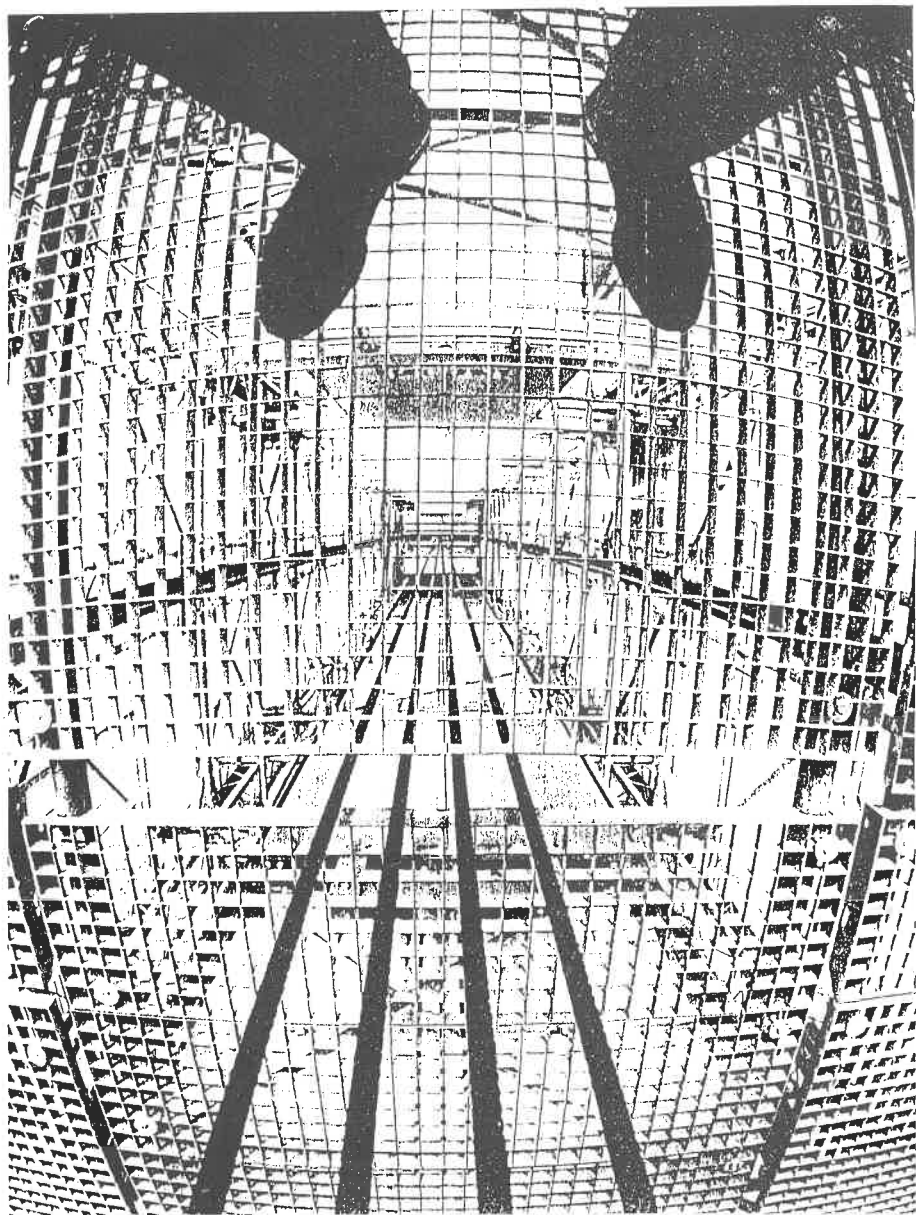
El diseño general de la gestión de la unidad con sus secuencias respectivas ofrece la posibilidad a los profesores de integrarla fácilmente en su propio diseño de concreción sin muchas adaptaciones. Implica el reconocimiento y uso de materiales diversos (espejos, sombras, geoplano, papel, etc), un trabajo constructivo, cooperativo, significativo y elementos de trabajo en la calle, patio, etc para vivir el espacio-tiempo. sin el olvido de hechos conceptuales clásicos como son: elementos proyectivos, pre-métricos, reconocimiento de formas, ángulos, movimientos, cambios, etc. en el marco de relaciones espacio-temporales simples hasta las clasificaciones. Se incluye un pre-esquema de evaluación que trata de incidir en la reflexión sobre los elementos de representación, visualización y análisis y sus implicaciones según elementos heurísticos, ámbito de realización y nivel de iconicidad entre otros (Anexo 1).

Los contenidos de formación reúnen : Visualización, Localización, Resolución de problemas y Representación, que se unen a niveles de actuación, planificación y control de la gestión didáctica. En las páginas siguientes se muestran algunos ejemplos (anexos 2 y 3), que sirven de ilustración del resumen expuesto.

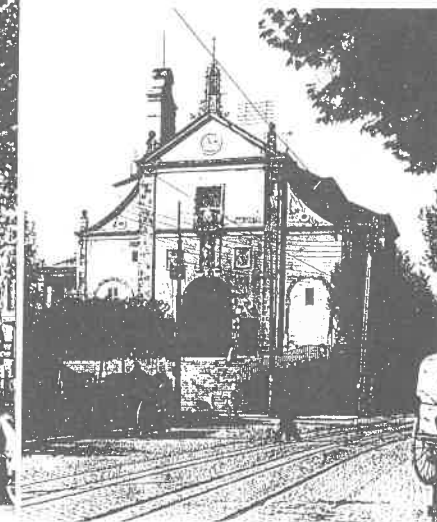
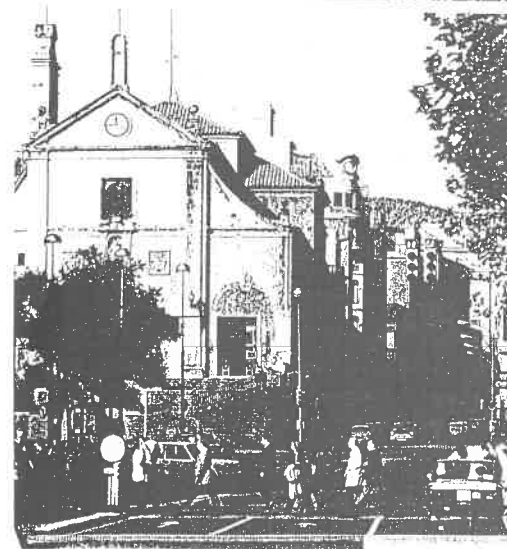
Anexo 1

ACTIVIDADES DE VISUALIZACIÓN DE RELACIONES EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL	Acción	Nivel de Conocimiento				Nivel heurístico				Habilidades							
		Dimensiones	Cambio de transformación	Presentación	Operaciones mentales repetidas	Representación			Foco de atención		Medios auxiliares	Percepc. global	Prop. particulares	Estab. relaciones	Secuencia de razonamiento	Rigor deductivo	
						Ext. verbales	Ext. visuales	Ext. Mixtas	Global	Parcial							
Interpretar representaciones gráficas de objetos tridimensionales.	Visitas top. ortogonal																
	Niveles del objeto Topografía																
	Códigos personales																
	Perspectiva isométrica																
Construir representaciones gráficas	Maqueta																
	Dibujo																
Efectuar transferencias y manipulaciones de imágenes mentales.	Pliegues																
	Descomposiciones																
	Secciones																
Comunicar y usar un lenguaje	Gráficos																
	Esquemas																
	Elem. verbales																
	Dibujo geométrico en 2D																
	Dibujos descriptivos																
	modelos reproducidos																

¡ Puede ser !

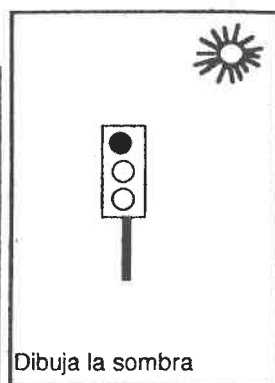
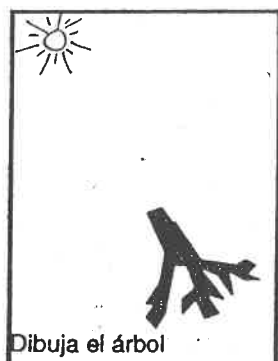


Ordenando espacio en el tiempo



¿Es larga la sombra?

Completa los dibujos



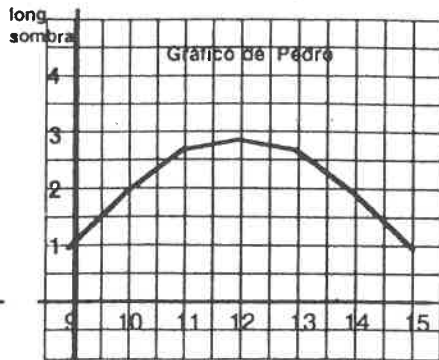
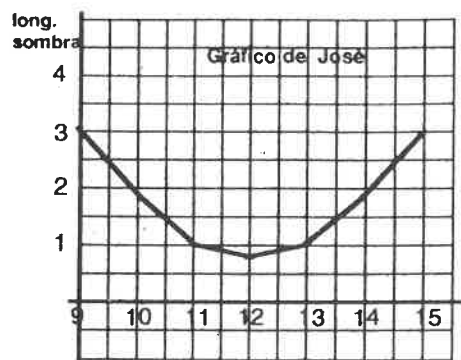
Laura ha medido su sombra a las 11 y ha visto que mide dos metros y diez centímetros.

Laura quiere dibujarla de manera que quepa. Hazlo reducido en una hoja cuadrada. ¿Cómo es la sombra de Laura?

Recuerda: Debes indicar 1 cuadrado = _____ cm.

Abajo reproducimos los gráficos dibujados por niños de 3º respecto la longitud de las sombras durante el día.

¿Cuál de los gráficos es el correcto? Explica por qué el otro está equivocado.



REFERENCIAS

ALSINA, C. (1988) *Una lliçó de matemàtica corporal.*, Fundació Caixa de Pensions, Barcelona.

ALSINA, C.; BURGUÉS, C.; FORTUNY, J.M. (1988) *Materiales para construir la geometría*, Síntesis, Madrid.

ALSINA, C.; FORTUNY, J.M. (1991) *Fascinant simetria*, Caixa de Pensions, Barcelona.

BATLLE, BURGUES, GIMENEZ, PARTEGAS (1984) "Cacería, investigación y problemas en la enseñanza de la geometría". 4 JAEM, Tenerife, pg. 181-188.

BOERO, P. coord. (1987) *Progeto di Genova*. Classe 2, 3, 4, 5, Univ. Genova.

BURGUÉS, C. (1992) "Endavant amb la Geometria", en *Exemples d'unitats de programació 2. L'educació primària*, Generalitat de Catalunya. Barcelona, pp. 269-329.

CANALS, M.A. et al. (1983) *Matemàticemos*, Onda, Barcelona.

CASTELNUOVO, E. (1981) *La geometria*, ED. Ketrés, Barcelona.

COLE, J.; BENYON, N. (1978) *Iniciación a la geografía*, Fontanella, Barcelona.

CORBERÓ et al. (1988) *Hacer mapas*, Alhambra, Madrid.

DIVERSOS (1989) *GAIM Project*, MacMillan education, Houndmills, London.

EMREL (1977) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*, OCDL, París.

FIELKER, D. (1987) *Rompiendo las cadenas de Euclides*, Subd. Gral. Form. Profesorado, Madrid, pp. 5-30.

GAY, M. et al. (1986) *Espace. Géographie et géométrie*, Ministère de l'Education Nationale, Bruxelles.

GENERALITAT DE CATALUNYA (1986) *Disseny curricular per l'ensenyament primari. Matemàtiques*. Barcelona.

GIMENEZ, J. (1989) *Prácticas de laboratorio de Geometría. Material para 7-11 años*, EUFP Burgos, Burgos.

GIMENEZ, J. (1993) *Razonar y mirar*, Taller Jornadas SCPM. Las Palmas.

IMENES, L.M. (1991) *Geometria das dobraduras*, Scipione, Sao Paulo.

KAMII, C. (1984) "Què aprenen els nens amb la manipulació dels objectes? a *In-fan-cia*. Rosa Sensat, Barcelona, pp. 6-10.

LORENZONI, F. (1987) *Astronomia per i bambini*. Docs. policopiados del autor.

MARTINEZ, A.; RIVAYA, J. (1990) *La enseñanza de la geometría*, Síntesis, Madrid.

MUNARI, B. (1973) *Diseño y comunicación visual*, Gustavo Gili, Barcelona.

SAUVY, J. (1979) *L'enfant et la géométrie*, Casterman, París.

SAUVY, J. et S. (1982) *El niño ante el espacio*, Pablo del Rio, Madrid.

VALLÉS, J. (1992) *Didàctica de la matemàtica al Cicle Inicial*. Rosa Sensat. Barcelona.

VILARRASA, A.; COLOMBO, F. (1988) *Mediodía*, Graó, Col. Punto y seguido, Barcelona.

TALLER: LA DISTRIBUCION ESPACIAL COMO RECURSO LOGICO

*Manuel Garcia Déniz y Ricardo Lorenzo Pérez
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*

El Taller trata de establecer unos objetivos, unos contenidos, unos procedimientos y unos materiales encaminados al proceso de enseñanza-aprendizaje de los recursos lógicos necesarios para un desarrollo del pensamiento matemático del niño y las herramientas necesarias para utilizar una estrategia gráfica de resolución de problemas.

El Informe Cockroft recomienda que "A lo largo de los años de primaria ha de prestarse atención a los diversos métodos de representación y de interpretación gráfica de los datos matemáticos y de la información así presentada... Los niños necesitan adquirir experiencia en una gran diversidad de trabajos gráficos; no se ha de insistir, pues, demasiado en el simple dibujo de gráficos. Lo esencial es comentar e interpretar la información contenida, tanto en los gráficos dibujados por los alumnos, como en otros ajenos a ellos. Debe pedírseles que recojan ejemplos de gráficos y diagramas en periódicos, revistas y libros, que comenten con detalle lo que en ellos se presenta y que saquen deducciones a partir de ahí... Además de dibujar gráficos que contengan información en forma de datos, algunos alumnos estarán en condiciones de elaborar otros que muestren relaciones matemáticas.

Hablar de lógica en relación con niños de corta edad tal vez resulte sorprendente para muchos, pero al hacerlo no se alude a nociones de gran complejidad teórica. Se trata más bien de describir las cosas con precisión, advirtiéndoles sus semejanzas y diferencias y determinando sus relaciones mutuas. En sus formas más sencillas, la actividad de clasificar objetos y registrar los resultados en un diagrama suele practicarse en las aulas de los alumnos de 5 a 7 años de edad, y constituye la base sobre la que después se erige el concepto mismo de número. A medida que los niños crecen, puede pasarse a actividades más complejas, tales como clasificar formas de diferentes colores, tamaños y espesores con arreglo a sus atributos (por ejemplo, "grande y azul", "delgado y cuadrado"). Cabe, pues, desarrollar gran variedad de trabajos de esta índole para fomentar la precisión en el lenguaje y el desarrollo del pensamiento lógico. Los juegos del tipo del tres en raya, el dominó y las damas estimulan asimismo el pensamiento lógico: "Si muevo ahí..., él moverá..., luego deberé..."

Meirovitz y Jacobs, por su parte, expresan que "La mayoría de la gente confunde las "facultades mentales" con la "inteligencia". En los últimos años, los psicólogos han empezado a aceptar que en la inteligencia se incluyan destrezas mentales muy distintas y que lo que alguien es capaz de hacer con

su mente depende de las experiencias que haya tenido. También incluyen la aptitud para adaptarse a las situaciones nuevas y para resolver problemas en un medio ambiente mudable.

Hay cuatro destrezas mentales importantes:

* LOGICA DEDUCTIVA: cómo ensamblar datos aislados pero relacionados entre sí, eliminar la información imprecisa y llegar a la conclusión requerida.

* LOGICA INDUCTIVA: cómo descubrir leyes mediante una observación cuidadosa de los elementos similares y distintos entre diversos casos.

* ESTRATEGIA: cómo trazar planes y organizar las cosas para alcanzar un objetivo determinado.

* PENSAMIENTO CREATIVO: cómo llegar a ideas nuevas y distintas.

Naturalmente, esas facultades no existen de manera aislada. Para ser creativo, hay que pensar inductivamente; se utiliza la lógica para planear una estrategia, etc. Además, intervienen otras muchas destrezas: toma de decisiones, visión de lo que va a suceder, planteamiento de prioridades, aceptación de los riesgos, predicción, paciencia y rapidez de reacción.

En general, las escuelas no están preparadas para enseñar a pensar. Les falta el material apropiado. La mayoría de los maestros carecen de la preparación precisa para enseñar las destrezas mentales y les da miedo intentarlo."

En este Taller proponemos los siguientes:

OBJETIVOS

- Dar una visión práctica de los recursos lógicos.
- Utilizar las matemáticas como una herramienta para reflexionar.
- Utilizar los gráficos como una estrategia básica en la resolución de problemas.

CONTENIDOS

1. Distribuciones espaciales.
2. Lenguaje gráfico.
3. Lenguaje lógico.
4. Análisis y estructuración de la información.
5. Sentido dinámico de la matemática.
6. Resolución de problemas.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas tiene como finalidades el desarrollo del RAZONAMIENTO LOGICO, del PENSAMIENTO CUANTITATIVO y de la INTUICION ESPACIAL.

Mediante la observación y la experimentación se pasará de situaciones reales y realistas a la aplicación a nuevas situaciones, todo ello con un espíritu lúdico, crítico y creativo.

Es necesario huir de los conocimientos teóricos y abstractos alejados de la realidad del niño.

El aprendizaje de las matemáticas es un proceso hacia la abstracción que se inicia ante situaciones concretas y que los alumnos deben ir alcanzando en forma progresiva.

Este proceso debe realizarse por etapas y fases:

ETAPAS: manipulativa —> icónica —> simbólica

FASES: introducción —> fijación —> aplicación

Y debe ser un proceso activo, aprovechando siempre el carácter lúdico y con las actividades como eje central del trabajo, con discusiones colectivas, explorando y cuantificando la realidad para resolver problemas.

La lógica debe convertirse en el lenguaje de uso común a la hora de hacer matemáticas. El uso de la lógica y las colecciones de objetos permiten la matematización de algunas formas de razonamiento.

Los recursos gráficos, mediante la utilización de las distribuciones espaciales, permiten ordenar, seleccionar, valorar e interpretar la información y establecer nuevas relaciones con el fin de resolver problemas.

La LOGICA en la Educación Primaria es una herramienta para reflexionar, de tipo no conceptual y sí eminentemente práctica. Una COLECCION DE OBJETOS es una alternativa al término CONJUNTO, pero también un cambio en el procedimiento didáctico.

Es necesario acostumbrar al alumno a realizar distribuciones espaciales y a destacar las ideas de operador y de función, representando a través de diagramas no de símbolos.

El programa de trabajo para toda la etapa de Educación Primaria comprendería los siguientes contenidos:

1. Identificar colecciones.
2. Hacer "distribuciones espaciales" de colecciones de objetos.
3. Reconocer, caracterizar y representar subcolecciones.
4. Clasificar y ordenar objetos.
5. Utilizar los atributos como expresiones enunciativas.
6. Establecer correspondencias entre colecciones y relaciones entre objetos.
7. Introducir problemas de localización en el plano.
8. Utilizar el lenguaje gráfico para analizar situaciones.

Su desarrollo en objetivos podría ser:

I. Identificar colecciones señalando todos sus elementos. Identificar colecciones indicando una propiedad sencilla o atributo que caracterice cada colección.

1. Formar colecciones de objetos, utilizando como referencial objetos de uso corriente, distinguiéndolas y expresándolas verbalmente.

BLOQUES LOGICOS, BARAJAS LOGICAS, ANIMALES, VEHICULOS, OFICIOS, MUEBLES, MARCAS, ARBOLES, FLORES, ALIMENTOS, CUADRILATEROS, TRIANGULOS, NUMEROS, LOS NIÑOS, EL MATERIAL, ...

2. Formar colecciones de objetos, utilizando como referencial objetos de uso frecuente, representándolas ideográficamente mediante el uso de distintos diagramas.

DIAGRAMAS DE DOBLE ENTRADA, JUEGOS, ...

3. Identificar colecciones señalando todos sus elementos.
DIAGRAMAS EN CARTULINA

4. Identificar colecciones indicando una propiedad sencilla o atributo que caracterice cada colección y expresándolo mediante una etiqueta.
JUEGOS DE ETIQUETAS

II. Hacer distribuciones espaciales de colecciones de objetos utilizando diferentes diagramas, comenzando con distribuciones de una sola región hasta alcanzar ocho o dieciséis regiones.

1. Hacer distribuciones espaciales de cuatro regiones a partir de colecciones de objetos y utilizando diferentes diagramas.

DIAGRAMAS RECTANGULARES, DE DOBLE ENTRADA, DE VENN-EULER, DE CARROLL, DE KARNAUGH, DE ARBOL

2. Hacer distribuciones espaciales de ocho o dieciséis regiones a partir de colecciones de objetos y utilizando diferentes diagramas.

III. Reconocer, caracterizar y representar subcolecciones dentro de distintas "distribuciones espaciales" de colecciones de objetos.

1. Reconocer y caracterizar subcolecciones dentro de distintas distribuciones espaciales de colecciones de objetos, expresándolo mediante etiquetas.

2. Representar subcolecciones dentro de distintas distribuciones espaciales de colecciones de objetos, expresándolos ideográficamente mediante el uso de distintos diagramas.

IV. Clasificar y ordenar objetos en diferentes colecciones.

1. Distinguir las subcolecciones como partes de un todo que son las colecciones.

2. Clasificar objetos en diferentes colecciones, mediante criterios sencillos.

3. Seriar y ordenar objetos en diferentes colecciones, mediante criterios sencillos.

V. Utilizar la propiedad o atributo que caracteriza a las colecciones de objetos como una expresión enunciativa y obtener de ellas otras expresiones mediante la negación, conjunción o disyunción de estas propiedades en diferentes "distribuciones espaciales" de colecciones de objetos.

1. NEGACION → 2. CONJUNCION → 3. DISYUNCION

expresándolas mediante nuevas etiquetas

- VALOR DE VERDAD: absoluto y relativo

- "SER EL NEGATIVO DE" / "SER LO CONTRARIO DE"

VI. Utilizar diferentes diagramas (sagital, cartesiano, de celdillas, de Hasse, ...) para establecer mediante leyes sencillas, correspondencias entre diferentes colecciones de objetos y relaciones entre los objetos de una misma colección.

1. Utilizar diferentes diagramas (sagital, cartesiano, de celdillas, de Hasse, ...) para establecer, a través de leyes sencillas, correspondencias entre diferentes colecciones de objetos.

2. Utilizar diferentes diagramas (sagital, cartesiano, de celdillas, de Hasse, ...) para establecer, a través de leyes sencillas, relaciones entre los objetos de una misma colección.

- TABLAS

- ITINERARIOS

- ORDENACIONES

- JUEGO DEL GOLF

VI. Utilizar los gráficos cartesianos para introducir al alumno en problemas sencillos de localización (planos, geoplanos, mapas, esfera terrestre, ...) expresándolos como pares ordenados.

1. Con gráficos de celdillas.
2. Con gráficos cartesianos.
 - PUZZLES
 - LOCALIZACION EN LA CLASE
 - LOCALIZACION EN EL PATIO
 - LOCALIZACION EN EL DIBUJO
 - LOCALIZACION DE UN PUNTO EN EL PLANO
 - GEOPLANO CON COORDENADAS
 - BUSQUEDA DEL TESORO

VIII. Utilizar el lenguaje gráfico anterior para analizar situaciones diversas que puedan presentarse en la aritmética, en la medida, en la geometría y en la vida real.

EL USO DE ESTRATEGIAS DE COMPOSICIÓN Y COMPARACION DE FIGURAS EN ENSEÑANZA PRIMARIA

*Gil, F.; Moreno, M.F.; Olmo, M.A. del
Dpto. Didáctica Matemática. Universidad de Granada. Sección Almería*

1. INTRODUCCION

Hay dos posibles construcciones matemáticas de la magnitudes geométricas, la métrica y la geométrica. Pero el esquema geométrico (con su apoyo físico) está en la base de la construcción.

Las magnitudes son objeto de cálculo que puede ser: cualitativo ("es más grande que"), casi numérico ("será el doble de grande que"), numérico (una vez fijada la unidad de medida) o algebraico ($S = a.b$) (Rogalski 1982).

Nosotros estamos interesados en el estudio de los problemas no métricos, es decir, cualitativos o casi numéricos de la magnitud superficie.

Los trabajos de Vergnaud y colaboradores (1983) sobre el volumen concluyen que existen determinadas técnicas o estrategias de comparación de volúmenes (por ejemplo un sólido macizo y un recipiente) que plantean dificultades a los niños de 12-13 años. En preguntas de clase hemos comprobado que dichas dificultades persisten en alumnos universitarios.

Esto nos ha motivado el plantearnos la operatividad del concepto de superficie que tienen los niños, y qué acciones elementales (no métricas, ni numéricas) son capaces de realizar.

Para ello nos centraremos en dos acciones, que consideramos fundamentales: la composición de figuras, y la comparación de figuras (Freudenthal 1983).

Queremos estudiar: las estrategias de los niños al componer superficies, las técnicas empleadas para compararlas y determinar variantes de comportamiento.

Para realizar nuestro estudio comenzamos elaborando una tabla de situaciones, después se diseñó un cuestionario y éste se usó como base para una entrevista a los niños.

2. TABLA DE SITUACIONES

COMPOSICION DE FIGURAS

Iguales

- Dos triángulos rectángulos isósceles.
- Dos cuadrados.
- Cuatro triángulos.

(Recomponer)

(Fracc. y recom.)

(Recomponer)

Semejantes

- Dos triángulos rectángulos.
- Dos rombos.

(Recomponer)

(Fracc. y recom.)

Cualesquiera

- Un triángulo y un trapecioide.

COMPARACION DE FIGURAS

Contenida una en la otra.

- Un triángulo contenido en un cuadrado,

(Superponer)

No contenida una en otra,

- Cuadrado y triángulo rectángulo con un lado igual.

(Fracc. y recom.)

- Cuadrado y círculo.

3. EL GUION DE ENTREVISTA

La tabla anterior nos condujo al siguiente guión:

1. Con dos triángulos rectángulos isósceles iguales dados. Formar una figura mayor. ¿Y un triángulo rectángulo, se puede formar?

2. Con dos cuadrados iguales. Formar una figura. ¿Y un cuadrado se puede formar?

3. Con cuatro triángulos rectángulos iguales. Formar una figura mayor. ¿Puedes formar otro triángulo?

4. Con dos triángulos rectángulos semejantes, tal que tenían un cateto igual. Formar una figura. ¿Y un triángulo rectángulo, se puede formar?

5. Con dos rombos semejantes. Formar una figura mayor. ¿Y un rombo se puede formar?

6. Con un triángulo rectángulo y un romboide. Formar una figura mayor.

7. Dados un cuadrado y un triángulo isósceles (que puede ser inscrito en aquel). ¿Cuál es mayor?. ¿Por qué?

8. Dados un cuadrado y triángulo rectángulo (de la misma altura, y este último un poco menos del doble de base que aquel). ¿Cuál es mayor?. ¿Por qué?

9. Dados un cuadrado y un círculo (no contenidos uno en otro). ¿Cuál es mayor?. ¿Por qué?

3. LA PRUEBA

La prueba la realizamos a finales del curso 91-92 en dos grupos de niños de 3º y de 7º de dos colegios de Almería capital, uno céntrico (Freinet) y otro periférico (S. Luis), en total fueron entrevistados 40 niños.

Los niños se eligieron al azar entre los del curso (10 de cada uno) y los colegios fueron uno de nivel sociocultural medio-alto y otro de nivel bajo.

El cuestionario estaba compuesto de 9 ítem, 6 de composición y 3 de comparación. En todos los casos a los niños se les proporcionaba las figuras recortadas en papel y se les decía que podían dibujar sobre ellas, recortar, doblar o lo que quisieran. El entrevistador tomaba nota de los composiciones que hacía el niño y de las afirmaciones que realizaba.

4. ANALISIS DE LA PRUEBA Y RESULTADOS

4.1. Clasificación de las respuestas.

Respecto de los seis primeros ítems de **composición** se ha tabulado: si resuelve o no la tarea, la figura que propone como resultado, y la técnica que sigue, obteniéndose la siguiente tabla:

Item	0				1				2				3				4				(Estrategia)
	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	
1 R					17				1				2								
B					19				1												
2 R					27	3	5		1	1		1									
B					2																
M					1																
3 R		1			14		1		4			5					4				
B					9							1									
M					2																
4 R					13				10												
B					13																
M	3		1		1	2			1	1			2								
5 R					1				17	3		6	2								
B																					
M	3				2				2	1	3										
6 B									22	4	3										

Por filas aparece el número del ítem y dos o tres filas para cada uno indicando si la respuesta es errónea (M), correcta solo en la primera parte (R) o totalmente correcta (B).

Por columnas aparece el tipo de respuesta o figura producida: (0) no sabe o no contesta, (1) construye una figura convexa (como un rectángulo), (2)

construye una figura conexa por región (por ejemplo, un cuadrado y un triángulo unidos por un lado no siendo ambos lados iguales), (3) arco conexa (une las figuras por un vértice), (4) incrementa superficie (produce una figura con un hueco interior).

Por subcolumnas aparece la estrategia: (0) no sabe, (1) compone, (2) fracciona y compone, (3) fracciona y no compone con todas las partes.

Se puede observar que la estrategia más común es la de componer; cuando las figuras tienen uno o más lados iguales componen y producen una figura convexa; en caso contrario utilizan también la estrategia de fraccionamiento y producen figuras conexas por región.

En cuanto a la figura, en los cuatro primeros ítems elaboran figuras convexas y en los dos, restantes conexas por región.

Las preguntas suelen plantear dificultad a los niños, la que más el ítem 2 que únicamente resuelven dos niños.

Los tres últimos ítems de comparación arrojaron los siguientes resultados:

		RAZONAMIENTO												(Técnica)							
		0		1		2		3		4		5			6		7		8		9
Item	M	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
7	B			1						1						1					
	B			12	1	7	6	1		2		3				1		1	2	1	37
8	M	2		11		3				1		1				1					19
	B	1		4		1	4					1		10							21
9	M	2		2	1	2	1					1		4		1					14
	B		1	2				15				4		2				2			26
Total		5	1	32	2	13	26	1		4		9	1	16	1	3		3	2	1	

Por filas aparecen los ítems 7, 8 y 9 , y las respuestas erróneas (M) y las correctas (B).

Por columnas el tipo de razonamiento empleado: (0) no contesta. (1) razona en términos de la longitud de una dimensión, (2) de extensión, (3) mixto - longitud-superficie, (4) dos dimensiones, (5) de figura, (6) de componer, (7) de una parte, (8) inclusión, (9) volumen.

Las subcolumnas se refieren a la técnica seguida: (1) aprecia o estima, (2) superpone.

Lo primero que destaca es el gran número de respuestas correctas en los tres ítem 37, 21 y 26 respectivamente.

Los razonamientos más usuales son: el (2) con 39 de 120, el (1) con 34, el 6 con 16, el (5) con 10.

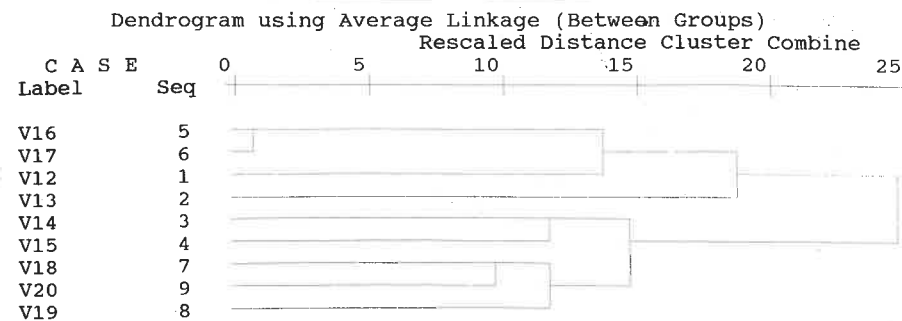
En polígonos está equilibrado el número de los que utilizan un razonamiento lineal y los que razonan en términos de superficie, pero si la figura es curvilínea el razonamiento es fundamentalmente en términos de superficie. Cuando el razonamiento es de tipo lineal la técnica empleada es la de apreciar y cuando se razona en términos de superficie la más usada es la de superponer. Esta es mejor técnica (produce mayor índice de éxitos) que la primera. La técnica más usada es la de apreciar (1) con 88 de 120 frente a la de superponer 52.

4.2 Tratamiento estadístico de los datos.

MEDIAS DE LOS ÍTEMES								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.55	0.05	0.25	0.375	0.825	0.725	0.925	0.525	0.65

Realizando un análisis cluster de los ítem, con 4 cluster, se producen los siguientes

agrupamientos I5-I6 (el más fuerte 0.64)- I1, I2, I3-I4, I7-I9-I8 (este último el más previsible).



Sometidas todas las variables de un análisis factorial se establecen 10 factores que podríamos catalogar

- Un primer factor que sería el curso o la edad con gran influencia de los tres últimos ítems.

- El segundo podría corresponder al colegio con gran influencia de los ítem 5 y 6.

- El tercero al sexo con gran peso de los ítems 1 y 4.

- El cuarto recae entre R9 y F6.

- El quinto en 13.

- El sexto en 12.

- El séptimo en 17 y E2.

- El octavo en E4.

- El noveno en F5.

- El décimo en T7 y R7. (Aunque estos últimos son más bien residuales y explican bastante menos varianza que los primeros).

Globalmente este trabajo nos confirma algunas de nuestras intuiciones de partida, nos conduce a reelaborar la tabla de situaciones y el cuestionario a replantearnos globalmente el problema.

BIBLIOGRAFIA

Douady, R. y Perrin, M.J. (1989). "Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane". *Educational Studies in Mathematic*, 20.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. D. Reidel, Dordrecht.

Olmo, M.A. del y otros (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Síntesis, Madrid.

Rogalski, J. (1982). "Acquisition de notions relatives a la dimensionnalité des mesures spatiales (longueur, surface)". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 343-396.

Schneider, M. (1991) "Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11 (2,3).

Vergnaud, G. (1983). "Multiplicative structures". En Lesh y Landau (editores) *Acquisition of concepts and processes*. Academic Press. Orlando (Florida).

Vergnaud, G. y otros (1983). "Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième (12-13 ans)". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (1).

INTRODUCCION DE LA MEDIDA DE SUPERFICIE EN LA ESCUELA PRIMARIA

M^a Antonia Canals

Escola de Mestres. Girona

INTRODUCCION

La Medida es quizás la parte de las Matemáticas de la cual podemos decir más categoricamente que no se trata de enseñarla, ni tan sólo de aprenderla. ¡Se trata de practicarla!

La Medida se refiere al aspecto cuantitativo de algunas magnitudes, a menudo físicas, a las cuales encontramos una forma de hacer corresponder un número a una magnitud (por ejemplo a una longitud, a un volumen, a una masa, a un tiempo ...), arranca del hecho de que dichas magnitudes se nos presentan, en la vida cotidiana, en parcelas que son comparables por criterios de "más", "menos", e "igual". Así pues, aunque la medida propiamente dicha no empieza hasta que se compara la magnitud con una unidad, la comparación de magnitudes entre sí por criterios cuantitativos se encuentra hasta tal punto en la base de la noción de medida, que es inseparable de su génesis en el niño.

Esto lo vemos claramente cuando observamos la conducta de los niños por ejemplo en el caso de la longitud: antes de llegar a la noción de medida de longitud, que suele construirse simultáneamente a la de cantidad discreta, los niños comparan objetos por su longitud y distinguen claramente el más largo del más corto. Por otro lado en la práctica escolar solemos respetar este ritmo en el tratamiento de las medidas de longitud y de masa (peso), ya que se trata de un proceso que empieza en la etapa Infantil, en la cual es indiscutible la prioridad de las actividades sensoriales, mientras que la medida propiamente dicha, con la consiguiente introducción de una unidad, no empieza hasta el final de esta etapa o inicio de la de Primaria, y entonces el sujeto que ha de practicarla ya ha adquirido una noción de qué es la longitud o qué es el peso de un objeto, basada en el ejercicio de la percepción sensorial a lo largo de una serie de experiencias manipulativas y vivencias propias.

Esta etapa, que podríamos llamar "de preparación" de la medida es indispensable para una correcta práctica de la misma, en todas las magnitudes. Las principales actividades que la caracterizan son:

- * relacionar, comparando entre sí, dos cantidades de la misma magnitud.

- * ordenar diversas cantidades de una magnitud.

- * realizar con ellas operaciones (manipulando) de composición y descomposición.

Sólo después de haber asegurado las actividades de esta primera etapa

podemos introducir una unidad, y por medio de ella hacer corresponder un número a cada cantidad de una misma magnitud, es decir, podemos empezar la medida propiamente dicha.

Más adelante, de la práctica de la medida se desprenderá la necesidad de establecer otras unidades más grandes o más pequeñas, la necesidad de hacer cálculos para combinar resultados, y sobre todo la necesidad de aproximar cada vez más, ya que las magnitudes reales no se presentan en cantidades exactas; y de ahí nace la necesidad de usar otros números, como los fraccionarios, y sobre todo los decimales.

SITUACION ACTUAL EN LA ESCUELA

En la Escuela, al trabajar las medidas de tiempo, ya no solemos respetar tanto la secuencia de estas etapas, y a menudo empezamos con la lectura del reloj, que ya supone una unidad y el manejo de números, sin asegurar previamente la primera etapa, con lo cual los niños no tienen una suficiente noción real del tiempo. ni que decir tiene que así ocurre también con la medida de ángulos...

Pero allí donde este defecto llega a extremos más deplorables es en las medidas de superficie y de volumen. En efecto, puesto que éstas son en sí mismas más difíciles, y puesto que los cálculos que provocan suponen el conocimiento de cuadrados y cubos, no se introducen hasta el 3º Ciclo de Primaria, y la Secundaria, respectivamente. Y entonces se supone (no por algún fundamento psico-pedagógico, sino simplemente por mala costumbre) que los alumnos ya no tienen edad de "tocar y mirar" las cosas, sino de hacer unas matemáticas "serias"; por eso se prescinde totalmente de la primera etapa, y se introducen las áreas y volúmenes directamente a partir de la definición de la unidad (cm^2 o cm^3), y por la vía del cálculo, más aun, de las formulas, descuidando totalmente todas aquellas actividades que, tal como acabamos de decir, son previas y fundamentales. El resultado suele ser que los alumnos se habituán al lenguaje propio de la materia, a la conversión mecánica de unas unidades a otras, y a ciertos procedimientos estereotipados para la resolución de problemas referentes al tema. Pero la inmensa mayoría de ellos no tienen una auténtica noción de qué es en realidad el área o el volumen de una figura, de un cuerpo u objeto. En realidad no "miden" nada; tan sólo "calculan" y "aprenden" una información. Resumiendo, en nuestro lenguaje de hoy, no construyen un conocimiento significativo.

UNA PROPUESTA PARA LA MEDIDA DE SUPERFICIE

Hablaremos aquí solamente de la medida de superficie, para centrar el tema. Para la de volumen, sería aconsejable un proceso análogo, diferido tan sólo en uno o dos años.

Precisamente para salir al paso del grave error que antes hemos analizado, algunos maestros del grupo de Matemáticas "Perímetro" de Girona, hemos preparado y experimentado con alumnos de 3º, 4º y 5º cursos de Primaria una serie de actividades manipulativas que se enmarcan dentro de la etapa experimental de preparación de la medida de superficie, llegando hasta el inicio de la 2ª fase, es decir hasta la introducción del cm^2 , con el objetivo de que lleguen al momento de empezar la práctica de esa medida (en 6º curso) con la preparación suficiente, y así puedan entrar en el campo de las fórmulas y los cálculos numéricos con una previa noción real de la naturaleza de la superficie. Como consecuencia de este trabajo realizado, aquí presentamos: por un lado, la reflexión que acabamos de exponer, y por otro lado, las grandes líneas y unos ejemplos de la experiencia realizada, con el deseo de que sirvan respectivamente de toque de alerta y de posibles pistas de actividad en el aula para otros compañeros.

ACTIVIDADES CON EL TANGRAM

- Comparación de dos superficies por criterios de mayor, menor, igual, doble, mitad.

- Noción de figuras equivalentes: aquellas que, aun teniendo distinta forma, tienen la misma vantidad de superficie. Las descubrimos porque podemos recubrir las con las mismas piezas.

- Ordenar figuras por su superficie.

- Composición de figuras:

* con todas las piezas (librito de juego)

* con algunas piezas

* figuras previamente conocidas: rectángulo, cuadrado, romboide, triángulo, isósceles, equilátero, trapecio, exágono, etc... Algunas tienen varias soluciones. Otras, ninguna.

- Descomposición de figuras.

- Paso de una figura a otras añadiendo, quitando o cambiando piezas, con previa estimación.

Notemos que hasta aquí, estamos relacionando superficies y operando con ellas. En este momento introducimos una primera unidad arbitraria (la más cómoda).

- Cuantificación de superficies tomando como unidad la pieza menor (t).

- Comparar entre sí las superficies de diversas figuras, a partir del número de veces que contienen la unidad.

- Expresar la fracción que representa la superficie de cualquier figura trabajada, respecto de la superficie total del Tangram.

- Áreas de la pieza cuadrada C, por comparación con el dibujo de 1 cm^2 .

- Áreas de las otras piezas del Tangram, por relación con el área de C (sin conocer previamente la manera de calcular el área de un triángulo)

- Cálculo, en cm^2 del área de diversas figuras construidas con el Tangram, con previa estimación.

- Construir figuras que tengan un área prefijada.

- Constatación de que el Tangram nos sirve solamente para calcular el área de muy pocas figuras.

ACTIVIDADES CON EL GEOPLANO Y CON CUADRICULAS

Estas se sitúan en la última fase de la primera etapa, es decir, en el momento de la introducción de la unidad.

Los pasos que se detallan a continuación pueden realizarse con el geoplano, tomando un cuadrado del mismo como unidad, y llamándole "u", y luego con cuadrícula de 1 cm^2 de trama.

- Reconocimiento de áreas de cuadrados y rectángulos, contando cuadrillos.

- Descubrimiento de que pueden hallarse multiplicando base por altura (para no tener que contar). escritura numérica.

- Idem para el área de triángulos: triángulo rectángulo cualquiera, con un lado y los vértices coincidiendo con la trama.

- Área de algunas figuras poligonales (cumpliendo las condiciones anteriores), por descomposición y suma de las áreas de las partes.

- Expresión matemática correcta de los cálculos realizados, como preparación a las futuras fórmulas.

- Constatación de que el geoplano y la cuadrícula, con el método usado hasta ahora, sólo nos permiten hallar el área de algunas figuras muy especiales.

- Subdivisión de la cuadrícula en otra de $0,5 \text{ cm}$. de lado. Paso de las expresiones en cm^2 a las expresiones de las mismas medidas con la nueva unidad.

METODO EXPERIMENTAL INDIRECTO

Este método permite hallar el área de cualquier figura plana, poligonal o no. Le llamamos indirecto, porque no consiste en la aplicación directa de la unidad sobre la superficie a medir. Además, es un sistema que no permite una buena exactitud. Sin embargo hay que apreciar el hecho de que su resultado no depende de la forma de la figura, cosa que hasta ahora era como un obstáculo insalvable.

- Adquirir una plancha de madera u otra materia algo pesada, de forma cuadrada. Medir el lado y calcular los cm^2 de la plancha.

- Pesar la plancha, y dividiendo el peso, en gramos, por el número de cm^2 , averiguar el peso de 1 cm^2 de la plancha.

- Aplicar la figura cuya superficie queremos medir, sobre un papel, perfilar su contorno y recortarla (normalmente con la ayuda de una sierra).

- Pesar la figura así obtenida.

- Dividir el peso, expresado en gr., por el peso de 1 cm^2 de la plancha (que ya conocemos). El resultado es el número de cm^2 que ocupa la superficie de la figura.

AREA Y PERIMETRO DE FIGURAS PLANAS, POR APROXIMACION, CON CUADRICULA

Este sistema es bastante conocido. Aunque aquí lo contemplamos en el contexto de la medida de superficie, en la práctica hemos aprovechado la ocasión para trabajar al mismo tiempo la medida del perímetro de figuras cualesquiera (en general no poligonales).

- Aproximación, por defecto, con la mayor figura poligonal posible, interior a la dada.

- Idem, por exceso, con la menor figura posible, exterior.

- Comparación de los dos resultados. Noción de aproximación y del margen de error. Expresión en lenguaje matemático.

- Subdivisión de la cuadrícula a causa de la necesidad de mayor aproximación. Elección de una unidad submúltiplo (En nuestro caso, la cuarta parte del cm^2).

- Repetición del proceso y nueva expresión matemática, teniendo en cuenta la equivalencia de unidades.

- Comparación del cambio de unidades para el perímetro y para el área.

- Intuición de la dificultad de la medida del perímetro y del área de figuras planas en general, y en particular del círculo.

Notemos como esta experiencia nos ha llevado entrar en los verdaderos problemas de la medida de superficie, que son:

- El mismo concepto de superficie (no es fácil, según la forma de las distintas figuras, aplicarles directamente una unidad y ver cuantas veces cabe; y con un cálculo sencillo, sólo se resuelven algunos casos).

- el significado o concepto de aproximación, común a todas las medidas
- el cambio de unidades, que en la superficie no sigue la misma ley que para la longitud

- la necesidad de usar otros números, no enteros, para expresar las progresivas aproximaciones. Hemos de recurrir a los decimales, pero incluso éstos no nos bastarán siempre...

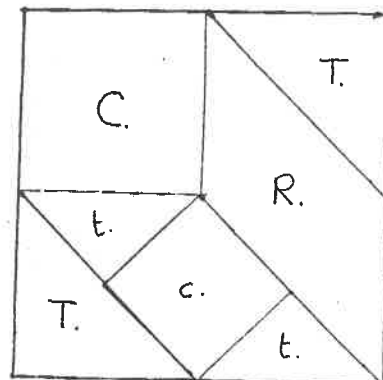
Pensemos que muy pronto, al final de la Primaria, los alumnos se enfrentarán con el caso de la longitud de la circunferencia, y oirán hablar por primera vez del número "pi". Conviene, pues, abrir su mentalidad para que puedan entrever el sentido de este número (que nunca llega a ser exacto...).

A partir de las nociones aquí trabajadas, pensamos que los alumnos de 6º curso, pueden ya seguir con la medida de superficie, de la forma que siempre se viene haciendo, pero con mejor base, por tanto esperamos que con mejores resultados. Pero, eso sí, continuando siempre con la práctica de la medida directa, de forma experimental, y en conexión con la realidad de su entorno.

Nosotros no hemos podido todavía comprobar resultados en alumnos de esta edad, ya que estamos empezando la Reforma por la base.

Desde aquí, queremos invitaros a experimentarlo también.

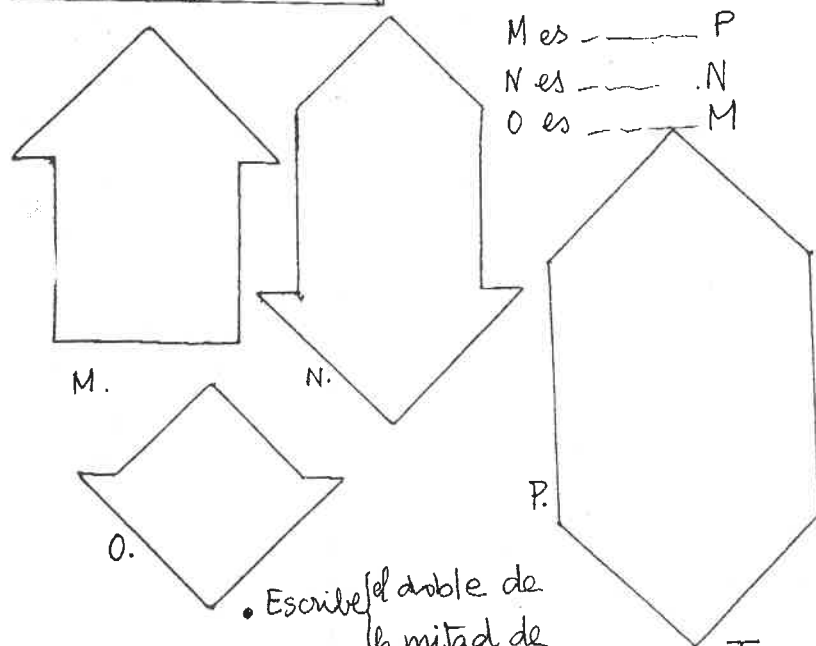
EJEMPLO 1.



Piezas del Tangram.

• Escribe: { mayor que
menor que
igual que

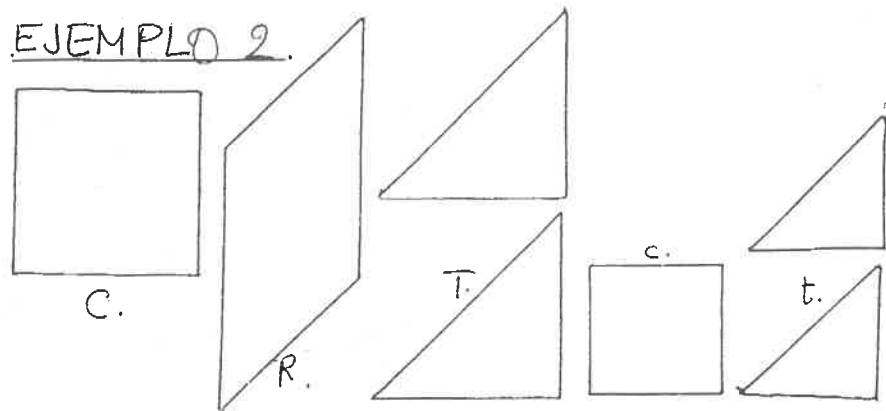
C es — T C es — c
T es — t t es — C
R es — T t es — t
M es — P
N es — N
O es — M



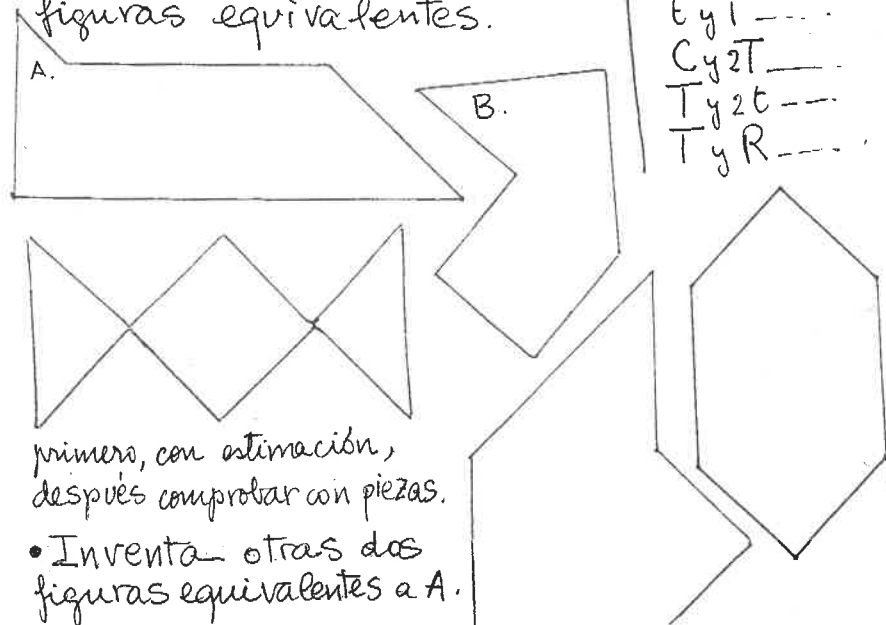
• Escribe: el doble de
la mitad de

O es — M | P — M | T — C | R — T
M es — P | .. — T | .. — T

EJEMPLO 2.



- ¿Qué piezas del Tangram son equivalentes entre sí?
- Escribe si o NO, son equivalentes:
- Pinta del mismo color las figuras equivalentes.



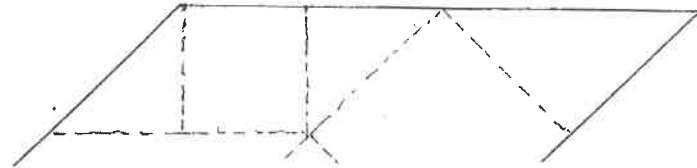
C y R ---
 T y C ---
 T y c ---
 t y T ---
 C y 2T ---
 T y 2t ---
 T y R ---

primero, con estimación,
después comprobar con piezas.

- Inventa otras dos figuras equivalentes a A.

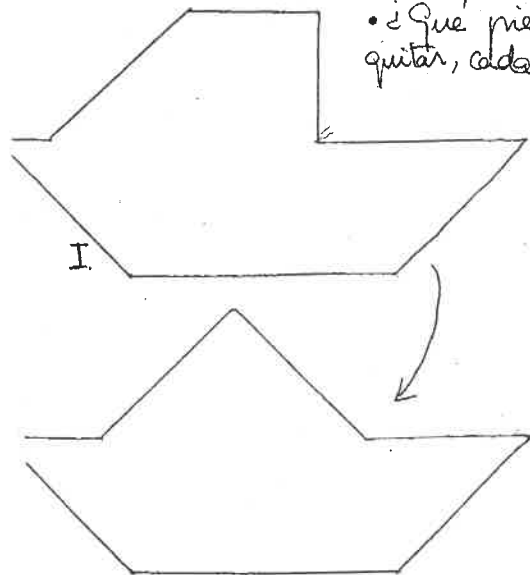
EJEMPLO 3.

- Ordena las figuras: M, N, O, P, B, por orden de su superficie, de mayor a menor.
- Forma figuras con todas las piezas (librito)
- " " " algunas piezas (dadas las piezas y dado el perfil)
- Construir:
 - descubrir diversas soluciones
 - señalar x los que no son posibles
 - triángulo isósceles y equilátero
 - un romboide
 - Trapezio isósceles y rectángulo
 - un rectángulo
 - un cuadrado — un rombo
 - un pentágono isósceles
 - un exágono, con
 - polígonos cóncavos.
- Descompon:
 - en un pentágono cóncavo y un trapezio
 - en dos trapezios y un cuadrado
 - en dos trapezios y un romboide
 - en dos pentágonos
 - en dos romboides.



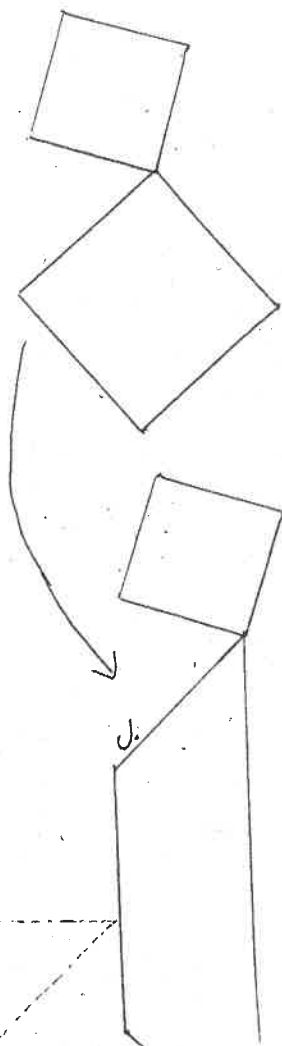
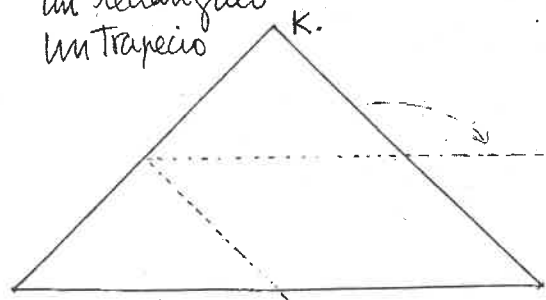
EJEMPLO 4

• ¿Qué pieza hay que añadir o quitar, cada vez?



Con previa estimación!

- Moviendo una sola pieza, convertir el triángulo en:
un romboide
un rectángulo
un trapecio



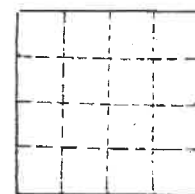
EJEMPLO 5

- ¿Cuántos t caben en T ; y en C ; y en c ; y en R ?
Expresa el área de todas las piezas del Tangram, tomando t como unidad.
Ejemplo $T = 2t$

- Área total del Tangram = $\dots t$
Previamente con estimación.
- ¿Qué parte del área del Tangram, representa el área de cada una de las figuras trabajadas:

A →	O →	I →
B →	P →	J →
M →	N →	K →

- Hallar el número de cm^2 que contienen las superficies de las figuras.



Área de $C = 16 cm^2$ (lado = $4cm$)

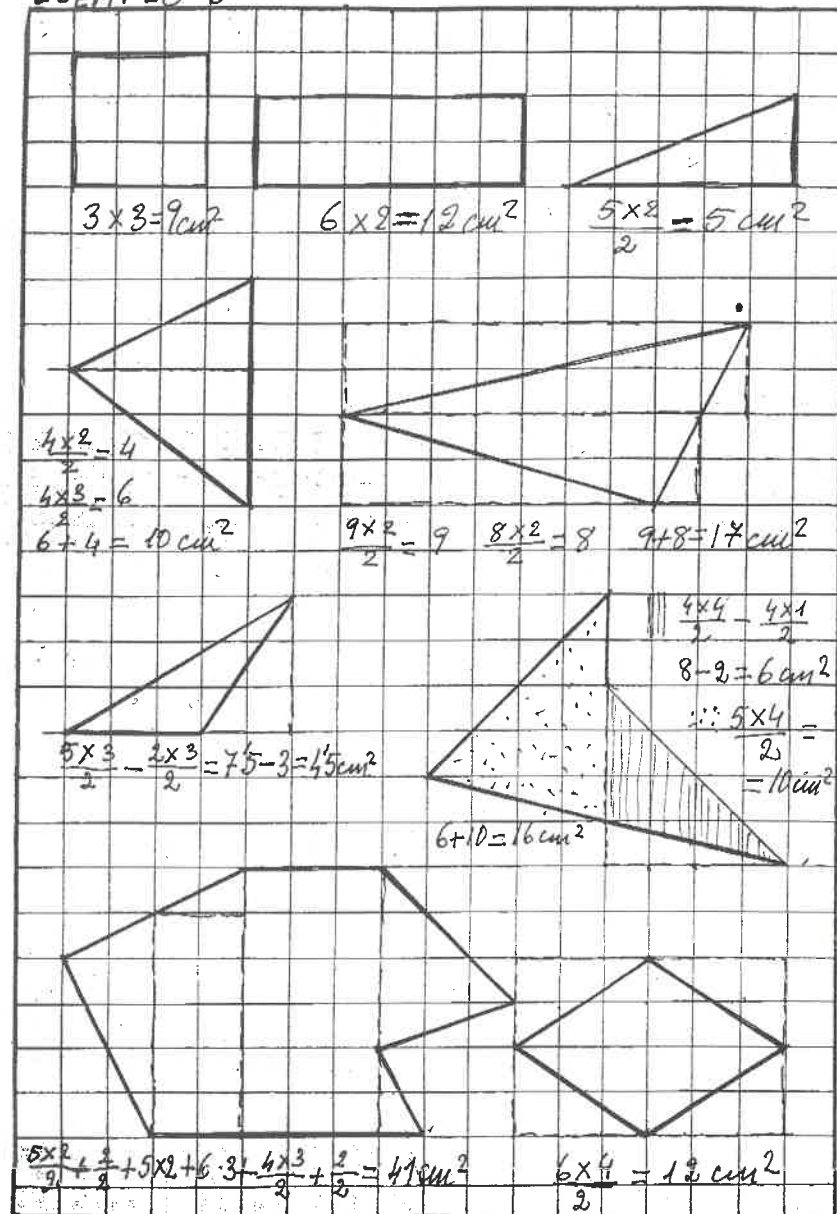
Ar. $R =$ Ar. $c =$ Ar. $T =$ Ar. $t =$

Área figuras librito.

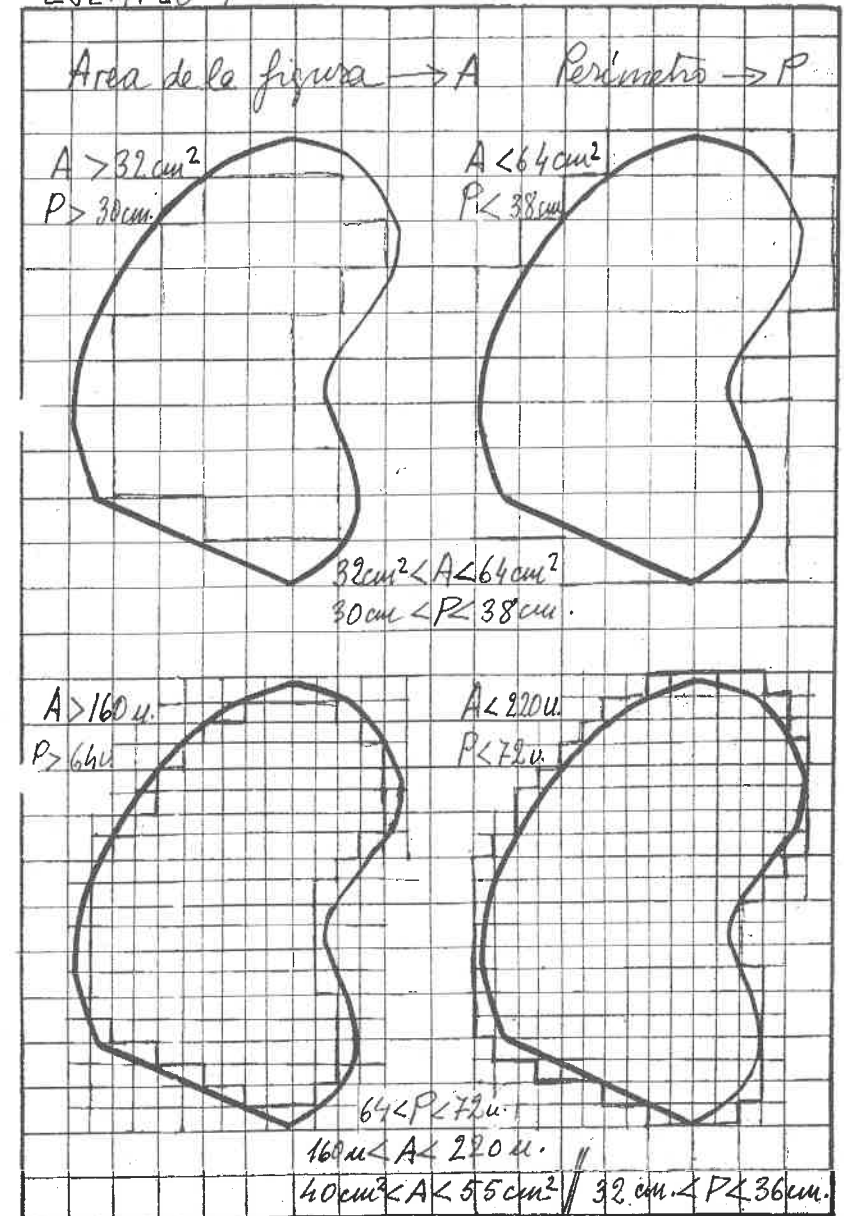
Área total Tangram = $\dots$ | Área figuras: $M, N, P, \dots$

- Construye con las piezas, 2 figuras de 10 y $12 cm^2$.
- ¿Podrías construir una de $15 cm^2$? ¿Por qué?

EJEMPLO 6



EJEMPLO 7



EXPERIENCIAS DE PROBABILIDAD EN PRIMARIA

Pascual Pérez Cuenca

Asesor del programa de la Reforma en la Comunidad Valenciana

El Decreto de Enseñanza de la Educación Primaria de la Comunidad Valenciana establece un bloque de contenido dedicado a la probabilidad y la estadística. En las orientaciones para la secuenciación de los contenidos en los ciclos de la etapa se plantea la inclusión de situaciones probabilísticas desde el primer ciclo.

Concretamente el D.O.G.V. dice lo siguiente:

ESTADÍSTICA. AZAR. PROBABILIDAD			
	1º CICLO	2º CICLO	3º CICLO
Recogida, registro y recuento de datos.	Experiencias sencillas con datos referidos a toda la población (la clase, un grupo...). Elaboración de cuestionarios para la obtención de datos.	Variables cualitativas y cuantitativas.	Variables discretas y continuas.
Presentación de datos.	Ordenación de datos usando tablas de frecuencias absolutas. Representaciones gráficas: pictogramas, tablas de doble entrada.	Diagramas de barras y polígonos de frecuencia absoluta.	Tablas de frecuencias relativa. Diagramas de sectores.
Análisis de datos.	Estudios sencillos elaborados por los alumnos sobre temas apropiados.	Información gráfica estadística. Iniciación del valor medio.	Valoración crítica de informes estadísticos; Media y moda.
Reconocimiento del carácter aleatorio de una experiencia.	Situaciones de azar. Distintos métodos de sorteos. Realización de recuentos. Obtención y presentación de datos obtenidos en experiencias: juegos, tiempo atmosférico, etc. Vocabulario asociado: posible, imposible, probable...	Situaciones que permitan apreciar distintas posibilidades de ocurrencia de los sucesos. Sucesos equiprobables o no. Utilización de diagramas de árbol para la representación de recuentos.	
Asignación de probabilidad.	Cualitativa: más o menos probable. Experiencias sencillas en juegos.	Estadística: por repetición sucesiva de un experimento.	Anticipación por recuento de casos favorables y posibles. Expresión porcentual. Relación entre probabilidad estadística y a priori.
Situaciones combinatorias. Técnicas de recuento sistemático.	Experiencias sencillas que permitan un inicio a situaciones combinatorias en contexto de juego, situaciones cotidianas (combinaciones al vestirse, al sentarse en equipo, etc).		

Investigaciones realizadas por distintos autores, fundamentalmente Fischbein (1) y Falk (2), y contrastadas por el autor de esta comunicación (3) permiten establecer cuatro supuestos que justifican esta inclusión en el currículo.

1. Los niños contactan con procedimientos indeterminados desde edades muy tempranas.(4)

2. Los métodos usados por los niños suponen equiprobabilidad a los sucesos componentes o aleatoriedad a procedimientos simplemente indeterminados.(5)

3. La repetición de un mismo experimento y la observación de resultados es un procedimiento muy sencillo y de hecho ampliamente usado (aunque muchas veces de forma inconsciente e inconsistente).

4. Las situaciones 'combinatorias' son de gran interés formativo en esta etapa.

Estos cuatro supuestos sirven de base a la propuesta didáctica planteada en nuestra comunidad y que esta siendo desarrollada en los materiales curriculares SAMBORI(6):

1. Partir desde las ideas de los niños sobre la suerte, echar a suerte y sortear. En ellas estarán reflejadas sus concepciones primarias sobre los procesos aleatorios y la probabilidad de un suceso.

2. Contrastar sus ideas primarias con lo que ocurre al repetir el experimento. Es decir adoptar una visión frecuencialista que permita lentamente definir la probabilidad.

3. Finalizar contrastando los resultados experimentales con una asignación probabilística 'a priori' cuando el experimento lo permita (y en casos sencillos).

4. Utilizar los juegos de estrategia probabilística como un elemento clave.

Esta comunicación pretende discutir 'a modo taller' estos criterios didácticos utilizando algunos ejemplos del citado proyecto. Presentamos a continuación una pequeña selección de 3 actividades del primer ciclo y 2 juegos de etapa.

PITO-PITO-GORGORITO

LA BOLSA Y LOS CUBOS DE COLORES



Este va a ser un desafío que vuestra profesora o vuestro profesor va a plantear a toda la clase en su conjunto.

Con una bolsa opaca, para que no se vea el contenido, y unos cubos de colores en su interior se irá sacando de uno en uno, anotando en la pizarra y devolviéndolos al interior de la bolsa, que naturalmente se removerá de vez en cuando. Además para que no haya trampa se necesitará la mano inocente de un niño o niña de San Ildefonso que vaya cantando el color extraído.

El reto consiste en decir la composición de la bolsa. Cada concursante sólo podrá decir su opinión una sola vez: así que una recomendación: ¡no precipitaros!

PITO-PITO-GORGORITO

LA HABICHUELA



Una habichuela puede caer solamente de dos formas posibles. Tomamos una y le marcamos un punto en una de las posiciones y dos puntos en la otra.

¿SERVIRÁ PARA HACER UN SORTEO ENTRE DOS PERSONAS?



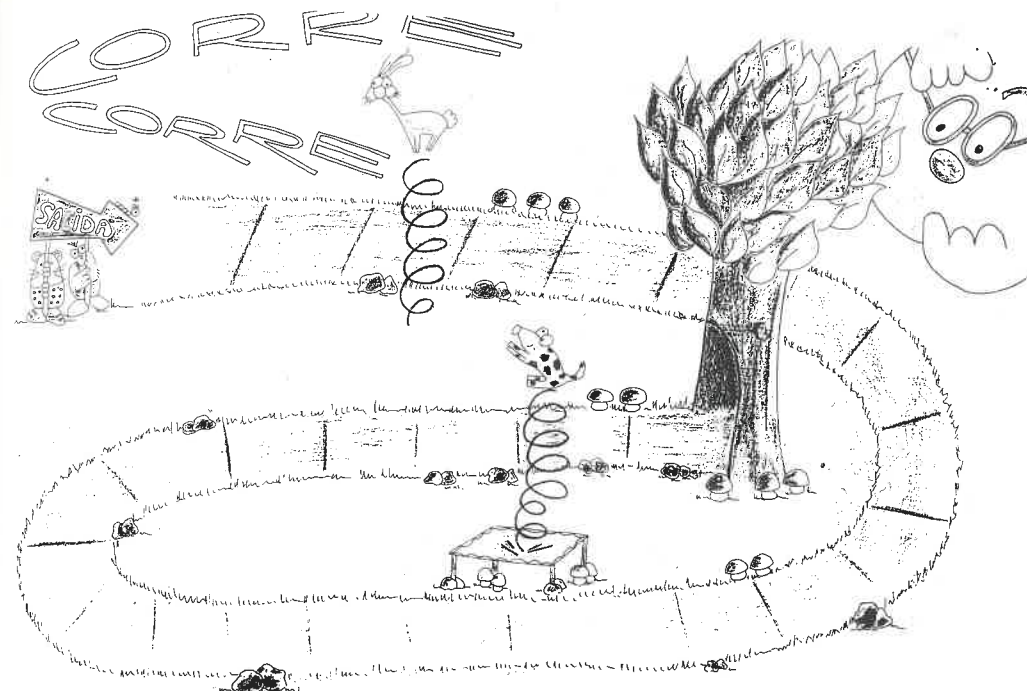
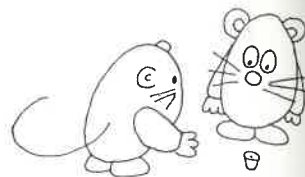
PITO-PITO-GORGORITO

EL TAPON



Un tapón como el del dibujo, si se lanza al aire, puede caer de tres formas posibles:

¿QUÉ OS PARECE UN SORTEO CON ESTE INSTRUMENTO?



CORRE, CORRE (I)

Nº de jugadores: 2

Material necesario:

- el tablero del CORRE, CORRE
- un dado cúbico.
- dos fichas

Reglas del juego:

1. Este juego representa una persecución entre un perro y un conejo. ¿Conseguirá salvarse el conejo?.
2. El conejo comienza primero a correr, ¡ha visto al perro!. Se lanza un dado. Si sale 1, 2, 3 o 4 el conejo se mueve tantos lugares como indica el dado, si sale 5 o 6 se mueve el perro tantos lugares como indica el lanzamiento.
3. Para darle un poco de ventaja al conejo los 3 primeros lanzamientos solo moverá el conejo. Si sale 5 o 6 se repite el lanzamiento.

CORRE, CORRE (II)

Nº de jugadores: 2

Material necesario:

- un tablero del CORRE, CORRE
- dos fichas de colores
- un dado cúbico y uno tetraédrico

Reglas del juego:

1. El perro quiere cazar al conejo. ¿Lo conseguirá?
2. El jugador que hace de perro lanza para moverse el dado cúbico. El jugador que hace de conejo lanza el dado tetraédrico.
3. El conejo ve de lejos al perro por lo que empieza primero a correr lanzando seguido tres veces su dado antes de que empiece el perro.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- (1) Fischbein, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Reidel publishing company. Dordrecht.
- (2) Falk, R. y otros (1980). A potential for learning probability in young children. Educational Studies in Mathematics 11, pp 181 a 204.
- (3) Pérez, P. (1992). Algunas ideas de los niños pequeños sobre el azar: relación entre frecuencia y probabilidad. Memoria de investigación del curso de doctorado de didáctica de la matemática (Universidad de Valencia). No publicado.
- (4) Pérez, P. (1991). Plon chiribicú. Experiencias de azar con niños de 7 y 8 años. R. Suma nº 9.
- (5) Pérez P. (1993). Probabilitat en Primaria. R. L'Aula de matemàtiques nº 2 (en prensa).
- (6) Aldeguer J. y otros (1992). SAMBORI, proyecto de material curricular para primaria. Sujeto a convocatoria de elaboración de material curricular de la Conselleria de Educación y Ciencia de la Comunidad Valenciana. (no editado)

TALLER: LOS JUEGOS DE INTERCAMBIO EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO

*Manuel García Déniz y Ricardo Lorenzo Pérez
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas*

Dentro de los juegos de tablero están los llamados juegos de posición. En este tipo de juegos, las fichas están dispuestas sobre el tablero ocupando unas posiciones determinadas o se van introduciendo en el mismo en las primeras jugadas. A partir de ahí las fichas se mueven sobre el tablero a la búsqueda de un objetivo que marca el final del juego. Pueden clasificarse de muchas maneras, pero, en general, atienden a uno de estos tipos:

- juegos del tipo del tres en raya,
- juegos de bloqueo,
- juegos de intercambio,
- juegos solitarios.

De todos ellos proponemos ahora en este taller los correspondientes a los dos últimos tipos.

JUEGOS DE INTERCAMBIO DE POSICIONES

Hay muchos juegos de estrategia para dos jugadores en los cuales el objetivo para cada jugador es mover sus fichas hacia los sitios de salida de su oponente. Estos se denominan "juegos de intercambio de posiciones". Todos ellos requieren el uso de un tablero y fichas.

En todos estos juegos hay básicamente dos tipos de movimiento, DESLIZAMIENTO y SALTO. No existe la CAPTURA. La dirección del movimiento puede ser horizontal, vertical o diagonal.

Los DESLIZAMIENTOS normalmente implican mover la ficha un espacio a una celdilla adyacente.

Los SALTOS normalmente implican saltar sobre una ficha hacia una celdilla vacía contigua.

En los siguientes juegos las fichas sólo pueden mover mediante deslizamiento.

La carga (el ataque).

El paso (el cruce).

Tándem.

Carrera de alfiles.

En los siguientes juegos las fichas pueden tanto deslizarse como saltar.

Halma.

Hexa-Halma.

El sendero del jardín.

Brincar.

Todos ellos son para dos jugadores.

JUEGOS SOLITARIOS

También hay juegos de intercambio de posiciones de fichas que son juegos solitarios, juegos para un solo jugador.

Estos juegos no han sido demasiado apreciados porque aparecen engañosamente sencillos; sin embargo, desde el punto de vista educativo, son muy interesantes ya que desarrollan las capacidades intelectuales. En los juegos individuales, el jugador ha de actuar racionalmente, ha de prever las jugadas y ha de seguir alguna estrategia para su resolución.

Los siguientes solitarios para una persona requieren que las fichas cambien sus posiciones. Si esto se consigue, entonces el siguiente paso es intentar realizar el intercambio en el menor número de movimientos. Muchos de los anteriormente mencionados "juegos de intercambio de posiciones" para dos jugadores pueden también convertirse en solitarios de este tipo.

Los solitarios de intercambio de posiciones son un buen punto de partida para el trabajo de investigación.

Los juegos para un solo jugador tienen un encanto difícil de igualar. Son cómodos, sencillos y sorprendentes, cómodos de utilizar en clase y con una riqueza de contenido que los hace ideales para desarrollar pequeñas investigaciones en clase con los alumnos.

En estos juegos se lucha contra uno mismo. No se pueden aprovechar los errores del contrario.

Proponemos como más interesantes los siguientes:

- Las Torres de Hanoi.
- El salto de la rana.
- El avance de fichas.
- Las seis fichas.
- Cambios.
- La estrella de ocho puntas.
- Las nueve fichas.
- Cinco por cinco, veinticuatro.
- La estrella solitaria o pentalfa.
- El triple intercambio.

El Solitario es un juego inventado por un aristócrata francés del siglo XVIII estando preso en La Bastilla y, como su propio nombre indica, es un juego en el que interviene una sola persona.

En este tipo de juegos, al realizar el salto, queda eliminada la ficha sobre la que se salta y se retira del tablero. A esto se llama una CAPTURA.

Los más conocidos son:

El solitario inglés o de 33 casillas.

El solitario francés.

Solitario para una pareja.

El solitario triangular.

Los solitarios son juegos de dinamismo racional, porque tienen todas las ventajas de los juegos de competición en cuanto a desarrollo de capacidades intelectuales. En ellos el jugador ha de actuar racionalmente, ha de planear los movimientos por adelantado, ha de prever las jugadas y ha de seguir alguna estrategia para su resolución.

TALLER: LA ENSEÑANZA POR DESCUBRIMIENTO Y EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO EN EL AREA DE MATEMATICAS

*Manuel Garcia Déniz y Ricardo Lorenzo Pérez.
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.*

Entre los principios básicos de intervención educativa, desarrollados en el Proyecto de reforma, destaca, por su importancia, la necesidad de asegurar la construcción de aprendizajes significativos.

Este objetivo constituye uno de los puntos claves que han de impregnar en el nuevo diseño curricular.

Por tanto, la intervención educativa debe tener en cuenta una serie de principios básicos:

- a) Partir del nivel de desarrollo del alumno
- b) Asegurar la construcción de un aprendizaje significativo.
- c) La necesidad que los alumnos realicen aprendizajes significativos por si solos.
- d) La necesidad que los alumnos modifiquen sus esquemas de conocimientos.
- e) Y que los alumnos realicen una intensa actividad creativa e intelectual.

Teniendo en cuenta estos principios, queremos que los alumnos por si solos, lleguen a obtener diferentes fórmulas que nos proporcionen métodos rápidos para calcular las áreas de las figuras planas más sencillas, siguiendo las tres fases del aprendizaje significativo.

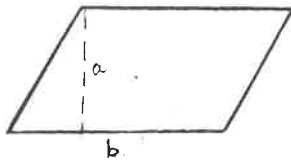
Los principios que seguiremos son:

- 1) Transformar la figura de la cual queremos deducir la fórmula para calcular su área en una equivalente más sencilla de la que ya conocemos la fórmula.
- 2) Qué el alumno a partir de dos figuras iguales transforme una y la compare con las dimensiones de la otra.
- 3) Y que fórmule el área de la figura obtenida a partir de las dimensiones de la primera.

Partimos de que los alumnos ya conocen que dos figuras diferentes pueden tener la misma área (figuras equivalentes) y la fórmula del área del rectángulo.

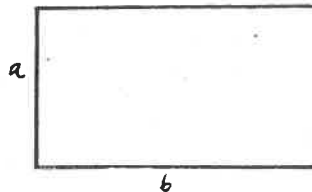
AREA DEL ROMBOIDE

Como solo sabemos el área del rectángulo, transformamos el romboide en rectángulo siguiendo las fases del aprendizaje significativo.



Primera fase

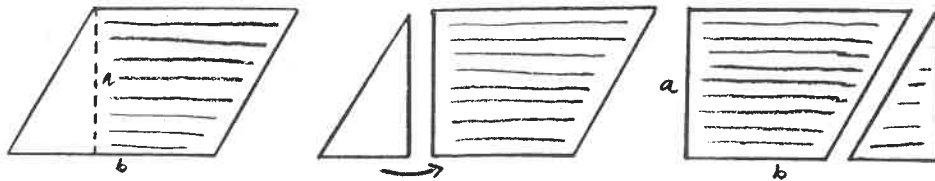
En el proceso de aprendizaje se tomará siempre como punto de partida lo que el alumno ya sabe.



Segunda fase

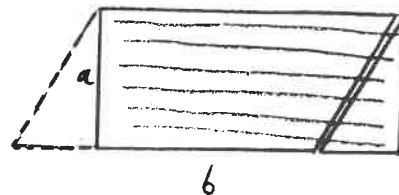
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

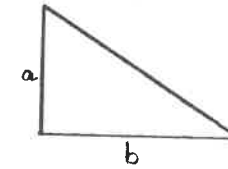
Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje.



$$A = b \cdot a$$

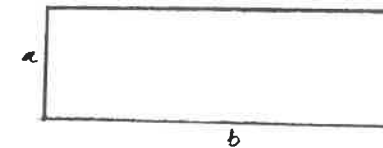
AREA DEL TRIANGULO RECTANGULO

Transformamos el triángulo en un rectángulo del que conocemos el área.



Primera fase

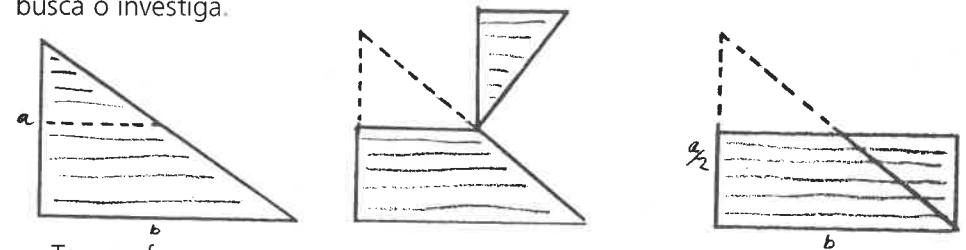
En el proceso de aprendizaje se tomará siempre como punto de partida lo que el alumno sabe.



Segunda fase

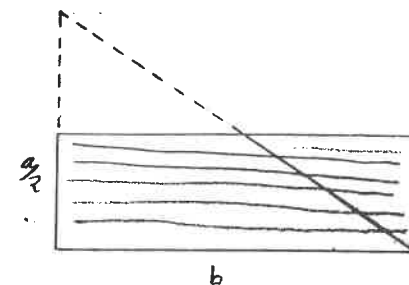
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

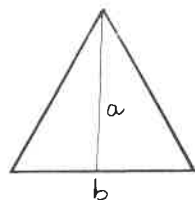
Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje



$$A = b \cdot \frac{a}{2}$$

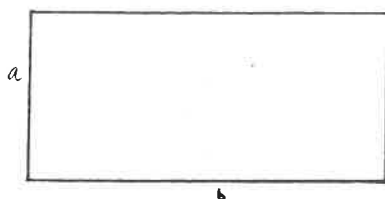
AREA DEL TRIANGULO EQUILATERO

Transformamos el triángulo en un rectángulo del que conocemos el área



Primera fase

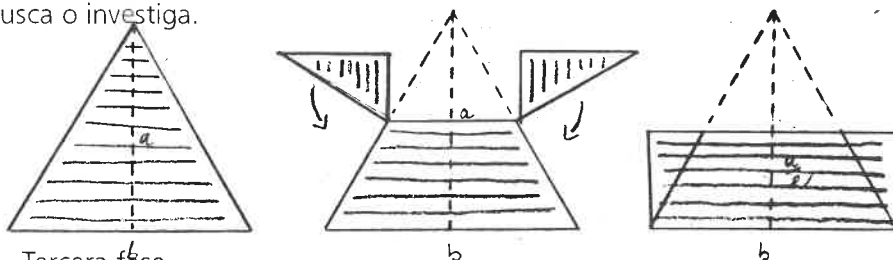
En el proceso de aprendizaje se tomará siempre como punto de partida lo que el alumno sabe.



Segunda fase

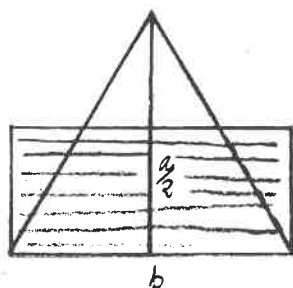
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

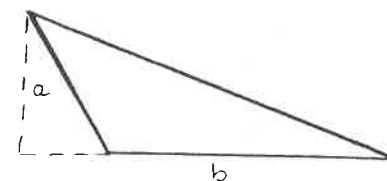
Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje.



$$A = b \cdot \frac{a}{2}$$

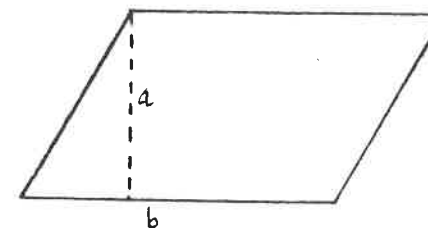
AREA DEL TRIANGULO OBTUSANGULO

Transformamos el triángulo en un romboide del que conocemos el área



Primera fase

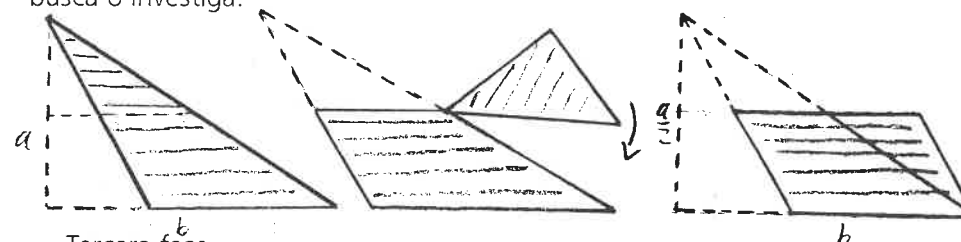
En el proceso de aprendizaje se tomará siempre como punto de partida lo que el alumno sabe



Segunda fase

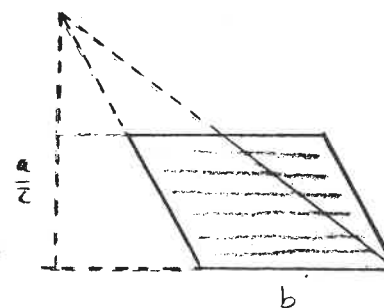
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

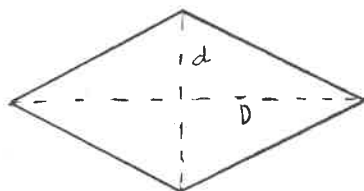
Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje.



$$A = b \cdot \frac{a}{2}$$

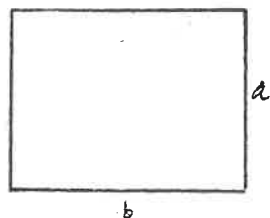
AREA DEL ROMBO

Transformamos el rombo en un rectángulo del que conocemos el área.



Primera fase

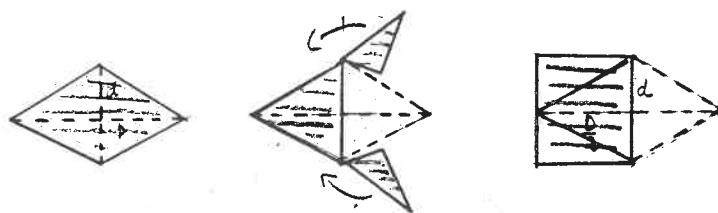
En el proceso de aprendizaje se tomará siempre como punto de partida lo que el alumno sabe.



Segunda fase

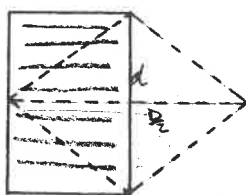
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

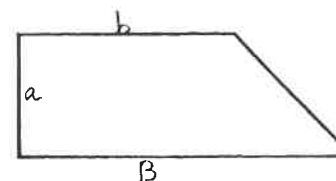
Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje.



$$A = \frac{D}{2} \cdot d.$$

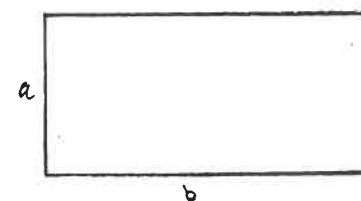
AREA DEL TRAPECIO RECTANGULAR

Transformamos trapezio en un rectángulo del que conocemos el área



Primera fase

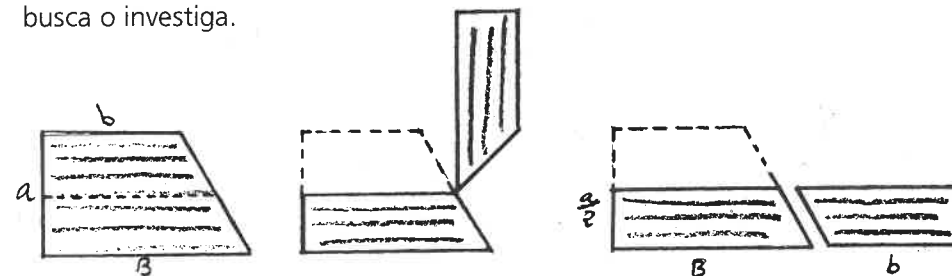
En el proceso de aprendizaje se tomará siempre como punto de partida lo que el alumno sabe.



Segunda fase

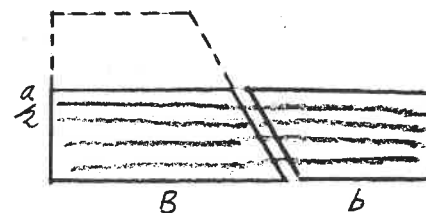
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

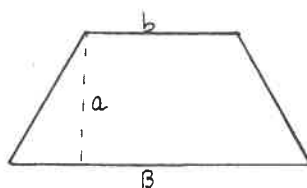
Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje.



$$A = (B + b) \cdot \frac{a}{2}$$

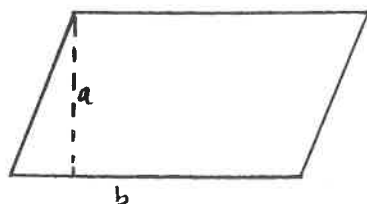
AREA DEL TRAPECIO ISOSCELES

Transformamos el trapecio en romboide del que conocemos el área.



Primera fase

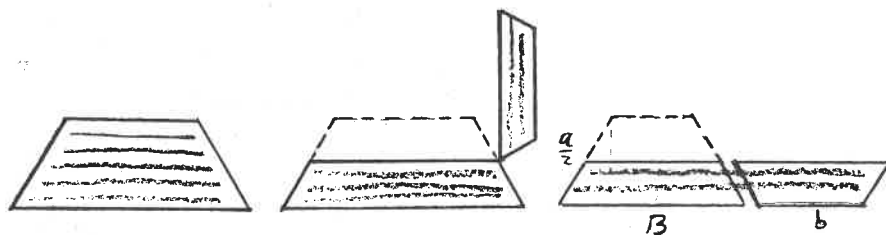
En el proceso de aprendizaje se tomarà siempre como punto de partida lo que el alumno sabe.



Segunda fase

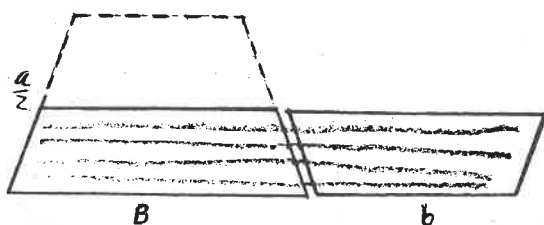
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

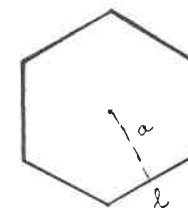
Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje.



$$A = (B + b) \cdot \frac{a}{2}$$

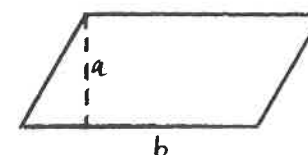
AREA DEL HEXAGONO

Transformamos el hexágono en romboide del que conocemos el área



Primera fase

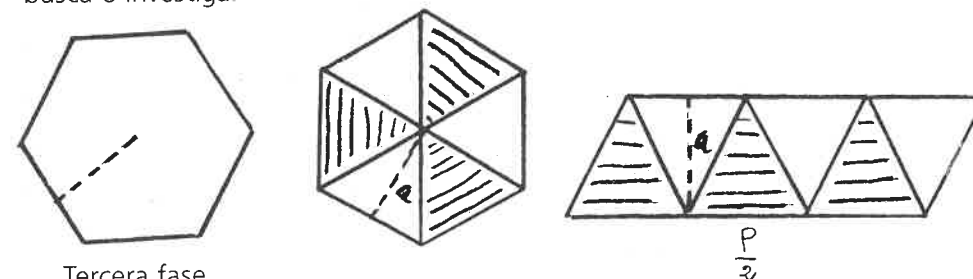
En el proceso de aprendizaje se tomarà siempre como punto de partida lo que el alumno sabe.



Segunda fase

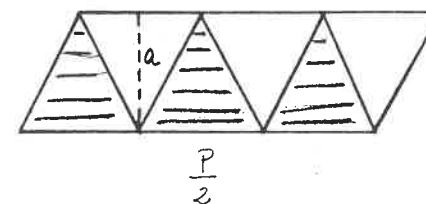
Se crea en el alumno un conflicto cognitivo, es decir se rompe el equilibrio inicial de sus esquemas y surge la motivación por el aprendizaje.

En esta fase, el alumno, a partir de las nuevas informaciones que recibe busca o investiga.



Tercera fase

Lo descubierto y aprendido por el alumno, a lo largo del proceso, es ahora comunicado o expresado e integrado como aprendizaje.



$$A = \frac{P}{2} \cdot a$$

LAS MATEMATICAS EN LA ETAPA DE PRIMARIA. ASPECTOS A CONSIDERAR PARA SU ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

*Fuensanta Hernández Pina (Universidad de Murcia)
y Encarnación Soriano Ayala (Cep de Almería)*

El importante papel que el área de matemáticas ha jugado y juega en el currículum escolar es indiscutible y de todos conocido. Pero a pesar de su "omnipotencia" y "omnipresencia", si observamos el desarrollo de una clase de matemáticas en la etapa de E. Primaria, generalmente, nos encontramos con la triste sensación de haber retrocedido en el tiempo: las matemáticas se han anclado.

En primer lugar, encontramos que lo que más interesa, aún hoy, en una clase de matemáticas son los algoritmos de lápiz y papel, la memorización de estos algoritmos y la realización metódica de ejercicios de aplicación de ellos. El tratamiento de la información esta completamente olvidado en el primer ciclo de primaria y la geometría ha dormido plácidamente durante muchos años.

En segundo lugar nos encontramos con la utilización exclusiva del libro de texto como único material. Pero el libro de texto tiene muchas deficiencias. Por citar algunas diremos que el libro de texto no toma como punto de partida lo que el niño ya sabe, sino que parte de lo que debería de saber y se instala directamente en los conceptos correctos. Además, el libro de texto es demasiado cerrado, lineal e inflexible para permitir la movilidad mental implícita en el pensamiento matemático.

En tercer lugar, es preocupante observar que, cuando los profesores/as reflexionan y demandan cursos de perfeccionamiento, se agrupan en SSPP, forman Grupos de Trabajo, etc, las matemáticas no suelen ser motivo para ello, es más, piensan que poseen conocimientos y estrategias suficientes para "enseñarlas". Esto suele ocurrir en general en todos los ciclos de primaria y en particular en el primer ciclo. La triste realidad es que, en los primeros niveles las relegan a un segundo plano, cubriendo los huecos que deja la lectoescritura.

A todo ello, hemos de añadir que goza de un "halo" negativo entre los estudiantes, precisamente porque se asocian a una sensación de fracaso, ya que se han visto obligados a trabajarlas de memoria y abusando de la mecánica.

Para que las matemáticas dejen de ser asociadas a sensación de fracaso y recuperen su verdadera identidad, para trabajar las matemáticas en la etapa de E. Primaria, proponemos al profesorado tener en cuenta cuatro aspectos que consideramos importantes:

En el primero de ellos nos referiremos a los **recursos materiales y a la necesidad de diseñar actividades que favorezcan diversos agrupamiento con el alumnado.**

La enseñanza de las matemáticas debe de basarse en experiencias concretas. Los alumnos y alumnas logran sus descubrimientos por sí solos mediante un procedimiento activo. Pero, el aprendizaje matemático no puede quedarse sólo en manipulaciones rutinarias, el alumnado debe reflexionar y debatir con los compañeros/as sus resultados y conclusiones. **Se aprende mejor en situaciones de conflicto.**

Una matemática que se sustente en la reflexión y el pensamiento partiendo de la práctica, de la exploración y experimentación requiere disponer de materiales variados. En el aula para trabajar las matemáticas nos sirve todo tipo de material, desde material no **estructurado** a material **estructurado**.

Como material no estructurado podemos citar palillos, cuerdas, botellas de plástico vacías, cajas de quesos en porciones, cartulinas, espejos, semillas... Dentro del material estructurado las aulas deben de disponer de infinidad de juegos que tanto los profesores/as y los niños/as pueden elaborar en diversos talleres. Podemos citar el juego de la escalera, la cuerda, tres en raya, barajas, bingos... Dentro del material estructurado podemos hablar de uno aún más formal, pero que también puede ser elaborado, nos referimos, entre otros, a los bloques lógicos, regletas, bloques multibase, figuras geométricas, geoplanos, etc.

Una vez que hemos visto lo necesario que es disponer de materiales para convertir el aula en un auténtico laboratorio, hemos también de subrayar que las matemáticas se deben de trabajar considerando diferentes espacios y agrupamientos. Es necesario diseñar actividades para que sean resueltas individualmente por los alumnos, también es necesario diseñar y programar actividades para ser solucionadas en grupo, y hemos de favorecer los debates y el contraste de opiniones con los alumnos/as del grupo clase.

En segundo lugar otro de los aspectos que quisiéramos discutir en esta comunicación es la **globalización de las matemáticas** de la E. Primaria. Para nosotras la globalización no supone pasar a través de un "embudo" todos los contenidos, porque ello implicaría tal grado de artificiosidad que sería contrario a las mismas razones que justifican un enfoque globalizado, por ello compartimos con Zabala (1989) la necesidad de romper con la rigidez de los horarios y establecer dos tiempos claramente diferenciados: uno en el que se trabaje a partir de un tema o proyecto globalizado y otro en el que se lleven a término distintos proyectos sobre contenidos curriculares específicos. Llevado al área de matemáticas, se ve que las matemáticas escolares han de ser unas matemáticas contextualizadas, lo que quiere decir que parten de situaciones concretas y que existe una responsabilidad social en la formación matemática; sin embargo, se cree que se ha de prever en cada etapa unos momentos de trabajo separado, de profundización y consolidación de conceptos y habilidades matemáticas.

Un tercer aspecto, de gran relevancia, que tiene que considerar el profesorado **en el área de matemáticas** es la necesidad de realizar una **evaluación investigativa**, para favorecer el aprendizaje significativo de ella. La evaluación debe de ser el punto de arranque de nuevos aprendizajes y clave para remover los obstáculos que puedan impedir el éxito. Ha de estar imbricada en el hacer diario, centrándose más en el proceso que en el producto, lo que permitirá tomar decisiones a tiempo. Cada programa o proceso formativo en matemáticas ha de comenzar con la formulación de unos objetivos o propósitos basados en la información que se tiene sobre las necesidades a satisfacer, las características de nuestros alumnos y el proceso de enseñanza. Se debe de partir de los conocimientos previos del alumnado y a partir de ellos diseñar la enseñanza. Desde el primer momento nuestras programaciones han de ser consideradas hipótesis de trabajo y la evaluación en todo el proceso, el mecanismo de comprobación de la validez o no de esas hipótesis, de su idoneidad para guiar el proceso de enseñanza-aprendizaje y conseguir los objetivos propuestos.

Como último aspecto, queremos destacar la necesidad de que el profesorado favorezca el uso de **estrategias de aprendizaje** entre sus alumnos. Definimos las estrategias de aprendizaje como un conjunto de procedimientos o procesos cognitivos, afectivos y psicomotores que los alumnos emplean o ponen en marcha con la intención de facilitar la adquisición el almacenamiento y/o la utilización de información, o bien, con el fin de solucionar problemas. Nosotras clasificamos en seis categorías las estrategias de aprendizaje en el área de matemáticas. Las categorías y las estrategias incluidas en cada una de las categorías son las siguientes:

1. Recibir

***Atender**, es una estrategia que permite mantener conciencia y observar.

2. Interpretar

***Traducir**, consiste en poner de otra forma la información recibida.

***Comparar**, es señalar semejanzas y diferencias.

***Clasificar**, es agrupar siguiendo algún criterio.

***Ordenar**, es secuenciar.

3. Organizar es formar y estructurar ideas.

***Relacionar**, consiste en conectar propiedades en términos cuantitativos y cualitativos.

***Preguntar**, es inquirir, averiguar, señalar inconsistencias.

***Inferir**, es usar la razón para deducir una regla.

***Resumir**, consiste en señalar las ideas principales.

4. Aplicar es usar los conocimientos en situaciones nuevas

***Predecir**, consiste en estimar.

***Evaluar**, es concluir sobre las bases que prueban que los criterios han sido encontrados.

***Plantear hipótesis**, es postular una relación.

***Comprobar**, Es idear y llevar a cabo un plan para verificar una hipótesis.

5. **Recordar**, es un esfuerzo deliberado para retener.

***Imaginar**, es usar representaciones visuales o auditivas de objetos o sucesos.

***Retener**, es traer a la mente, recobrar ideas.

6. **Solución de problemas**, es hallar soluciones a situaciones no resueltas. Se combinan todas las estrategias anteriormente estudiadas.

A estas estrategias hemos de añadir estrategias de apoyo, que no son otra cosa que las actitudes positivas que se deben de desarrollar en el alumnado hacia las matemáticas.

Considerando fundamentalmente estos cuatro aspectos que hemos destacado favoreceremos en el alumnado un aprendizaje significativo de las matemáticas.

BIBLIOGRAFIA BASICA

CABRERA, F (1987): *La Investigación Evaluativa en la Educación*, en Gelpi y otros, *técnicas de evaluación y seguimiento de programas de formación profesional*. Madrid: Largo Caballero.

HERNANDEZ PINA, F (1989): Formalización de las Técnicas de Estudio: Nuevos enfoques, *Revista Investigación Educativa*, 5, 149-172.

HOLMES, E (1985): *Children Learning Mathematics. A cognitive approach to teaching*. New Jersey: Prentice-hall.

I.C.M.I (1986): *Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90*. Valencia: Mestral.

RESNICK, L.B y W.W. FORD (1981): *The psychology of mathematics for instrución*. Hillsdale NJ: Erlbaum Associates.

SORIANO, E (1991): Las matemáticas en E. Primaria. Una forma más de diversión en el aula. *NEXO Revista de Educación*, 17 y 18, 65-68.

ZABALA, A (1989): El enfoque globalizador, *Cuadernos de Pedagogía*, 168, 22-27.

LA RELACION DE SEMEJANZA APLICACION A LA ENSEÑANZA PRIMARIA

Inés Sanz Lerma

Dpto. de Dca. de la Matemática y las Ciencias Experimentales

Universidad del País Vasco/E.H.U.

INTRODUCCION

La relación de semejanza de la que voy a tratar no es la que corresponde a lo que llamamos figuras semejantes en geometría euclídea, que es una relación de equivalencia, sino una relación más simple, aplicable al análisis de cualquier colección de objetos que sean distinguibles entre sí, o sea, que no estén descritos por un mismo número de propiedades iguales. Las propiedades se entiende que pueden ser tanto las llamadas observables, como las abstractas de cualquier tipo.

Esta relación corresponde a la noción vulgar de "se parece a" y es usada por los niños desde los primeros niveles, cuando empiezan a juntar un objeto con otro porque se parece en alguna propiedad que les atribuyen, por ejemplo en los juegos de diferenciación (KOTHE, S., 1968). Aparte de su interés en la Enseñanza Primaria, puede ser interesante también considerar la escala de medida a ella asociada como una escala de medida más junto a las nominales y ordinales, además de las clásicas de intervalos y proporcionales típicas de las ciencias experimentales; esas otras son de gran interés en la investigación de ciencias sociales (BADOSA, X.M., 1989) (CASTRO, C., 1986-87) a cuyo grupo pertenecen en gran parte las investigaciones didácticas. Su carácter básico la hace, en mi opinión, muy adecuada para plantear situaciones de enseñanza-aprendizaje en Primaria, en cualquier área, bajo el objetivo común de desarrollo de la capacidad de pensamiento lógico.

La forma de presentación de esta relación me fue sugerida en un curso de Doctorado que impartió el profesor Tomás Mormann en San Sebastián (MORMANN, T., 1990), que está a su vez inspirado en ideas de R. Carnap. En el área de Inteligencia Artificial aparece hoy con gran fuerza una versión de la teoría de la semejanza bajo el nombre de Teoría de la Concurrencia (PETRI, C.A., 1980). (El nombre inglés para la estructura (X, Co) es Symilarity, por lo que también podíamos usar el nombre castellanizado de Teoría de la Similitud en vez de Teoría de la Semejanza).

1. DEFINICION DE "RELACION DE SEMEJANZA". PUNTUALIZACIONES

La definición dada en el curso citado para esta relación, siguiendo las ideas de Carnap, es que ha de ser una relación que cumpla las propiedades reflexiva y simétrica, y no ha de ser transitiva.

O sea, dado un "mundo" G , y la relación $R \subseteq G \times G$, R será una relación de semejanza si:

Definición Primera.

- I. $\forall x \in G, (x, x) \in R$
- II. $\forall x, y \in G, \text{ si } (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- III. Es no transitiva.

La condición de "no transitividad" me parece que sólo sirve para definir las relaciones de semejanza en un sentido estricto. Podíamos tomar como definición más amplia de relación de semejanza la siguiente:

Definición Segunda.

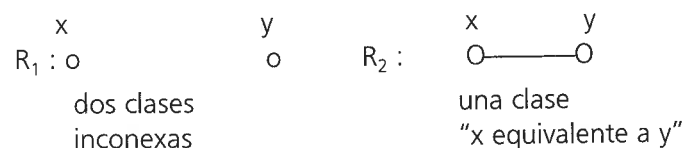
R será una relación de semejanza si:

- I. $\forall x \in G, (x, x) \in R$
- II. $\forall x, y \in G, \text{ si } (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

Con esta segunda definición, las relaciones de equivalencia (que además de cumplir I y II son transitivas) pasarán a ser un subconjunto de las relaciones de semejanza, lo cual parece conveniente. En este caso podemos llamar a las relaciones que cumplen la definición primera relaciones de semejanza en sentido estricto.

Esta segunda definición también nos permite dar sentido a la relación de semejanza, para cualquier número de elementos de G , ya que si G consta de sólo 1 ó 2 elementos, las únicas relaciones de semejanza posibles son, además de reflexivas y simétricas, transitivas, o sea son relaciones de equivalencia.

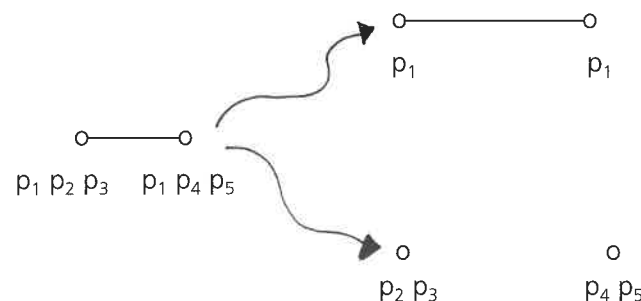
Para dos elementos, $G = \{ X, Y \}$, los grafos¹ representativos de estas relaciones son:



Si se suponen más propiedades, se podría pensar en⁴ que hay grafos del tipo por ejemplo:

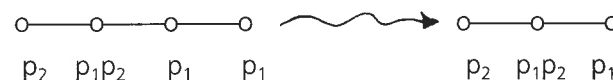


Este grafo parece reflejar una relación de semejanza diferente de las expresadas en los dos anteriores. Pero dado que, para un mundo de 2 objetos, las únicas relaciones de semejanza que podemos construir son las que hemos llamado R_1 y R_2 , este grafo es "sobreabundante" de propiedades y debe ser reducible a los dos anteriores. Yo así lo estimo pues los objetos x, y serán "equivalentes" o "iguales", si se miran respecto a la propiedad (o conjunto de propiedades) comunes, y serán diferentes si se analizan respecto a las que no comparten, por tanto:



En vista de la situación que presenta un mundo de 1 ó 2 elementos, concluiremos que para que un mundo G soporte una relación de semejanza en sentido estricto deberá tener al menos 3 elementos.

Si nos encontramos con que varios elementos forman una clase de equivalencia respecto al conjunto de sus propiedades, elegiremos un representante de la clase y reduciremos el grafo en ese sentido. Por ejemplo:



Los distintos objetos o elementos del mundo, descritos por la propiedad (o conjunto de propiedades) P_1 , serán considerados como equivalentes y por tanto bastará trabajar con un representante de esa clase. Es lo que hacemos habitualmente, ya que, cuando queremos "reconstruir" las propiedades de un mundo de piedras, no tomamos todos los objetos que sean piedras, sino un representante de las "piedras calizas", "piedras graníticas",... o de las "piedras blancas", "piedras negras", o una piedra cualquiera como representante de los objetos que llamamos piedras.

2. INTERES DE LA TEORIA DE LA SEMEJANZA PARA EL APRENDIZAJE LOGICO MATEMATICO EN LOS PRIMEROS NIVELES

Uno de los núcleos de aprendizaje en los primeros niveles, dentro del área lógico-matemática, es la clasificación y seriación de objetos de un "universo" dado. Este "universo" o "mundo" suele estar formado por objetos en los que destacan claramente propiedades; color, tamaño y forma suelen ser las más habituales. El "mundo" seleccionado puede ser de objetos naturales (hojas, piedras, ...) o artificiales (canicas, chapas y juguetes en general). Hay incluso mundos especialmente contruídos para trabajar en los primeros pasos en estos temas como el de los bloques lógicos de Dienes.

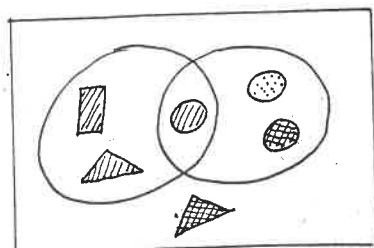
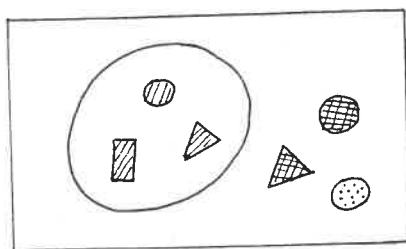
2.1. LA SEMEJANZA Y LAS CLASIFICACIONES

Las tareas de aprendizaje se orientan a pedir que el niño clasifique el conjunto dado por una de las propiedades "rojo", "no rojo" y represente la situación de algún modo. Avanzando con una propiedad más se llega a la típica situación de diagramas de árbol, etc. plasmada en todos los libros escolares.

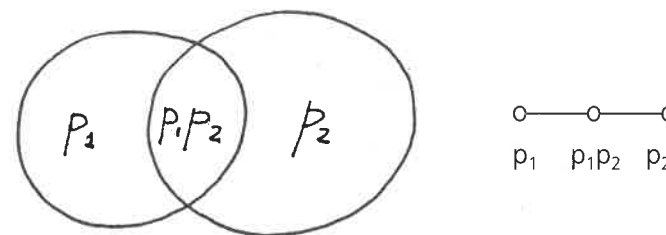
El objetivo es llegar a partir el universo en clases disjuntas por una, dos o más características o propiedades.

Todos los niños tienen dificultades para realizar este tipo trabajos, pues la semejanza entre objetos, que no se explicita, confunde y hasta hace de "trampa". Me parece que podía utilizarse explícitamente y comenzar en un primer nivel pidiendo a los niños que vayan poniendo en montones las cosas que "se parecen" entre sí. Surge así inmediatamente la típica duda de si el "triángulo rojo" se pone con las figuras que son rojas o con el triángulo azul porque es triángulo. Para resolver este problema podemos ofrecerle que empiece situando todos los rojos dentro de una línea "roja" y que deje fuera los que no son rojos.

El siguiente paso es pedirle que agrupe los que son redondos y los que no son redondos, poniendo una línea alrededor del grupo de los redondos. Tenemos así caracterizada la relación de semejanza entre los objetos: el círculo ● se parece a ■, ▲ en que es "rojo", y ● se parece a ○, ● en que es redondo.



Fuera de las líneas sólo queda ▲, que no posee ninguna de las propiedades que analizamos. Los diagramas de Venn y el grafo resultante son:



Estimo que este análisis se puede prolongar fácilmente a tres propiedades, y, con alumnos algo mayores, se puede trabajar la equivalencia de los diagramas de Venn y los grafos (tabla I), dando al final el paso de trabajar con grafos sólo, por su mayor simplicidad. Además estos grafos pueden expresar mejor ciertas relaciones más complejas que las de forma, color o tamaño, con las que se trabaja en los primeros niveles.

Creo que puede ser muy útil trabajar la relación de semejanza ampliamente antes de entrar en el tema de las relaciones de equivalencia y la clasificación. Además me parece que este enfoque llevaría de un modo natural al concepto de ejemplar o elemento prototípico de una clase, como el que mantiene el máximo número de conexiones de semejanza con los demás (ROSCH, E., 1978), (LAKOFF, G., 1987).

2.2. LA SEMEJANZA Y LAS SERIACIONES

Las tareas de seriación se enfocan desde los primeros niveles escolares a fundamentar las relaciones de orden. Pero la relación de semejanza nos permite un enfoque aún más básico, del que voy a proponer algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Formación de CADENAS ABIERTAS.

Elegir un objeto y a continuación otro que se parezca al primero en alguna "propiedad". Elegir un tercero que se parezca al segundo en una propiedad distinta de la que elegimos para el parecido del primero con el segundo. Continuar hasta acabar con todos los objetos de nuestro universo (Tabla II).

Ejemplo 2. Formación de CADENAS CERRADAS.

Se procede como en el caso de cadenas abiertas. Al llegar al último objeto se le asigna como segunda propiedad una que sea común con el primero de la cadena, y distinta de la común al primero y segundo (tabla II).

Ejemplo 3. Derivaciones de cadenas abiertas ó cerradas

Es fácil hallar objetos que compartan una propiedad con otros ya situados en la cadena, sean contiguos o no, sin introducir nuevas propiedades para interpretar el conjunto de objetos. Formaremos así "bucles" sobre una cadena dada.

Proseguir la tarea hasta introducir el máximo número posible de objetos en una cadena sin añadir más propiedades que las n consideradas (en cadenas cerradas de n objetos o las $(n-1)$ en cadenas abiertas) (Tabla II).

Con niños mayores se pueden abordar relaciones de doble semejanza o superior, considerando un mundo en que son atribuibles tres o más propiedades a sus objetos. Esta línea puede tener gran interés en conexión con las áreas de las Ciencias Naturales y Sociales, donde pueden encontrarse muchísimos ejemplos de hojas, flores, animales, piedras, montañas, etc., etc. donde puede resultar de gran interés encontrar líneas de máxima semejanza y ver a qué objetos o propiedades están unidos (Estrellas de "semejanza", tabla III).

3. LAS ESCALAS DE SEMEJANZA: UN CASO PARTICULAR DE ESCALAS DE MEDIDA

Se llama "escala de medida" a la terna formada por dos sistemas relacionales y una aplicación que sea un homomorfismo entre ellos. O sea, (A, B, f) es una escala de medida, siendo el ámbito representante un sistema numérico cualquiera.

Si tenemos un mundo A cuyos objetos se "parecen" en algún rasgo, cualidad o propiedad, podremos definir entre esos objetos la relación de semejanza R que venimos analizando, con lo que ya tendremos el sistema $A = (A, R)$. Tenemos que encontrar ahora un sistema numérico como mundo representante y el homomorfismo entre ambos. Desde luego ya tenemos un mundo gráfico como representante, el de los grafos analizados, en los que los nodos representan elementos y la relación de semejanza son los enlaces. El sistema representacional B es por tanto el grafo. Pero si queremos considerar una escala de medida hay que encontrar un sistema numérico adecuado.

Puede demostrarse que tal sistema existe, caracterizado por un subconjunto de N , y es único, salvo por un subconjunto de las aplicaciones biunívocas de N en N que le dejan invariante. Estas características hacen que la escala de medida construída sobre la relación de semejanza, que podemos llamar "escala de semejanza", sea una escala menos básica o elemental que las escalas nominales, basadas en la relación de equivalencia, ya que estas son invariantes respecto de todas las transformaciones biunívocas de N en N .

NOTA

1. Si bien grafo en sentido general es la forma expresiva de una relación: conjunto de los pares que la definen, diagramas cartesianos o de Venn, ... aquí llamaremos "grafo" a una forma de expresión, en que los elementos de un conjunto G los representaremos por $\bullet$, O , ..., y las conexiones entre ellos $(-)$ indican "compartir una propiedad".

TABLA I

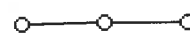
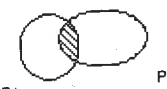
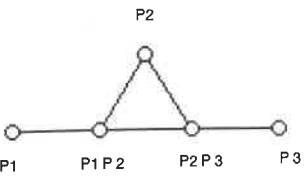
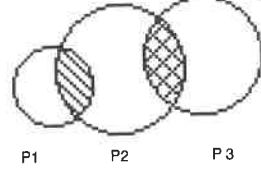
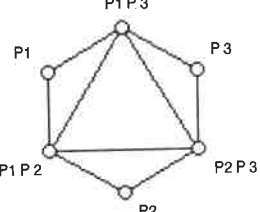
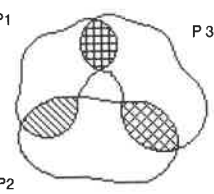
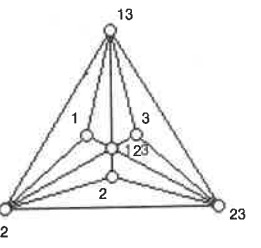
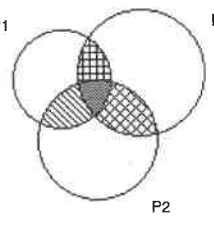
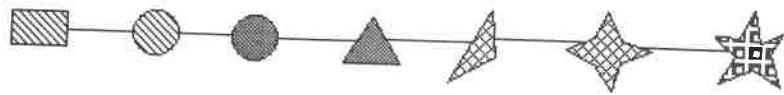
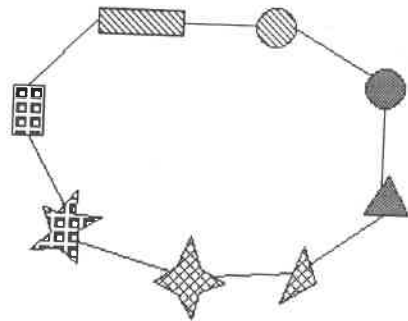
Algunos ejemplos de equivalencia entre GRAFOS y REPRESENTACION EN DIAGRAMAS DE VENN		
No. de propiedades	GRAFOS	DIAGRAMAS DE VENN
2	 P1 P2	 P1 P2
	 P1 P1 P2 P2	 P1 P2
3	 P1 P1 P2 P2 P3 P3	 P1 P2 P3
	 P1 P1 P2 P1 P3 P2 P3 P2	 P1 P2 P3
	 1 2 3 12 13 23	 P1 P2 P3

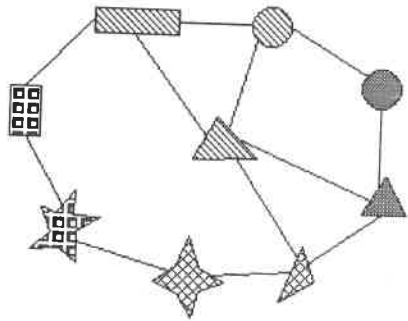
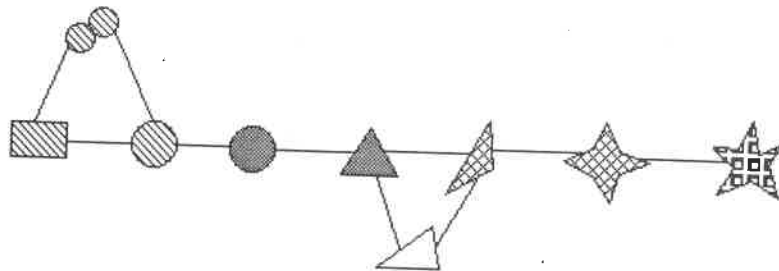
TABLA II



CADENAS ABIERTAS



BUCLES
CADENAS CERRADAS



Derivados
de
CADENAS
y
BUCLES

TABLA III

ESTRELLAS DE SEMEJANZA

Orden 3	Orden 4	Orden 5

BIBLIOGRAFIA

BADOSA, X.M. (1989). La metrización y las ciencias sociales. ARBOR, 165, pág. 9-64.

CASTRO, C. de (1986-87). Introducción a la medición axiomática en las Ciencias Comportamentales I. Estructura de ordenación. THEORIA, Año II, 5-6, pág. 401-426.

KOTHE, S. (1968). Como utilizar los bloques lógicos de Z.P. Dienes. TEIDE . Barcelona, 19 7 3 .

LAKOFF, G. (1987). Women, Fire and Dangerous Things. The University of Chicago Press.

MORMANN, T. (1990). Apuntes del curso de doctorado "Construcción de modelos en la concepción estructural". UPV/EHU.

PETRI, C.A. (1980). Concurrency. Net Theory and Applications. LNCS, Vol. 84, pág. 251-260. Springer-Verlag.

ROSCH, E. (1978). Principles of categorization. Cognition and Categorization. LEA.

LOS GORROS DE MIS PRIMOS RECUERDAN LA BELLEZA Y EFICACIA DE LA TEORIA CONJUNTISTA

*Domingo Revilla Martínez
Escuela de Magisterio. Cáceres*

INTRODUCCION

Los profesores de matemáticas sabemos que muchos alumnos tienden a memorizar las definiciones, demostraciones, algoritmos, etc, sin previamente haberlos comprendido o, lo hacen de manera tan superficial, que lo olvidan sin dejar en ellos la más mínima huella, lo que a veces provoca que se sientan como atrapados en el hermetismo de cualquier fórmula o receta, incapaces de entender lo que están diciendo y/o haciendo, incapaces de conectar con las causas que han dado origen a tal sistema formalizado y, al no tener la memoria ninguna referencia "razonable" donde contrastar su contenido, frecuentemente se producen olvidos, añadidos, modificaciones, etc, que dan lugar a situaciones pintorescas por absurdas.

Uno de los tópicos donde habitualmente se observan esos hechos es en el de divisibilidad y, concretamente, en los conceptos de máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Voy a reproducir aquí la conversación que en cierta ocasión escuché a dos alumnos que estaban resolviendo un problema de divisibilidad:

B.- El mínimo común múltiplo coge los primos comunes y no comunes elevados... ¿a qué exponente?

A.- Pues no estoy seguro... como es "mínimo" será al "menor" exponente... sí, eso, es al menor exponente.

B.- No sé... no sé... no me suena.. ¡ah, ya sé!: se deben coger los primos comunes y los no comunes elevados al mayor exponente, de eso estoy seguro, pero en vez de llamarse mínimo común múltiplo ha de llamarse máximo común múltiplo por eso que tú dices. Los dos llevamos razón

A.- Bueno, ahora viene lo difícil... este problema será de máximo común múltiplo, mínimo común divisor, máximo común divisor... ¡o vete tú a saber!

B/A.- Bla, bla, bla...

LOS GORROS DE MIS PRIMOS

Esta comunicación no trata sobre cómo lograr, de principio a fin, una enseñanza activa y significativa de tales tópicos; ya hay abundante bibliografía sobre el tema y a ella me remito¹. Aquí quiero detenerme en la parte final del proceso, justo antes de llegar a los consabidos galimatías lingüísticos ("comunes y no comunes elevados a ..."). Lo explico con un ejemplo:

Supongamos que se desea hallar el m.c.d. o el m.c.m de los n° 1360 y 2640.

Haciendo la tradicional descomposición primaria resulta:

$$1260 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2640 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$$

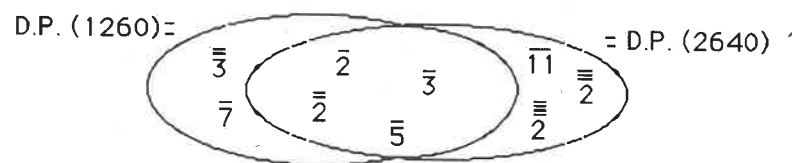
La sugerencia es hacer diferencias aparentes entre los primos que se repiten en la factorización de cada número, con objeto de "dar la impresión" de que todos los factores de la descomposición primaria son distintos. Una manera de realizarlo puede consistir en poner un gorro cuando un primo aparece por primera vez, dos gorros cuando aparece por segunda, tres gorros cuando aparece por tercera, etc.

En nuestro caso quedaría así:

$$D.P. (1260) = \{\bar{2}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$$

$$D.P. (2640) = \{\bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{11}\}$$

Y de esta manera podemos hacer con pleno conjuntista la intersección de ambos conjuntos:



En consecuencia:

m.c.d. (1260, 2640) = producto de los elementos de la intersección.

m.c.m. (1260, 2640) = producto de los elementos de la unión.

Y a partir de ahí, si se considera oportuno, se puede fundamentar los aludidos algoritmos.

Evidentemente, esta es una buena situación para establecer la relación entre m.c.m. y m.c.d.

En definitiva propugno utilizar la teoría de conjuntos a fondo y sin complejos. Esto garantiza el significado para el alumno de las recetas, pero al menos es una ayuda para favorecer el recuerdo, evitar decir tonterías y tender un puente hacia la comprensión.

LA TEORIA CONJUNTISTA

A través de este ejemplo se pretende reivindicar el interés, no sólo matemático sino también didáctico, del lenguaje y de la simbología

conjuntista. Nos parece absurdo el rechazo que en ocasiones produce todo lo que huele a conjunto; tan absurdo como la "conjuntivitis" que nos invadió tiempo ha.

No son buenos los movimientos pendulares que surgen cuando las cosas no salen según lo previsto; y entiendo que la Teoría de Conjuntos (socialmente entendida como Matemática Moderna) ha cumplido esta función: Todos recordamos cómo de una presentación a modo de panacea² para el fracaso escolar en matemáticas, pasó a ser considerada la culpable³ absoluta de todos los males achacables a la enseñanza-aprendizaje de esta ciencia.

En la actualidad hay autores⁴ que, en algunos momentos, producen la impresión de que la enseñanza activa y significativa está reñida con la utilización de la simbología conjuntista.

Reequilibremos, pues, este asunto si no queremos estar dando bandazos permanentemente. Con suma frecuencia unas nociones elementales de esta teoría clarifican tremendamente determinados procesos (verbigracia: lo comentado en el apartado anterior y que da origen al título de esta comunicación).

Reflexionemos, pues. ¿No sería estúpido renunciar a esta herramienta? ¿No habría incluso que plantearse si los programas oficiales se quedan escasos en esta materia y tratar de "arreglarlo" nosotros con el margen de maniobra de que dispongamos?

Y si de resolución de problemas se trata, ¿no son unas extraordinarias oportunidades, para practicar las etapas enunciadas por Polya, aquellos problemas en los que de un conjunto universal con varios subconjuntos se conocen algunos cardinales y hay que calcular el resto? ¿No son estos tipos de problemas ideales para entender el concepto de "modelo matemático" y la eficacia de su uso; ideales para ver cómo se pasa del lenguaje matemático al castellano y viceversa (con todo el fomento de la creatividad que esto último supone); ideales para discernir entre condiciones necesarias, suficientes o contradictorias; ideales para practicar la comprobabilidad y la reversibilidad de los problemas; ideales para relacionar las matemáticas con las distintas realidades de los alumnos?

BIBLIOGRAFIA

JIMENEZ PARRA, V.: Cómo lograr una enseñanza activa de las matemáticas. Edit. CEAC. Barcelona, 1990

SIERRA VAZQUEZ, M. Y OTROS: Divisibilidad. Edit. Síntesis. Madrid, 1989.

SANZ, INES Y OTROS: Por los caminos de la lógica. Lógica y conjuntos en E.G.B.. Edit. Síntesis. Madrid, 1988.

PIAGET, J.: Tratado de conocimiento científico. Volumen III: "Epistemología de la matemática". Edit. Paidós. Buenos Aires, 1979

BUJANDA JAUREGUI, M.P.: Tendencias actuales en la enseñanza de la matemática. Edit. S.M.. Madrid, 1981.

ESPINOSA, A. y VINADES, J.: El currículo de la Educación Primaria. Edit. Escuela Española. Madrid, 1991.

ESPINOSA, A. y VINADES, J.: El currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Edit. Escuela Española. Madrid, 1991.

POLYA, G.: Cómo plantear y resolver problemas. Edit. Trillas. México.

CITAS

1. Un buen ejemplo viene en el libro de Vicente Jiménez Parra: Cómo lograr una enseñanza activa de las matemáticas. Edit. CEAC.

2. Se dieron hasta razones psicogenéticas: Piaget había descubierto similitudes entre las estructuras matemáticas más importantes (asunto éste que tiene que ver con la Teoría de Conjuntos) y la estructura genética o psicológica del pensamiento infantil.

3. Recordemos que, el país donde surgió la corriente de enseñanza de la Matemática Moderna, Francia, es ahora uno de los más acérrimos detractores. Según comentó Emma Castelnuovo en la conferencia "Mirando al pasado, mirando al futuro", celebrada en Cáceres el 19 de noviembre de 1.991, en el currículum hasta los 16 años no aparece ni una sola vez la palabra conjunto e, incluso, algunos libros de texto advierten explícitamente que los símbolos $\cap$, $\cup$, C , las relaciones, etc. están descartadas y nunca han de utilizarse.

4. Por ejemplo, en el libro mencionado en la nota 1, pag. 44; justamente a propósito del tópico del m.c.d. se hace el siguiente irónico comentario: "Aquí tenemos una aplicación de la intersección de conjuntos. En éste caso, los elementos que la componen son algo más abstracto: por un lado están los intereses del niño... por otro los intereses del educador...".

MESA 2: MATEMATICAS EN SECUNDARIA

FRACTAL: ATRACTOR DE APLICACIONES CONTRACTIVAS

Alfonso Garmendia Salvador, Universidad Complutense de Madrid

Dionisio Pérez Esteban, Universidad Politécnica de Madrid

Adela Salvador Alcaide, Universidad Politécnica de Madrid

INTRODUCCION: PRECISAR EL TERMINO FRACTAL

El término fractal evoca algo irregular, intrincado, en que algo más pequeño es similar al todo. Algo como costas con muchos fiordos, las galaxias, sistemas ramificados como árboles, el sistema circulatorio, el sistema nervioso, ...

Diseñamos actividades que permiten estudiar algunos ejemplos geométricos de fractales revisando conceptos como iteración, límite, transformación geométrica, homotecia, etc. A continuación consideramos un conjunto de homotecias, (la homotecia de razón menor que la unidad es un ejemplo de aplicación contractiva), y aplicamos reiteradamente ese conjunto de homotecias observando que un fractal es un punto fijo de un conjunto de aplicaciones contractivas.

TRIANGULO DE SIERPINSKI

Actividad 1: En un triángulo equilátero marca los puntos medios de los lados. Unelos. Se forman cuatro triángulos. Quita el triángulo central. En cada uno de los tres nuevos triángulos repite el proceso. Y así sucesivamente. Completa el cuadro adjunto:

	0	1	2	3	4	5	n
Número de triángulos	1	3	9				
Longitud del un lado	L	L/2	L/4				
Longitud de la figura	3L	9L/2					
Area de la figura	A	3A/4					
Número de vértices	3	3+3	3+3+9				

Observa que el número de triángulos crece. Calcula el límite del número de triángulos cuando n tiende a infinito. ¿Cómo varía la longitud de un lado? ¿A qué tiende cuando crece n? ¿Y la longitud de la figura? ¿Crece o disminuye? Calcula el límite cuando n tiende a infinito. ¿Que ocurre con el área? ¿Y con el número de vértices?

A la figura formada la denominaremos triángulo de Sierpinski, y abreviadamente S.

El proceso que hemos seguido ha sido aplicar tres homotecias de razón $1/2$ y centros los tres vértices del triángulo al triángulo inicial y de forma iterativa a la figura obtenida siendo el triángulo de Sierpinski el punto fijo o atractor del conjunto formado por estas tres homotecias.

Actividad 2: Si partimos de cualquier otra figura llegamos a idéntico punto fijo. Repite el proceso de aplicar las tres homotecias a un rectángulo.

TETRAEDRO DE SIERPINSKI

Actividad 3: En un tetraedro regular marcamos los puntos medios de las aristas y al unirlos se forman tetraedros de lado mitad. ¿Cuántos?. Quitamos la figura central. En cada uno de los cuatro tetraedros restantes volvemos a repetir el proceso sucesivamente.

Completa el cuadro adjunto:

Etapas	0	1	2	3	4	5	n
Número de tetraedros	1	4	16				
Longitud de una arista	L	$L/2$	$L/4$				
Número de aristas	6	24					
Longitud total	$6L$	$12L$					
Volumen de cada tetraedro	V	$V/8$					
Volumen de la figura	V	$V/4$					
Número de vértices	4	$4+4$					
Número de caras		4					
Superficie de cada cara	A	$A/4$					
Superficie total	$4A$						

Analiza el comportamiento de la figura con el paso al límite.

¿Cómo varía su superficie total? ¿Qué dimensión crees que le correspondería?

Sugerencia: La forma central eliminada, que es un octaedro regular, es difícil de percibir. En el laboratorio de matemáticas sugerimos construir cuatro tetraedros iguales y analizar lo que falta para obtener el tetraedro de lado doble de partida.

El tetraedro de Sierpinski es el punto fijo del conjunto de cuatro homotecias de razón $1/2$ y centros en los cuatro vértices de un tetraedro.

CONJUNTO DE CANTOR

Actividad 4: Considera un segmento. Dividelo en tres partes iguales. Elimina la parte central. En los dos segmentos restantes repite el procedimiento. Y así sucesivamente.

Completa el cuadro adjunto:

Etapas	0	1	2	3	4	5	n
Número de segmentos	1	2	4				
Longitud de cada segmento	L	$L/3$	$L/9$				
Longitud de la figura	L	$2L/3$					

Analiza el comportamiento de la figura con el paso al límite.

A esta figura se la denomina "Conjunto de Cantor", y de forma abreviada la representaremos por C.

Hemos aplicado al segmento dos homotecias de centros los extremos del segmento y razón $1/3$, volviendo aplicar a la figura obtenida iterativamente dichas homotecias, obteniéndose, en el límite el conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor es, pues, el atractor de las dos homotecias.

Actividad 5: Si partimos inicialmente de únicamente de los dos puntos que dividían en tres al segmento anterior y aplicamos iteradamente las dos homotecias ya definidas volvemos obtener, en el límite, el conjunto de Cantor.

CURVA EN COPO DE NIEVE

Actividad 6: En un triángulo equilátero dividimos cada lado en tres partes iguales. Con lado la tercera parte construimos tres triángulos equiláteros y los añadimos en los centros de los lados. Tenemos ahora una figura estrellada. En cada lado volvemos a repetir el proceso sucesivamente.

Completa el cuadro adjunto:

Etapas	0	1	2	3	4	5	n
Longitud del un lado	L	$L/3$					
Número de lados	3	$4 \cdot 3$					
Longitud de la figura	$3L$	$12L/3$					
Area de la figura	A	$A+3A/9$					
Número de vértices	3	$3+6$					

Analiza el comportamiento de la figura con el paso al límite. ¿Cuál es el área? ¿Y la longitud?

A esta figura se la denomina como "Copo de Nieve". Si únicamente consideramos su contorno tenemos la llamada "Curva de Koch" que representaremos por K. Podemos considerar sólo uno de sus lados, el contorno o la superficie encerrada al hacer el estudio. ¿Qué conjunto de transformaciones tienen como atractor a cada una de ellas?

CONCLUSION

Hemos iniciado un estudio del término fractal únicamente mediante figuras autosemejantes atráctores de un conjunto de aplicaciones contractivas. Las figuras obtenidas son tan sugerentes que pueden servir como elemento motivador en diferentes momentos de la enseñanza secundaria: transformaciones geométricas, límites... Un estudio más completo permitiría analizar la dimensión de estos fractales u otros, o utilizar nuevos instrumentos para estudiarlos como el azar y la probabilidad.

BIBLIOGRAFIA

- Mandelbrot, B.: *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman. N. Y. (1982).
 Mandelbrot, B.: *Los objetos fractales*. Tusquets. Barcelona (1988)
 Falconer, K. J.: *The Geometry of fractal sets*. C. U. P. Cambridge. (1988).
 Hutchinson, J. E.: "Fractals and self-similarity". *Indiana Univ. Math. J.* 30, 713-747. (1981).

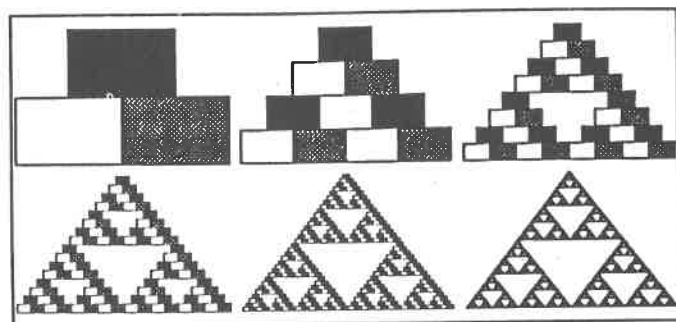


Figure 1.13 : Starting with a rectangle the iteration leads to the Sierpinski gasket. Shown are the first five steps and the result after some more iterations (lower right).

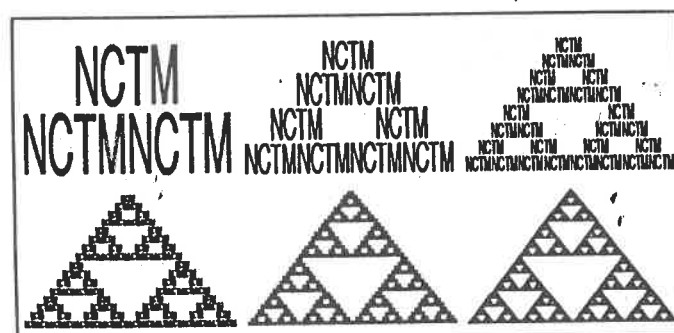
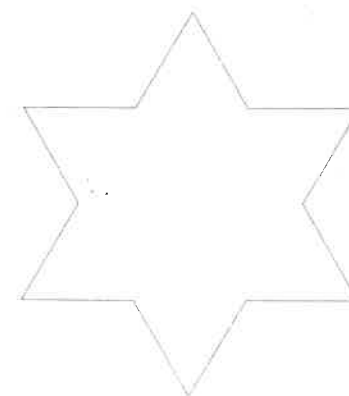
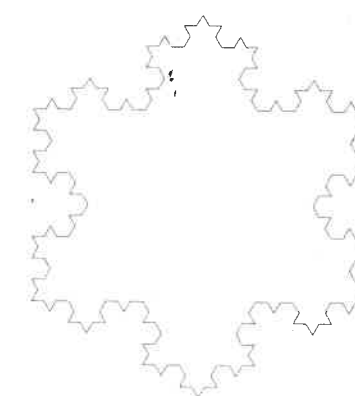


Figure 1.14 : We can start with an arbitrary image — this iterator will always lead to the Sierpinski gasket.

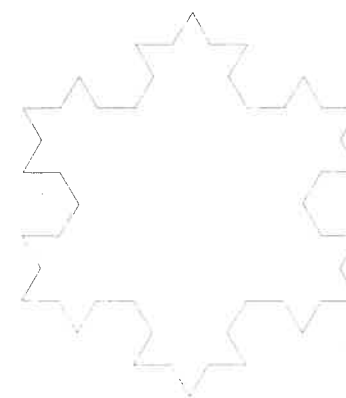
to get this result:



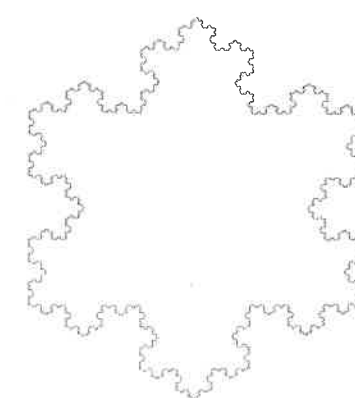
After another iteration:

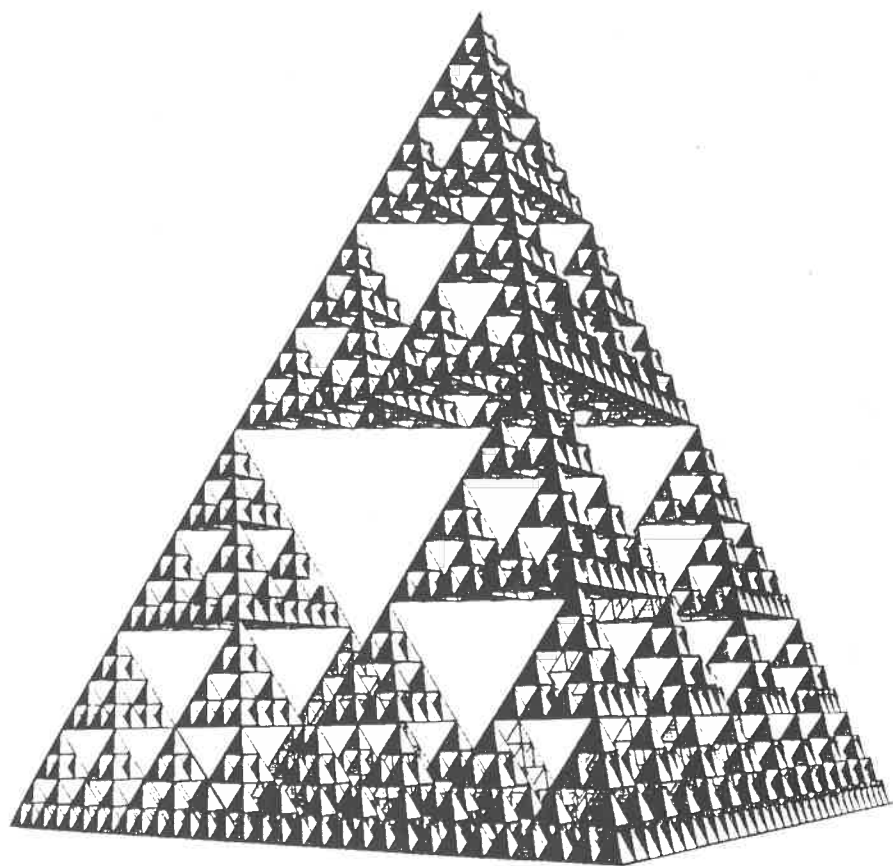


Apply the replacement rule again to the above result (iterate) to get



After infinitely more iterations we get the von Koch snowflake.





Esta comunicación presenta ciertos resultados elementales de teoría de números y una aplicación de los mismos a un problema de codificación. El nivel del trabajo corresponde a alumnos de 16-18 años, es decir, último curso de enseñanza obligatoria y bachillerato. No pretendemos elaborar una unidad didáctica, sino, presentar unificados ciertos resultados que se precisan para el estudio de los códigos, incidiendo durante la presentación de los mismos en los aspectos algorítmicos.

1. OBJETIVOS

1.a. Objetivos didácticos

En el desarrollo de esta comunicación hemos tenido presente algunos objetivos prioritarios que se encuentran en los estándares curriculares [1], entre otros: la resolución de problemas, el razonamiento y la conexión con otros campos de la ciencia. En cuanto al primer objetivo, se intenta que el alumno sepa utilizar enfoques de resolución para investigar y entender contenidos matemáticos; respecto al razonamiento se pretende que sepan usar modelos, propiedades, relaciones, etc, para analizar situaciones matemáticas y por último que sepan utilizar y valorar la utilidad de las Matemáticas, en este caso, las conexiones con la computación y el hecho de que la existencia de un algoritmo eficiente supone un ahorro no sólo de tiempo sino en numerosos casos económico.

1.b. Objetivos metodológicos.

El tipo de técnicas necesarias corresponden a la teoría de números elemental, utilizándose conceptos como el m.c.d., el teorema de Bezout y el indicador de Euler. La mayor parte de ellos se pueden exponer no sólo con rigor sino de modo ameno y dentro de una filosofía "constructiva de la Matemática".

Al trabajar con números se sigue muchas veces la tendencia a utilizar modelos existentes, al mismo tiempo que se da preferencia a demostraciones de naturaleza "abstracta", por ejemplo, la utilización de reducción al absurdo, etc. Nuestro objetivo consiste, siempre que sea posible, sustituir la demostración por algoritmos. De este modo, se obtiene una formularización constructiva de los resultados, y así el mismo proceso de demostración se puede trasladar a la construcción de cuantos ejemplos se deseen. El hecho de obtener directamente el algoritmo de la observación, fomenta el espíritu inductivo del estudiante sin perder de vista el deductivo.

2. EXPOSICION DEL TEMA

Con este criterio, vamos a presentar una serie de resultados que pertenecen a la teoría elemental de números:

2.a División entera de naturales: Sean a y b dos números naturales; al comparar dividendo y divisor pueden ocurrir:

- 1ª ETAPA: $a < b \implies$ cociente = 0 resto = a FIN
 $a = b \implies$ cociente = 1 resto = 0 FIN
 $a > b$ pasamos a trabajar con $(a - b)$ y b

 2ª ETAPA: $a - b < b \implies$ cociente = 1 resto = $a - b$ FIN
 $a - b = b \implies$ cociente = 2 resto = 0 FIN
 $a - b > b$ pasamos a trabajar con $(a - 2b)$ y b

 Kª ETAPA: $a - kb < b \implies c = k, r = a - kb$ FIN
 $a - kb = b \implies c = k + 1, r = 0$ FIN
 $a - kb > b$ pasamos a trabajar con $(a - (k+1)b)$ y b

como el número de naturales $< a$ es finito el proceso termina. Se puede proceder de forma similar para polinomios de una variable.

2.b Algoritmo de Euclides Sean a y b números o polinomios, $b \leq a$, se comprueba inmediatamente que si r es el resto de la división de a entre b , entonces el m.c.d. $(a, b) = \text{m.c.d.}(b, r)$. Este hecho lo utilizamos para el desarrollo de los algoritmos:

- 1ª Etapa: $b / a \implies \text{m.c.d.}(a, b) = b$
 Si $b / a \implies$ si r_1 es el resto $\implies \text{m.c.d.}(a, b) = \text{m.c.d.}(b, r_1)$
 se cambia (a, b) por (b, r) y $r_1 < b \leq a$
 2ª Etapa: $r_1 / b \implies \text{m.c.d.}(a, b) = \text{m.c.d.}(b, r_1) = r_1$
 Si $r_1 / b \implies$ si r_2 es el resto $\implies \text{m.c.d.}(b, r_1) = \text{m.c.d.}(r_1, r_2)$
 se cambia (b, r_1) por (r_1, r_2) y $r_2 < r_1 < b \leq a$

 kª Etapa: $r_k / r_{k-1} \implies \text{m.c.d.}(a, b) = \text{m.c.d.}(r_{k-1}, r_k) = r_k$
 $r_k / r_{k-1} \implies$ si r_{k+1} es el resto $\implies \text{m.c.d.}(r_{k-1}, r_k) = \text{m.c.d.}(r_k, r_{k+1})$
 y $r_{k+1} < r_k < \dots < b \leq a$, como el nª de naturales $< b$ es a lo sumo b , en b etapas se acaba el proceso.

Este mismo algoritmo se puede usar para demostrar el teorema de Bezout. Sean $(d_1, d_2) = E_0$ el estado inicial ($d_2 \leq d_1$), la manipulación da lugar a (c_0, r_0)

(cociente y resto) y $(d_2, r_0) = E_1$ el nuevo estado y así sucesivamente, dando lugar a:

$$E_0 \xrightarrow{(c_0, r_0)} E_1 \xrightarrow{(c_1, r_1)} \dots E_i \xrightarrow{(c_i, r_i)} E_{i+1} \xrightarrow{\dots} \dots$$

El algoritmo es finito puesto que la manipulación de cada estado da lugar, cada vez, a números más pequeños: $r_{i+1} < r_i \dots < d_2 \leq d_1$.

a lo largo de este proceso se verifica que:

1) El m.c.d. de dos números (d_1, d_2) es el último resto ≤ 0 , o sea, $r_n = \text{m.c.d.}(a, b)$. Basta ver que el m.c.d. $E_i = \text{m.c.d.}(E_{i+1}, \forall_i)$, y la última manipulación nos lleva al estado (r_{n-1}, r_n) .

2) **Teorema de Bezout.** Siendo a y b dos enteros, existen otros dos enteros h y k / $h \cdot a + k \cdot b = d$. En el caso particular en que estos enteros sean primos entre sí, $d = 1$.

En efecto, partiendo de las situaciones anteriores

$$E_{n+1} = (r_{n-1}, r_n)$$

$$\text{si } r_n / r_{n-1} \implies \text{m.c.d.}(E_{n+1}) = r_n \implies r_n = 1 \cdot r_{n-1} + 0 \cdot r_{n-2}$$

$$E_n = (r_{n-2}, r_{n-1}) \implies r_{n-2} = c_n \cdot r_{n-1} + r_n \implies r_n = r_{n-2} - (c_n) \cdot r_{n-1}$$

$$E_{k+1} = (r_{k-1}, r_k) \quad r_n = e_k \cdot r_k + e_{k-1} \cdot r_{k-1}$$

$$E_k = (r_{k-2}, r_{k-1}) \quad r_k = r_{k-2} - c_k \cdot r_{k-1} \implies r_n = c_k \cdot (r_{k-2} - c_k \cdot r_{k-1}) + e_{k-1} \cdot r_{k-1} \\ = e_k \cdot r_{k-2} + (e_{k-1} - e_k c_k) r_{k-1}$$

se sigue el proceso hasta E_0 . Obsérvese que en este caso no existe una fórmula que de los números h y k , pero sí una fórmula que permite pasar de una etapa del algoritmo a la siguiente.

3. APLICACIONES A EFECTUAR ALGUNOS CALCULOS COMPLEJOS

Vamos a efectuar los cálculos siguientes: a) Calcular el resto de la división de 35267. 178459. 348745761. 456783 entre 3211; b) Calcular el resto de 317149 entre 8051?, ¿se pueden realizar dichas operaciones?. Para ello, vamos a presentar una serie de propiedades en las que nos basaremos.

i) El resto de la suma de dos números a y b al dividir por c , es igual al resto de la suma de los restos.

En efecto, siendo e y e' los cocientes respectivos y r y r' sus restos, tenemos las siguientes ecuaciones:

$a = e.c + r$ y $b = e'.c + r' \implies a + b = (e + e').c + (r + r')$ pudiendo ocurrir: $r + r' < c$, ó $r + r' > c$

en el primer caso está comprobado, en el segundo, dividimos dicha suma, de forma que:

$$(r + r') = e''.c + r'' \implies a + b =$$

$$(e + e' + e'').c + r'', r'' < c.$$

ii) El resto de un producto de dos números a y b al dividir por otro c , es igual al resto del producto de los restos.

En efecto, con las mismas ecuaciones anteriores:

$$a.b = cc + cr + cr' + rr' = c + rr'$$

en donde se repite el proceso del apartado anterior con rr' .

iii) Siendo a y b enteros y primos con m , si se verifica que $a.b - a = m$, entonces $b - 1 = m$, puesto que si $a.b - a = m \implies a(b - 1) = m$, como a es primo con $m \implies b - 1 = m$.

iiii) Teorema de Euler. Si a es primo con m y $m > 0$, se verifica que: $a^{\Phi(m)} - 1 = m$, siendo $\Phi(m) = n$ el número de enteros positivos primos con m y $< m$, denotados por $a_1, a_2, \dots, a_n$ (*).

En efecto, si a_i es primo con m su producto con a también será primo con m , por tanto:

$$a.a_i = m + r \quad (r \neq 0, r < m)$$

$$a_j = m + r \quad (r \neq 0, r < m)$$

$$\text{por i), tendremos: } a.a_i - a_j = m \implies a.a_j = m + a_j$$

realizando este producto para (*), se verificará multiplicando las n igualdades (ii) la siguiente ecuación:

$$a.a_1.a.a_2.a.a_3 \dots a.a_n = m + a_1.a_2.a_3 \dots a_n$$

que por iii) podemos simplificar, dando lugar a:

$$a.a.a \dots a = m + 1 \text{ y por tanto: } a^{\Phi(m)} - 1 = m \quad (1)$$

Veamos también que si $n.n' - 1 = b^{\Phi(m)} \implies Mnn' - M = m$

(2) como se verifica las siguientes igualdades:

$$n.n' - b^{\Phi(m)} = 1 \text{ y } M^{\Phi(m)} - 1 = m$$

$$Mnn' = M + b^{\Phi(m)} = M.M.b^{\Phi(m)} = M(m + 1) = m + M \implies M^{nn'} = m + M$$

es fácil comprobar que si m es un producto de primos $M = P_1.P_2 \dots P_r$ enteros $\Phi(m) = (p_1 - 1) \dots (p_r - 1)$.

Ejemplo (1). Aplicando lo anterior, vamos a calcular el resto de 317^{149}

entre 8051. Como $149 = 1 + 4 + 16 + 128$ y debido a las propiedades anteriormente presentadas podemos reducir el trabajo de multiplicar 149 veces el número 317, a tan sólo el cálculo de 10 productos:

$$(0317)^{149} = (317).(317)^4.(317)^{16}.\tilde{(317)}^{128} = 317.7963.5688.158 \cdot 8051 = 4308.5043 - 8051 = 3646 - 8051$$

$2n$	$(0317)^{2n}$	8051	2^n	$(0317)^{2^n}$	8051
1		317	16	$(7744)^2$	5688
2	$(317)^2$	3877	32	$(5688)^2$	4426
4	$(3877)^2$	7963	64	$(4426)^2$	1396
8	$(7963)^2$	7744	128	$(1396)^2$	158

Por tanto: $(0317)^{149} = 3646 - 8051$ y el resto es 3646.

4. APLICACION EN CODIFICACIONES

Imaginemos una colección de individuos que quieren comunicarse entre sí por medio de mensajes (M), de forma que ésta sea segura y secreta. Una situación de este tipo es fácil de encontrar en la realidad, por ejemplo entre un banco y sus clientes, un servicio diplomático de un país, etc. ¿Es posible diseñar un proceso para resolver este problema?, la respuesta es afirmativa, curiosamente estaba al alcance de los matemáticos de la época de Euler y sin embargo a pesar de que desde Euler a nuestro días han existido infinidad de situaciones en las cuales hubiera sido importante disponer de este tipo de herramientas (la bolsa, la guerra fría, etc), no se resolvió el problema hasta 1978 por Rivest, Shamir y Adleman.

El código de Rivest, Shamir y Adleman

A cada individuo i se le asignan tres números enteros N_i suficientemente grande ($>10^{150}$), n_i y n_i' , de forma que conoce los dos primeros de todos los destinatarios y el tercero sólo es conocido por el mismo.

Vamos a valernos ahora de un ejemplo. Se trata primeramente de tomar para cada individuo i un número $N_i = 8051$ producto de dos números primos

$a_i=83$ y $b_i=97$, siendo $\Phi(N_i) = (a_i-1).(b_i-1) = 7872$; seguidamente tomar otro número n_i primo con $\Phi(N_i)$, en este caso 149 ($\text{m.c.d.}(7872, 149) = 1$). A partir del teorema de Bezout y aplicando el algoritmo para determinar el m.c.d. de 7872 y 149 calculamos otro número n'_i de esta forma $n_i.n'_i - 1 = \Phi(N_i)$. El algoritmo de Euclides suministra el número $n'_i = 317$.

Si un individuo de esta familia desea mandar un mensaje $M = \text{"COMPRA"}$ a la persona que tiene asignada los números: $N = 8051$ y $n = 149$, primeramente debe realizar una traducción numérica de esta palabra mediante un código trivial (orden de las letras en el alfabeto), en este caso: $\text{"COMPRA"} = 031714182001$ y descomponerlo en grupos de números, teniendo en cuenta que éstos no superen N . En este caso lo descomponemos en grupos de cuatro números: $M1 = 0317$, $M2 = 1418$ y $M3 = 2001$.

El código propuesto por los autores mencionados, consiste en codificar M_i por el resto de dividir por N (T. de Euler). Por tanto $C(0317) = (0317)149(\text{Ej.1})$. Una vez llegado este número al destinatario, y debido al carácter de los números n y n' , la decodificación (D) del mismo obedece a la fórmula: $M^{n.n'} - M = N$. En este caso, $D(3646) = (3646)317$, realizándose un procedimiento similar al anterior, obtenemos que $(3646)317 = 317 - 8051$.

Con idéntica metodología la codificación de los restantes grupos de palabras será: $C(1418) = 2731$ y $C(2001) = 2266$, por tanto, la codificación del mensaje es la siguiente:

$C(\text{"COMPRA"}) = 364627312266$

BIBLIOGRAFIA

1. "Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática". National council of teachers of Mathematics (NCTM). Edit. S.A.E.M. Thales.
2. "Las Matemáticas sí cuentan". Informe Cockcroft. Edit. M.E.C.
3. "Elementary number theory". Edmund Landau. Edit. Chelsea Publishing Company. New York.
4. "Arithmetique et codes secrets". J.M. Deshouillers. Revista de la Universidad de Valladolid, junio 1982.

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS EN SECUNDARIA OBLIGATORIA CONTRIBUCION DESDE UN PROGRAMA DE ENSEÑAR A PENSAR

Aguilera, A. y Mora, J.
Universidad de Sevilla

Un aprendizaje eficaz no depende sólo de la edad o de los años de experiencia; ni de la inteligencia "con la que nacemos" o de un CI determinado; ni siquiera de descubrir y aplicar mecánicamente "el procedimiento correcto" para cada situación. Los alumnos que aprenden eficazmente son los que han desarrollado un amplio repertorio de estrategias entre las que saben elegir la más adecuada a una situación, adaptándola con flexibilidad a las necesidades de cada caso; los que conocen su estilo de aprendizaje y aplican estrategias de acuerdo con él. La clave parece ser la capacidad de captar consciente o inconscientemente las exigencias de la tarea y de responder a ellas adecuadamente, es decir la capacidad de reconocer y controlar la situación de aprendizaje. Esta percepción implica una serie de habilidades denominadas "metacognitivas" que son las que nos permiten "aprender a aprender" (NISBET y SHUCKSMITH, 1987). En ello va a consistir uno de los objetivos irrenunciables de la educación.

La idea de aprender a aprender ha atraído la atención de diversos ámbitos. Así, los defensores de la educación permanente sostienen que "aprender a aprender" debe ser un objetivo de la enseñanza obligatoria si se quiere aprender de por vida como parece ser necesario en una sociedad postindustrial. Los teóricos del currículum afirman que un currículo debe transmitir las formas básicas del conocimiento y una de ellas es aprender los distintos modos de pensar. La psicología cognitiva ha hecho de "aprender a aprender" su objeto capital de interés. Diversas propuestas de reforma de la educación han subrayado la idea de aprender a aprender (NISBET y SHUCKSMITH, 1987).

La reforma educativa actualmente en curso en nuestro país también incluye entre sus intenciones la necesidad de capacitar a los estudiantes para aprender a aprender (MEC, 1989). Una concreción de estos deseos es la inclusión de los contenidos de procedimiento en los nuevos currículos de la enseñanza obligatoria. No es baladí esta novedad; por supuesto que los profesores pueden aducir que siempre se han enseñado procedimientos, que al enseñar los conceptos de una determinada materia actuaban, queriendo o sin querer, como modelos que los estudiantes imitaban consciente o inconscientemente; por tanto, afirmarían, la enseñanza de las áreas

curriculares tradicionales (y especialmente la de matemáticas) suponía de hecho un entrenamiento en habilidades de pensamiento.

Sin embargo actuar así conlleva ciertas limitaciones: En primer lugar nos encontramos con alumnos que no llegan a captar los procedimientos implícitos en la actuación de sus profesores. Estos, al enseñar, no proporcionan toda la información que los alumnos procesan (referida en general a procedimientos y base de conocimientos previos) lo que obliga a una tarea de inferencia que no todos los alumnos son capaces de realizar. Ante esta situación, no hay más remedio que recurrir al aprendizaje repetitivo, no significativo o al fracaso y el abandono tras la explicación de que "no se me dan las matemáticas", pues si el aprendizaje repetitivo puede disimular los malos aprendizajes en otras áreas, en matemáticas es más difícil.

En segundo lugar, las habilidades y procedimientos enseñados por el profesor de la manera descrita, generalmente están muy vinculadas a los contenidos conceptuales de las áreas, con lo cual se dificulta su transferencia para ser aplicadas en situaciones prácticas, cotidianas, distintas a aquellas en las que fueron enseñadas.

La reforma educativa sale al paso de la primera de las limitaciones señaladas en la medida en que propone que la enseñanza de los procedimientos deje de pertenecer al "currículo oculto" para pasar a formar parte de la formación que conscientemente debe proporcionarse a todos los alumnos mediante los modos más adecuados a sus características personales. Por el contrario, respecto a la segunda limitación, los contenidos de procedimiento del nuevo currículo pueden no ser suficientes ya que: a) Las operaciones cognitivas que en ellos se contemplan son fundamentalmente habilidades específicas de pensamiento, y b) Las tareas en que se apoyan están muy vinculadas a las áreas tradicionales de aprendizaje. Por ambas razones es probable que surjan dificultades para la transferencia de los aprendizajes.

Por otra parte, el área de matemáticas es especialmente propiciadora de la mejora de las habilidades de pensamiento desde el momento en que uno de sus objetivos es preparar a los alumnos para resolver problemas. Como se señala en el informe Cockcroft (en Gómez Chacón, 1992): "La resolución de problemas es cosustancial a las matemáticas. Las matemáticas sólo son útiles en la medida en que puedan aplicarse a una situación concreta ... El profesor ha de ayudar a los alumnos a entender cómo deben aplicar los conceptos y destrezas que están aprendiendo y cómo han de hacer uso de los mismos en la resolución de problemas". Sin embargo, también parecen ser frecuentes las dificultades de los estudiantes para aplicar los conocimientos matemáticos adquiridos a la solución de problemas de la vida real (NCTM, 1980). En esta misma línea, creemos muy posible que la dificultad esencial del aprendizaje matemático radique en la incapacidad relativa de los alumnos para transferir y aplicar lo que conocen.

Existen unas habilidades generales de pensamiento que controlan el "aprender a aprender" y la transferencia de lo aprendido. Son los llamados

procesos **metacognitivos**, que subyacen al resto de procesos, los regulan y controlan, los activan en los momentos adecuados y modulan, permitiendo responder de modo distinto y adaptado ante situaciones diferenciadas. Para que los procesos que controlan el razonamiento actúen parece necesario que el sujeto no sólo aprenda mecánicamente ciertas reglas, sino que tome conciencia de los factores que entran en juego, llegando así a tener conocimiento del propio modo de proceder al razonar, y a ser capaz de organizar y supervisar en consecuencia el curso y modo de su actuación. En todo esto, precisamente, consiste la **metacognición**.

Una interesante cuestión es ver si es posible lograr suficientes habilidades metacognitivas en la generalidad del alumnado, a través sólo del desarrollo curricular ordinario y, en el caso que nos ocupa, del área matemática. No hay un claro consenso entre quienes han estudiado el tema. Frente a los que piensan que el currículo ordinario debe ser suficiente, hay quienes sostienen la necesidad de intervenciones especializadas, en forma de programas específicos para desarrollar las habilidades cognitivas y metacognitivas.

En nuestra opinión, ambas posiciones son legítimas y compatibles. No debe discutirse la intervención metacognitiva desde las áreas curriculares sino la conveniencia de incluir además programas de "enseñar a pensar". El criterio de decisión será el nivel del alumnado. En el caso de sujetos con limitaciones cognitivas es preciso reforzar dicho currículo con la aplicación de programas específicos.

Por otra parte, pensamos que el cambio educativo y de actitudes que postula la actual reforma difícilmente se va a dar sin la incorporación de nuevas técnicas que sean ocasión para realizar tales cambios. Y los programas de mejora del pensamiento pueden ser esa ocasión en cuanto instrumentos actualizadores de la dinámica de clase y estilo de interacción que deseamos y oportunidad de perfeccionamiento del profesorado. Además, los programas proporcionan experiencias curriculares más flexibles que el marco académico tradicional y dirigen la atención sobre las operaciones del pensamiento sin interferencias derivadas de la dificultad de la tarea académica.

Desde el año 1984, venimos desarrollando uno de estos programas, "Comprender y Transformar" (MORA, 1988), destinado al desarrollo de habilidades metacognitivas en sujetos de edades comprendidas entre 11-18 años, con bajo funcionamiento cognitivo de etiología cultural u orgánica, que presenten unas mínimas habilidades de comunicación y autorregulación.

Sus elementos esenciales son un conjunto de materiales, un esquema de actuación del profesor, igual para todas las actividades y un conjunto de patrones de conducta docente que deben ser puestas en juego durante la interacción. El dominio de estos elementos forma parte del necesario proceso de formación de los profesores aplicadores.

Los materiales son 30 unidades de trabajo basadas sobre juegos de grupo

que, tras realizarse, se discuten y analizan. Cada una es presentada con sugerencias para su desarrollo incluyendo información sobre la descripción y metodología del juego, su análisis psicopedagógico y ejemplos de desarrollo de las sesiones.

El esquema de la discusión es siempre el mismo aunque el orden de los elementos se altere. Es un esquema de interacción que da unidad al programa, facilita la adquisición de estrategias cognitivas básicas y permite su generalización por medio de la persistencia en el tiempo junto con la aplicación a las diferentes tareas.

Una característica de "Comprender y Transformar" que merece la pena destacar es que con su empleo en el aula se cubre gran parte de los objetivos generales de la Educación Secundaria Obligatoria así como de sus distintas áreas, precisamente aquellos que la legislación señala como prescriptivos para todos los alumnos, incluidos aquellos que presentan Necesidades Educativas Especiales. Igualmente, "Comprender y Transformar" abarca contenidos de las distintas áreas de la etapa, también de la de matemáticas, especialmente en aquellos aspectos que son una novedad en el nuevo currículo, a saber, los contenidos de procedimientos y actitudes tal como se expone, a modo de ejemplo, en el cuadro que se adjunta referido únicamente a las diez unidades de CyT correspondientes al primer año de aplicación.

Por todo ello pensamos, y así lo proponemos, que Comprender y Transformar puede emplearse como instrumento útil a incluir en los Proyectos Curriculares de Centro, especialmente de los que se hallan insertos en zonas culturalmente deprivadas y con alto riesgo de fracaso escolar o de aquellos otros que cuentan con alumnos con especiales dificultades que necesitan adaptaciones curriculares o programas de diversificación curricular.

RELACION ENTRE LAS UNIDADES DEL PRIMER AÑO DE "CyT" Y LOS OBJETIVOS GENERALES DE EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA

CyT : Ob.Ge.	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
PD.I.1.B				*				*				
PA.I.1.B				*			*		*			
PA.I.2.B			*	*				*		*	*	
PA.I.3.B	*		*			*		*		*		
EO.I.1.B			*	*		*				*		
RP.I.1.B				*		*						
RC.I.1.B	*			*			*	*	*			*
AC.I.1.B					*	*						
CM.I.1.B		*										

RELACION ENTRE LAS UNIDADES DEL PRIMER AÑO DE "CyT" Y LOS OBJETIVOS GENERALES DEL AREA DE MATEMATICAS DE EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA

CyT : Ob.Ge.		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
PD.I.1.B					*						
PA.I.1.B					*			*	*		
PA.I.2.B								*			
PA.I.3.B									*		
EO.I.1.B			*							*	
RP.I.1.B											
RC.I.1.B					*						*
AC.I.1.B											
CM.I.1.B		*			*	*					

RELACION ENTRE LAS UNIDADES DEL PRIMER AÑO DE "CyT" Y LOS CONTENIDOS DEL AREA DE MATEMATICAS DE EDUCACION SECUNDARIA OBLIGATORIA

PD.I.1 RASGOS RELEVANTES

1/OP18; 3/OC3a; 3/OC4b; 3/OC5; 3/OP10; 3/OP13; 3/OA4

PA.I.1 ANALISIS

2/OP6; 3/OP11; 3/OP13; 3/OA4

PA.I.2 PAUTAS DE COMPARACION

1/OP5; 2/OA5; 2/OA6; 3/OC1; 3/OC3; 3/OC4; 3/OC5; 3/OP5; 3/OP7; 3/OP12

PA.I.3 HECHOS Y OPINIONES

1/OA9; 3/OA4; 3/OA10

EO.I.1 ORGANIZAR LA INFORMACION

3/OC2; 3/OP3; 5/OP2

RP.I.1 REDUCIR IMPULSIVIDAD

1/OP4; 2/OP10; 2/OA6; 3/OP2

RC.I.1 LO POSITIVO Y LO NEGATIVO

1/OA1; 1/OA3; 1/OA8; 2/OA6; 3/OP14

AC.I.1 AUTOCONCEPTO GLOBAL

CM.I.1 DIAGRAMAS DE FLUJO

1/OA10; 2/OP10; 4/OP1

REFERENCIAS

GOMEZ, I.M. *Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas*. Madrid: Narcea, 1992.

Ministerio de Educación y Ciencia. *Diseño Curricular Base de Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC, 1989.

MORA, J. "El programa 'Comprender y Transformar'". En A. Fierro. *Psicología Clínica*. Madrid: Pirámide, 1988.

NCTM (Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas). *An Agenda for Action*, Reston, 1980.

NISBET, J. y SUCKSMITH, J. (1986) *Estrategias de aprendizaje*. Madrid: Santillana, 1987.

MATEMATICAS: SUGERENCIAS PARA UNA METODOLOGIA

María Victoria Veguín Casas

I.B. Beatriz Galindo. Madrid

Esta comunicación pretende exponer una metodología inspirada en el análisis conductal aplicado. Dicha metodología es un apoyo a cualquier modelo formal de enseñanza-aprendizaje y por tanto compatible con dicho modelo. Se desarrolla mediante un ejemplo de programa de modificación de hábitos de aprendizaje que es adecuado para los últimos cursos de Secundaria.

De la teoría psicológica en la que nos inspiramos tomaremos:

- 1) Su propuesta de enunciar conductas concretas observables.
- 2) Un principio del condicionamiento operante: el reforzamiento positivo.
- 3) La evaluación individual.

1. UN EJEMPLO DE PROGRAMA DE MODIFICACION DE CONDUCTA

Surge así la primera pregunta. ¿Qué conductas concretas o hábitos de trabajo pretendemos como profesores de Matemáticas modificar en nuestros alumnos?. Para responder tendríamos que tener un listado de conductas deseables y no deseables.

De un cuestionario elaborado con esta finalidad que consta de cinco apartados y tiene 50 ítems se han extraído tres. Estos ítems son:

* ¿Consultas, al menos una vez cada quince días, otros libros de Matemáticas, además del de texto obligatorio?

SI	NO	?
----	----	---

* ¿Comparas en alguna ocasión a lo largo del curso el mismo tema en varios libros?

SI	NO	?
----	----	---

* Basándote en conocimientos que posees creas tú el enunciado de algunos problemas (10 problemas por término medio) al menos una vez cada curso?

SI	NO	?
----	----	---

- * La ? se interpreta como "A veces".

La modificación en las respuestas a estas preguntas pretende evitar algunos defectos extendidos en todos los niveles de nuestra enseñanza como son:

- * Estudiar solamente con apuntes sin consultar libros.
- * No "crear" nunca a lo largo de la vida de estudiante sus propios problemas.

2. TECNICA PARA CONSEGUIR EL PROPOSITO DEL PROGRAMA

Reforzamiento positivo

Para modelar las respuestas objetivo del programa:

i) Consultar libros; ii) Crear problemas propios se han establecido tres tareas. Estas tareas se les proponen voluntariamente a los alumnos para ser realizadas fuera del horario lectivo. La ejecución de ellas llevará asociada el reforzador más potente que como profesores tenemos: "Un incremento en la nota en la correspondiente evaluación". El muestreo de este reforzador será sin duda un punto clave en el programa, es decir, que la nota incrementada sea lo suficiente como para motivarles a trabajar, pero sin permitir aprobar sin demostrar conocimientos mínimos en un examen.

No obstante, pretendemos inculcar a nuestros alumnos que los hábitos que van a adquirir deben conservarlos independientemente de la nota. Con este objetivo se ha pensado introducir unos distintivos en el programa como reforzadores simbólicos. Han sido ya cuidadosamente creados por D^a. Isabel Rodríguez Gutiérrez, Licenciada en Bellas Artes (se verán en diapositivas). La misión de estos símbolos es, mediante variaciones de color, complejidad de formas geométricas y tamaño, comunicar al alumno de forma visual, artística y cualitativa su avance y profundización en el estudio de las matemáticas.

3. DESCRIPCION DE LAS TAREAS

3.1. Primera Tarea

El alumno debe realizar una colección de diez problemas consultando diversos libros de Matemáticas. Cada uno de los problemas irá en una ficha de cartulina. En el ángulo superior izquierdo del anverso de cada ficha se escribirá el nombre del autor del libro de consulta, el título de la obra, capítulo del que se toma la referencia y página. En la parte superior derecha, la parte de la asignatura a la que se refiere. Ejemplo: Trigonometría, Logaritmos... En el reverso, ángulo inferior de la ficha el nombre del alumno autor de la ficha, el curso y el grupo al que pertenece y el año.

Ejemplo:

Ecuaciones exponenciales

Alvarez Díaz, E.
Problemas de Aritmética y Algebra sobre temas de Mitología
Capítulo XV, pág. 134.

Los juegos píticos fueron instituidos en Delfos por Apolo para celebrar la victoria por él obtenida sobre la serpiente Pitón. Eran verdaderos certámenes sobre poesía y música y se celebran cada x años. Hallar x sabiendo que es la solución positiva de la ecuación $52X^2 - 4X - 3 = 625$

El problema debe estar perfectamente resuelto y el alumno debe quedarse con una colección de problemas similar a la que entrega al profesor. Debe ser capaz de explicar dichos problemas.

Reforzador simbólico:

Color: Gama de los amarillos. Formas geométricas planas y sencillas. Dimensiones 10x10 cm.

Los adjetivos simbólicos del amarillo son: simpatía, confianza, optimismo. Los distintivos de este nivel **han de concretar** que se han conseguido unos objetivos básicos, preparatorios de otros más profundos. I

Nota a incrementar (reforzador práctico): A determinar por el profesor.

Aplicación de la actividad: Mediante esta tarea podemos crear:

A) Un fichero de aula: Con las aportaciones de los alumnos se irá creando un fichero de problemas. Este, a su vez, se utilizará para dar una oportunidad a nuestros alumnos mediante la consulta de las fichas que deseen, de recuperar o profundizar en la asignatura favoreciendo su ZDP - zona de desarrollo próximo - según Vygotsky, al interactuar con un compañero fuera del espacio de aula.

B) Un fichero de Centro: Terminado el curso, la colección de problemas puede pasar a disposición de la Biblioteca del Centro. Tras varios cursos se podría generar así una buena colección.

3.2. Segunda tarea

Cada alumno deberá realizar un trabajo escrito que consistirá en analizar el mismo tema de la asignatura en cuatro textos oficiales de distintas editoriales. Para realizar dicha tarea se entregará al alumno un guión.

El trabajador deberá ser expuesto en clase en un período máximo de quince minutos.

Reforzador simbólico:

Color: gama azul-verdosa. Formas geométricas más complicadas incluso con algún plano levantado saliendo del espacio estrictamente bidimensional. Tamaño 8x8 cm. Estos distintivos transmiten la idea de seguridad que proporciona la profundización en cualquier temática.

Nota a incrementar: a determinar por el profesor.

3.3. Tercera Tarea

El alumno debe elegir un tema como entorno de enunciados de problemas de Matemáticas. Como ejemplo, se le puede presentar problemas con enunciados de mitología griega y romana, extraídos del libro de Alvarez Díaz Eugenio (1944). A continuación se le pide que elabore una colección de diez problemas con enunciados de su tema acompañando a la colección el protocolo de su realización.

El log₂ 512 coincide con el día del mes de Noviembre de 1989 en que cayó el muro de Berlín. Averigua dicho día.

Laura Rol, 2º G, Curso 90-91.

Reforzador simbólico.

Gama violeta-carmín. Forma Tridimensional.
Tamaño 6x6x6 cm.

Al ir avanzando en complejidad las formas del reforzador se complican, pero disminuyen en tamaño para indicar que profundizamos.

Nota a incrementar: A determinar por el profesor.

4. FASES DEL PROGRAMA

En los programas de modificación de conducta en psicología se utilizan diseños con fases en las que el reforzamiento está disponible y otras en las que está ausente.

Podríamos fijar un diseño reversible ABA'B de cuatro fases para desarrollarse durante un curso académico.

Fase A: Duración 8 semanas. Realización de la primera tarea. Reforzamiento disponible.

Fase B: Duración 4 semanas. Sin reforzamiento. Se trata de ver si los alumnos siguen consultando libros y elaborando fichas.

Fase A': Duración 8 semanas. Reforzamiento disponible. Se realizarán las tareas segunda y tercera. Los alumnos que no se "atreven" con estas pueden realizar la primera.

Fase B: Duración: Hasta final de curso. Sin reforzamiento.

5. EVALUACION DEL PROGRAMA

La elaboración del programa se efectuará mediante el análisis cualitativo de los trabajos aportados por cada uno de los alumnos así como de su ¿cambio? de actitud ante las matemáticas.

6. EXPERIENCIA INTERDISCIPLINAR

El origen de esta propuesta fue una experiencia interdisciplinar entre Matemáticas y Dibujo realizado en el I.B. Beatriz Galindo en el curso 90-91 dentro de un programa de Innovación de la C.A.M. Los grupos de alumnos fueron el 2º G que realizaba tareas de Matemáticas y el 2º J que diseñó numerosos reforzadores simbólicos.

7. BIBLIOGRAFIA

- Alvarez, E. (1944): *Problemas de aritmética y algebra sobre temas de mitología*. Méjico D.F. 265 pág.
- Ayllon, T.; Azrin, N (1988): *Economía de fichas*. Trillas. Méjico. 280 pág.
- Kazolin, A. (1978): *Modificación de la conducta y sus aplicaciones prácticas*. El Manual Moderno. Méjico D.F. 343 pág.
- Gairin, J. (1987): *Las actitudes en educación*. PPU. Barcelona. 248 pág.
- Salas, M. (1962): *Técnicas de estudio para enseñanzas Medias y Universidad*. Alianza. Madrid. 266 pág.

UNA EXPERIENCIA METODOLOGICA SOBRE LAS CURVAS CONICAS

Arriero Villacorta, Carmen y Galarraaga, M^a Esperanza
I.B. Celestino Mutis. Madrid

¿Cuál es la idea global que adquiere el alumno con el estudio habitual de las curvas cónicas? En el mejor de los casos, para ellos las cónicas son unas curvas que, sin que se sepa muy bien por qué, están asociadas a una "misteriosas" ecuaciones.

Intentamos esclarecer tanto el motivo de estudio como los resultados obtenidos en él, mediante una metodología que incluye una presentación geométrica clásica y se basa en el trabajo en equipo de los alumnos.

INTRODUCCION

Los programas oficiales de matemáticas, en la enseñanza media, pretenden la exposición general de las principales facetas de la matemática del siglo XIX, utilizando la nomenclatura y las estructuras algebraicas de la matemática moderna. En ellos está ausente la geometría clásica, sustituida, no solo en la enseñanza media sino también en la básica y en la superior, por el álgebra y la geometría analítica.

La estructura general de la programación es la siguiente: en el primer curso se afianzan las técnicas de manejo de operaciones, resolución de ecuaciones algebraicas y representaciones gráficas, necesarias para introducir en el segundo curso los conceptos fundamentales del análisis y de la geometría analítica. En el tercer curso, en el que ya no es una asignatura obligatoria, se estudian con mayor profundidad los conceptos presentados en segundo. Además de esta estructura básica, aparecen algunos temas aislados: combinatoria, probabilidad, estadística y complejos en primero; en tercero de nuevo estadística y complejos y, por primera y última vez en el bachillerato, las curvas cónicas.

El estudio de la combinatoria, probabilidad y estadística proporciona al alumno una formación en aspectos de las matemáticas de gran aplicación en la actualidad. Presentarlos en dos cursos resulta necesario ya que el alumno de primero de BUP no dispone de los conocimientos apropiados para completar el estudio. Algo similar sucede con los números complejos, pero el tema de las curvas cónicas no se encadena con ninguno de los estudiados en cursos anteriores ni aparece después en COU, así que la única razón de su presencia parece ser incidir en el concepto de lugar geométrico, repasando la geometría métrica y la interpretación de la derivada como pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Todo esto convierte la exposición

habitual de este tema en una repetición monótona, mecánica y, por lo tanto, aburrida. El profesor se ve en la situación de repetir varias veces un mismo desarrollo que el alumno con sus propios medios podría elaborar casi solo.

Y esto no es más que una muestra de cómo el método didáctico habitual presenta las matemáticas a los alumnos. La imaginación, la actividad creadora no parecen tener sitio en las aulas y qué decir de las aplicaciones, cuando los alumnos resultan no reconocer en física ni siquiera la suma de vectores que estudiaron en matemáticas.

La ventaja del estado actual de la enseñanza de las matemáticas es que cualquier idea válida para intentar amenizar las clases que impartimos suele resultar innovadora.

Todos sabemos lo poco motivado que se siente en la actualidad el alumno de BUP. Concretamente en esta asignatura el problema se agudiza debido al nivel de abstracción, dificultades del lenguaje, deficiencias de cálculo de cursos anteriores ...¿Cuál es el resultado? El fracaso, no sólo en las calificaciones, sino también en la actitud que el alumno muestra ante la asignatura.

Una forma de motivar a los alumnos es proponerles unos trabajos en los que ellos deban elaborar resultados que después deberán explicar a sus compañeros. El profesor actúa, así, como mero coordinador del trabajo en grupo de los alumnos (metodología activa), dejando a un lado el protagonismo que habitualmente tiene.

Decidimos localizar una parte de los programas que se adaptara a este propósito. No todos los temas son igualmente dúctiles a la hora de pretender hacer uso de la intuición del alumno y de su capacidad de "crear" matemáticas, pero repasando la programación encontramos uno que parecía reunir condiciones especialmente idóneas: las CURVAS CONICAS de tercero de BUP. Por una parte, es un tema aislado, lo que permite un estudio en cierto modo "completo"; por otra, admite una presentación geométrica clásica y, finalmente, el estudio analítico es perfectamente accesible a los alumnos, que están ya bastante familiarizados con los métodos necesarios. Por si fuera poco, las curvas cónicas aparecen de forma tan frecuente en la naturaleza y en la tecnología que resulta sencillo producir interés acerca de ellas. También son una buena oportunidad de fomentar la visión espacial y desarrollar un tipo de razonamiento no habitual, así como de relacionar el estudio matemático con la realidad y revelar aplicaciones tecnológicas de sus resultados.

OBJETIVOS Y METODOLOGIA

A partir de este momento nos planteamos desarrollar una unidad didáctica que respondiera a los siguientes objetivos:

1. Observar la realidad que subyace en los estudios matemáticos.
2. Realizar una actividad de investigación matemática:

- a) Abstraer, a partir de la realidad, figuras geométricas.
- b) Diferenciarlas y clasificarlas desde un estudio global.
- c) Caracterizarlas por una propiedad y enunciar ésta mediante una ecuación.
- d) Adquirir destreza en la representación de curvas.
- e) Plantear y resolver problemas relativos a lo elaborado.
- f) Ser capaz de explicar los resultados obtenidos.

3. Adquirir visión espacial.

4. Analizar las relaciones entre las matemáticas y otros aspectos del saber y la tecnología:

- a) Entender las cónicas como modelos matemáticos de fenómenos naturales.
- b) Comprender la importancia de las propiedades geométricas por sus aplicaciones en la tecnología.

La metodología que elegimos consta de **cuatro fases**. En la **primera** se presenta a los alumnos una serie de diapositivas para que fijen su atención en el objeto del estudio: ondas en el agua, cortes de troncos de árboles, arcos, ventanas, plazas de diseño circular y elíptico, modelos astronómicos, fuentes, faros, antenas... Simultáneamente se proyectan transparencias en las que aparecen los modelos de la curva correspondiente a cada imagen. Esta primera fase termina con una anécdota relativa al origen del estudio de este tipo de curvas: el problema de la duplicación del altar de Delfos.

En la **segunda fase** se realiza un estudio geométrico clásico dividido en dos partes:

- Clasificación de las curvas como secciones de una superficie cónica.
- Deducción de las propiedades que permitirán obtener las ecuaciones.

El tratamiento es formalmente idéntico para todas las curvas, consiguiéndose así que el alumno llegue a familiarizarse con el proceso seguido en la demostración.

Para facilitar la comprensión visual de las demostraciones se requieren dibujos muy bien contruidos, que resultan difíciles de reproducir en la pizarra durante una clase, por lo que utilizamos transparencias y modelos tridimensionales contruidos por nosotras con acetato, cartulina y poliespán. Fotocopias de las transparencias constituyen el material de trabajo de los alumnos en esta etapa.

Lo que queda es labor de los alumnos que, ya familiarizados con las curvas, están en condiciones de elaborar su estudio analítico. En esta **tercera fase** la clase se divide en grupos de cuatro o cinco personas que deben desarrollar un estudio referido a una de las cónicas o bien al parámetro excentricidad. Se proporciona a cada grupo un guión relativo al tema elegido, en el que se marcan las principales cuestiones y el orden en que deben ser abordadas. El trabajo se realiza principalmente en clase con la ayuda del profesor y haciendo uso del material disponible.

La **cuarta** y última **fase** consiste en la exposición por parte de cada grupo de los resultados obtenidos. Básicamente deberán explicar cómo han obtenido la ecuación de la curva, distintos métodos de representación y plantear y resolver problemas. En el último trabajo que se expone, además de un estudio del parámetro excentricidad, se incluye una interesante clasificación de las cónicas según los distintos puntos de vista considerados.

El método de evaluación incluye la valoración de las exposiciones y del trabajo escrito que cada grupo entrega y la calificación de una prueba objetiva.

EVALUACION DE LA EXPERIENCIA

A la hora de evaluar esta experiencia creemos necesario distinguir dos aspectos: contenidos y metodología. En cuanto a lo primero, la novedad fundamental es la introducción de métodos y razonamientos correspondientes a la geometría sintética. Esto presenta fundamentalmente la ventaja de que con pocos conceptos nuevos, fáciles de captar, y desarrollos relativamente sencillos que se apoyan en la visión espacial, pueden deducirse resultados importantes. El procedimiento utilizado proporciona al mismo tiempo una visión global de todas estas curvas al estudiarlas simultáneamente desde diversos puntos de vista. Un inconveniente con el que nos encontramos es el poco hábito que tienen los alumnos de trabajar con este tipo de geometría, debido a su ya mencionada ausencia tanto de los programas de EGB como de enseñanza media.

Respecto a la metodología, al ser ésta activa, el alumno consigue el aprendizaje a través de su propio trabajo y entendemos que ésta es la mejor manera de aprender y recordar. Tal vez se considere que se dedica demasiado tiempo a un tema puntual dentro de la programación, pero creemos que a veces es mejor dar un poco de lado los contenidos y ocuparse del modo en que se alcanza su conocimiento. El hecho de que el alumno se enfrente a un problema y logre resolverlo pasa por un esfuerzo de atención, lectura atenta y reflexión, que mejorará su razonamiento matemático.

La experiencia no puede funcionar si el alumno se encuentra solo en una tarea que, al principio, le resulta inabordable. Es muy importante que trabajen en grupos, sintiendo el apoyo y el estímulo tanto de sus compañeros como

del profesor. Una tarea fundamental de éste es dirigir los trabajos según un orden de dificultad creciente para que todos los alumnos sean capaces de obtener algún resultado. Como ya hemos mencionado, a los grupos se les proporciona unos guiones con las cuestiones básicas. Con el tiempo las cosas dejan de ser novedad de modo que estos guiones no pueden mantenerse sin modificaciones de un año para otro si queremos que los alumnos alcancen los objetivos que nos hemos planteado.

La actitud de los alumnos es en general muy positiva, tanto por el cambio en la rutina como por la novedad de la materia y del método. Algunos recuerdan la experiencia con agrado, como algo que rompió la monotonía y les ayudó a saber que eran capaces de elaborar resultados matemáticos.

BIBLIOGRAFIA

1. "La matemática. La geometría". Emma Castelnuovo. Ed. La Nuova Italia
2. "La geometría en el arte". Dan Pedoe. Ed. Gustavo Gili
3. "Lecciones populares de matemáticas: La envolvente". V.G. Boltianski. Ed. Mir
4. "Curso de geometría métrica". Pedro Puig Adam. Biblioteca Matemática Rey Pastor-Puig Adam
5. "Geometría y Cónicas". Grupo Cero. I.C.E. Valencia
6. "La matemática: su contenido, métodos y significado". Alexandrov y otros. Alianza Universidad
7. "Sicología del aprendizaje de las matemáticas". Richard R. Skemp. Ed. Morata
8. "Cosmos". Carl Sagan. Ed. Planeta
9. "Biografía de la física". George Gamow. Biblioteca general Salvat
10. "El número de oro". Matila C. Ghyka. Ed. Poseidón.

UNA DIDACTICA PARA LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Benito, J.; García, A. ; Mayo, L.

(Dpto. de Matemáticas I.B. "La Rondilla". Valladolid

Ortega, T.

(Dpto. de Análisis Matemático y Dca. de la Matemática . Univ. Valladolid)

1. DESCRIPCION DEL PROBLEMA

El problema surgió al constatar que la mayor parte de los alumnos de BUP no distinguía las gráficas de las funciones seno y coseno de las formadas por dos semicircunferencias, dos semielipses o dos trozos de parábolas. Teniendo presente la representación de la función seno en $[0, 2\pi]$ (proyectada con un retroproyector), se hicieron las siguientes preguntas a un grupo de 27 alumnos de 2º de Ciencias de la E.U. de Valladolid: ¿Está formada por dos semicircunferencias?, ¿por dos semielipses?, ¿por dos trozos de parábolas?, ¿no tiene nada que ver esta curva con las anteriores? Las respuestas fueron las siguientes: 13 afirmaron que eran dos semicircunferencias, 9 dos semielipses, 4 dos trozos de parábolas y ni uno sólo dijo que era otra curva distinta. Además de este problema, muchos alumnos terminan el bachillerato sin saber las propiedades más elementales de estas funciones, propiedades que se pueden enunciar con una simple inspección ocular sobre sus gráficas.

2. MARCO TEORICO

Pensamos que los destinatarios deben ser alumnos de 2º y 3º de BUP que, además del concepto de radián, conocen la definición de cada una de las seis razones trigonométricas estándar de un ángulo como el cociente numérico de las longitudes correspondientes de lados de un triángulo rectángulo (la realidad es otra y se debe comenzar a trabajar con estos conceptos). Vamos a descomponer este problema complejo en varios más sencillos. El primero de ellos consiste en hacer entender al alumno que la longitud del arco recorrido por el punto $B(x,y)$ sobre la circunferencia goniométrica, partiendo del punto de corte de la circunferencia con el semieje positivo de abscisas (origen de medición) en sentido antihorario, es la amplitud positiva del ángulo central α medido en radianes, véase la figura 1. Problemas 2 y 3: ¿entienden los alumnos las definiciones de las funciones $y=\sin(\alpha)$ e $y=\cos(\alpha)$? Una vez situado el ángulo (en radianes) en una circunferencia de radio unidad centrada en el origen de un sistema cartesiano ortonormal, se define $\sin(\alpha)$ como la ordenada "y" del punto $B(x,y)$ que determina sobre la circunferencia

el segundo lado del ángulo central de α radianes (una vez ajustado el primero con el semieje positivo de abscisas). Así se establece una aplicación real de variable real definida en toda la recta. Análogamente se define la función coseno mediante la abscisa "x" del punto B(x,y) determinado por el ángulo de α radianes; ciertamente, estas definiciones no son fácilmente comprensibles por el alumnado. Problemas 4 y 5: ¿por qué los puntos (α, y) y (α, x) describen, respectivamente, las gráficas de las funciones $y=\text{sen}(x)$ e $y=\text{cos}(x)$? La solución a estos problemas está implícita en la asimilación de las definiciones anteriores. La figura 1 muestra la gráfica de $y=\text{sen}(x)$.

Una vez que se han definido estas dos funciones y se han representado sus gráficas, los problemas análogos relativos a las otras cuatro funciones estándar no presentan ninguna dificultad, puesto que todas se definen mediante "los cocientes más sencillos" de las funciones que acabamos de considerar ($\text{sen}(\alpha)/\text{cos}(\alpha)$, $1/\text{sen}(\alpha)$, $1/\text{cos}(\alpha)$, $\text{cos}(\alpha)/\text{sen}(\alpha)$). Así pues, debemos concentrar nuestros esfuerzos en que los alumnos entiendan bien las dos primeras; para ello hemos construido una maqueta en tela y escrito un programa de ordenador.

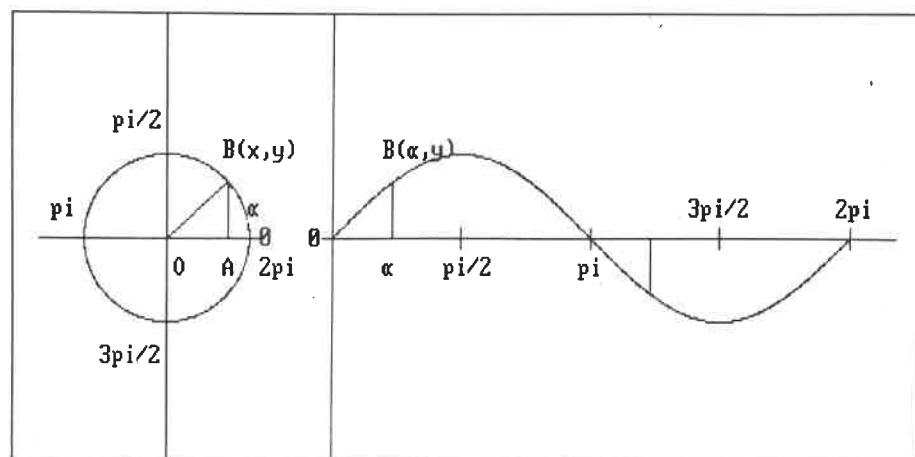


Figura 1.

3. METODOLOGIA

Partimos de un aprendizaje por construcción y proponemos la confección de una maqueta que represente a las funciones seno y coseno, de forma que una vez terminada puede ser manipulada por el alumnado y constituir un elemento expositivo en el aula; así pues, propugnamos un aprendizaje por descubrimiento. El uso del programa elaborado también favorece el mismo tipo de enseñanza. Este proceso tiene una primera fase de información sobre cada una de las funciones trigonométricas y una segunda de autocontrol de aprendizaje. En la primera aparecen, una a una, las gráficas de las seis funciones trigonométricas estándar, tablas de valores y gráficas de funciones más complejas formadas a partir de las seis descritas anteriormente o con otras; en la segunda se muestran en forma de pregunta las propiedades más importantes, pudiéndose regular el tiempo de espera de la respuesta y un test evaluador. La actividad práctica girará en torno a que los alumnos resuelvan problemas planteados en la sección anterior, especialmente los cinco primeros. Cuando los alumnos dispongan de ordenador de forma individualizada, el programa se puede usar de forma autodidacta, examinando todos los módulos, incluso el test evaluador, las veces que se desee. Cuando se disponga de "laboratorio numérico", la unidad puede mostrarse a grupos de tres o cuatro alumnos por ordenador, dedicando dos horas para el seguimiento de los contenidos y una para el test.

4. EJECUCION DE LA MAQUETA

Este útil didáctico es fácil de construir, muy barato y tiene la ventaja de que se puede manipular físicamente. Nosotros la elaboramos en colaboración con la asignatura de EATP. Básicamente consiste en coser una circunferencia de dimensiones apropiadas en un tejido que permita sacar hilos con facilidad sin que se deforme excesivamente. Una vez elaborada, se puede pegar en un tablero de corcho y así se pueden componer las gráficas de las funciones seno y coseno. En otros dos tableros se pueden pegar las gráficas de estas funciones como muestra la figura 2. El proceso de construcción es el siguiente: se recorta el círculo cosido, se sacan todos los hilos horizontales del círculo excepto el del diámetro y los dos más próximos a él, se almidona la tela y, una vez seca, se cortan, limpiamente, la costura en A y los hilos verticales siguiendo el diámetro AB; este corte le divide en dos semicírculos que sólo tienen hilos verticales (cuyas longitudes son los valores de la función seno) y que al rectificarlos dan lugar a la gráfica de esta función. Para obtener esta gráfica se clava al tablero el círculo superior en A; asiendo la costura del otro extremo cortado, se gira alrededor de A -2π radianes, se estira la costura para rectificar la circunferencia, se la clava en B y para obtener los valores

negativos del tercer y cuarto cuadrante se hace una torsión de 180° . Véase la figura. Siguiendo los pasos descritos, pero ahora, colocando los hilos horizontalmente se obtiene la maqueta de la función coseno en el intervalo $[-\pi/2, 3\pi/2]$, como muestra la figura 2. Esta misma gráfica se obtiene aplicando sobre la representación de $y=\sin(x)$ la traslación de amplitud $-\pi/2$ sobre el eje de abscisas, con amplitud $\pi/2$ sobre el mismo eje obtendríamos la gráfica de $\cos(x)$ en $[\pi/2, 5\pi/2]$. Notemos que éstas no son las únicas formas de girar los semicírculos, también se podría haber cortado la costura en los dos extremos de los semicírculos e incluso haber seccionado los cuadrantes.

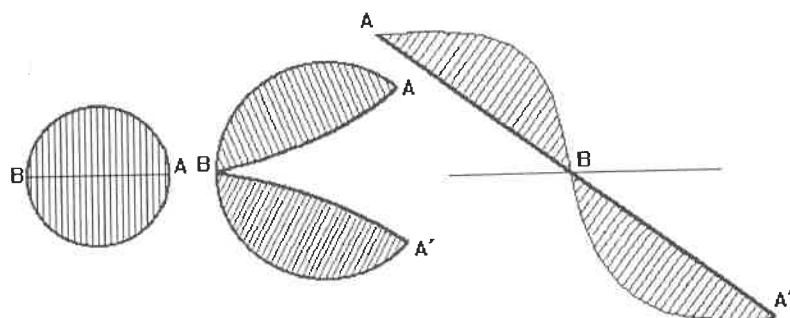
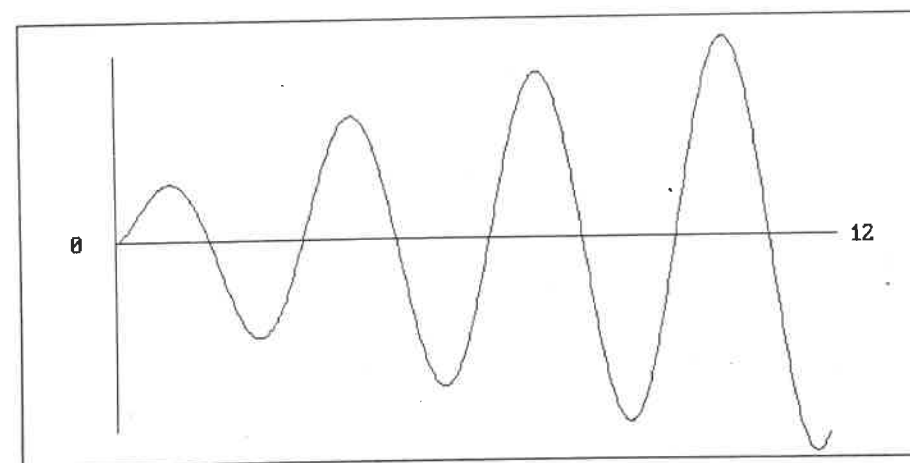


Figura 2.

5. PROGRAMA DE ORDENADOR

Cuando decidimos escribir este programa de ordenador, nos propusimos como objetivo fundamental que los alumnos reconocieran inmediatamente las gráficas de las funciones trigonométricas estándar y que dedujeran las propiedades elementales más importantes de cada una de ellas. Así, diseñamos una unidad didáctica eminentemente gráfica formada por doce módulos totalmente independientes. El programa está realizado en Turbo-Basic y, una vez compilado, corre desde el sistema operativo en cualquier ordenador compatible que tenga tarjeta gráfica V.G.A. A continuación, describimos las tareas que se realizan en cada uno de los doce módulos: el primero está formado por el menú de gestión del programa, en el que se selecciona cada uno de los módulos restantes y la opción de terminar; el segundo hace una rectificación de la circunferencia a medida que un punto va describiéndola; el tercero dibuja la función seno a la vez que un punto va describiendo la circunferencia; del cuarto al octavo el programa dibuja las funciones $y=\cos(x)$, $y=\tan(x)$, $y=\csc(x)$, $y=\sec(x)$ e $y=\cot(x)$ a la vez que un punto va describiendo la circunferencia; el noveno genera una tabla de veintidós valores de la función estándar que se elija, estos valores son las imágenes de un ángulo introducido en grados, minutos y segundos y otros

veinte incrementados segundo a segundo; el décimo representa cualquier función elemental explícita "razonable" definida en "cualquier intervalo $[a,b]$ ". Se centra la gráfica en la pantalla y desplaza los eje de coordenadas a la izquierda (la figura 3 representa a la función $f(x) = \sqrt{x} \sin(x)$ en el intervalo $[0,12]$); el undécimo pregunta al alumno las propiedades más importantes de las funciones anteriores y tras cada respuesta escribe en pantalla la solución; finalmente, el duodécimo módulo está formado por un test evaluador donde el alumno responderá a seis cuestiones gráficas seleccionadas de un fichero que tiene 48 y a catorce cuestiones teóricas de otro fichero que contiene más de 200. Previamente el profesor habrá seleccionado uno de los diez modelos de examen incluidos en el programa o uno generado aleatoriamente por el propio ordenador, introduciendo un germen para crear la misma serie de números en todos los ordenadores (cuando la prueba se efectúe en un laboratorio de informática). Una vez que han pasado las veinte cuestiones, la nota aparece en pantalla y se graba en un fichero en el disco para evitar que el alumno la borre. La nota se calcula otorgando a cada respuesta correcta 0.5 puntos y a las incorrectas 0.



5. COMPARACION DE AMBOS UTILES

Proponemos la elaboración de la maqueta por los propios alumnos en sus casas o en la asignatura de Hogar si la hubiese. La utilización de la misma será más fácil para los alumnos que la hayan confeccionado; el producto terminado puede ser un motivo de decoración del aula y con ello habremos creado una posibilidad de aprendizaje permanente. De todas formas, tanto unos alumnos como otros manipularán los semicírculos y harán las transformaciones necesarias para que vean con absoluta claridad la

rectificación de la circunferencia y el paso de las coordenadas (x,y) de los puntos del contorno goniométrico a las coordenadas (α ,y) para la función seno y a las (α ,x) para la función coseno. Tanto con la utilización del programa como con el uso de la maqueta los alumnos pueden aprender las propiedades generales de todas las funciones estándar. Con el programa debemos intentar hacer que piensen en las respuestas y reflexionen sobre las mismas antes de ver la solución; con la maqueta debemos procurar despertar su intuición y guiarlos en la deducción de la respuesta, practicando así una enseñanza por descubrimiento. En cuanto que los alumnos empiecen a comprender unas cuantas propiedades, el resto las descubrirán solos. Así por ejemplo, partiendo de las funciones seno y coseno de la maqueta, inmediatamente obtendrán el signo de las funciones cosecante, secante, tangente y cotangente; otro tanto sucederá con el carácter de crecimiento y decrecimiento, etcétera. El uso del ordenador es interesante para los alumnos y efectúa muchas tareas rápidamente; por contra, su utilización hace a veces que los alumnos se olviden de la realidad. El carácter de "producto elaborado" les parece atractivo pero con él los alumnos se sienten un poco espectadores del mismo y no profundizan en todo el contenido que se les presenta. La maqueta didáctica es mucho más intuitiva, los propios alumnos la pueden manipular físicamente para obtener la rectificación de la circunferencia y las gráficas de las funciones seno y coseno. Orientándolos convenientemente pueden enunciar ciertas propiedades elementales de todas estas funciones estándar.

6. BIBLIOGRAFIA

1. Alsina, C. y otros, *Matemáticas para construir la Geometría*. SINTESIS, S.A. Madrid, 1988.
2. Azcárate, C. y Deulofeu, J., *Funciones y gráficas*. SINTESIS, S.A., Madrid, 1990.
3. Bolt, B., *Actividades matemáticas*. Labor, S.A., Barcelona, 1988.
4. Bransford, J.D., & Stein, B.S. *Solución ideal de problemas*. Labor, S.A., Barcelona, 1988.
5. Davis, J.P. y Hersh R., *Experiencia matemática*. Labor, S.A. y M.E.C. Madrid, 1988.
6. Guzmán, M., *Mirar y ver*. Alhambra, S.A., Madrid, 1977.
7. Guzmán, M., *Aventuras matemáticas*. Labor, S.A., Barcelona, 1986.
8. Hernán, F y Carrillo, E., *Recursos en el aula de matemáticas*. SINTESIS, S.A., Madrid, 1989.
9. Mason, J., y otros, *Pensar matemáticamente*. M.E.C. Labor, S.A., Madrid, 1988.
10. Mialaret, G., *Las matemáticas, cómo se enseñan, cómo se aprenden*. Pablo del Río, Madrid, 1977.
11. Shell Centre for Mathematical Education., *El lenguaje de funciones y gráficos*. M.E.C. Servicio de publicaciones, Universidad del País Vasco, Bilbao, 1990.

LOS CUERPOS TRIDIMENSIONALES UNIDAD DIDACTICA PARA PRIMERO DE B.U.P.

Angel Xifré
I.B. "Gabriel Ferrater". Reus

1. INTRODUCCION

A un par de años vista de la implantación de la Reforma el Seminari de Matemàtiques de l'I.B. Gabriel Ferrater de Reus, nos propusimos empezar a trabajar algunos de los objetivos propuestos por la Refoma y que hasta aquel momento no se habían trabajado en Primero de BUP (15 años). Uno de estos es la geometría del espacio. Una geometría con tacto no analítico, sino tratada de una forma claramente manipulativa y visual.

La geometría tanto plana como espacial, tratada de una forma no analítica, fue la gran postergada en la implantación del BUP, ahora con la LOGSE se intenta recuperar con un objetivo de etapa en la ESO.

La comunicación es la presentación de una unidad didáctica sobre la geometría en tres dimensiones trabajada con alumnos de primero de BUP. Se muestran los objetivos, la didáctica, el material del alumno, la actividad de evaluación, y un análisis comparativo con otros alumnos de primero de BUP que no han trabajado la geometría.

2. JUSTIFICACION, CONTENIDOS Y OBJETIVOS

Los objetos que nos rodean tienen todos tres dimensiones, hasta ahora la geometría trabajada, ni que fuera espacial, casi siempre la hemos visto representada en dos dimensiones. Es necesario que el alumno trabaje el espacio tal como es, es decir, con cuerpos de tres dimensiones: Los tiene que manipular para que sea consciente de sus dimensiones (longitud, superficie, volumen), la problemática que supone representarlos de una forma plana, y la interpretación tridimensional que se puede hacer de una representación en dos dimensiones.

Los contenidos conceptuales básicos trabajados en la unidad didáctica son:

- * Proyección plana de cuerpos (vistas de figuras, alzados, planta, vistas laterales).
- * Figuras geométricas (arista, vértice, pirámide, prisma, ...)
- * Desarrollo plano de figuras.
- * Superficies laterales y volúmenes.

Como estrategias intelectuales que podemos desarrollar podríamos destacar:

- * Representación de vistas de figuras tridimensionales.
- * Reconocer las figuras a través de vistas.
- * Construcción de figuras usando las proyecciones, y a través de su desarrollo plano.
- * Visualización tridimensional de figuras.
- * Uso de utensilios (tijeras, regla, compás) y material (plastilina, cartulina,...)
- * Estrategias para calcular áreas y volúmenes de figuras no regulares.
- * Resolución de problemas con razonamientos geométricos y visualización espacial.

3. METODO DIDACTICO

La metodología utilizada para trabajar la unidad didáctica se basa en el trabajo, individual o en equipo, del alumno a través de actividades.

La unidad didáctica se dividió en 6 partes, cada una de ellas era una actividad a realizar. El alumno recibía como material las hojas de la actividad y una colección de figuras geométricas metálicas si el desarrollo de la actividad lo hacía necesario.

Una vez el alumno recibía el material, éste hacía los trabajos encargados, que tal como se planteó, partían de un nivel inicial (representación plana de una figura simple, o reconstrucción a partir de vistas de una figura sencilla, ...) hasta llegar cada uno donde sus posibilidades le permitían. Es decir que las actividades intentaban cubrir las diferentes necesidades intelectuales de los alumnos.

El profesor se limitaba a dar breves indicaciones, la mayor parte de forma individual, para desarrollar el trabajo. Y a recoger la información que los alumnos iban obteniendo. Si un alumno, o grupo de alumnos conseguían un nivel, entregaban el trabajo al profesor para ser corregido, si era correcto el profesor encargaba un trabajo de dificultad superior, si no, los alumnos tenían que corregir su error.

Dependiendo de la dificultad de la actividad el profesor tomaba la actitud necesaria para fomentar el espíritu investigador en los alumnos, y ayudar a que los objetivos intelectuales se desarrollasen en los alumnos.

4. DESARROLLO DE LA UNIDAD

La unidad se dividió en seis partes, con una duración de unas 8 a 10 horas de clase en total (una hora para cada parte, mas actividades de complemento y de evaluación).

En la primera parte el alumno recibía una figura metálica tridimensional, y a partir de ella tenía que dibujar las seis proyecciones (delante, detrás, izquierda, derecha, arriba y abajo) hechas con medidas reales, y utilizando papel pautado. Se intenta que el alumno comprenda lo que es una proyección.

En la segunda parte se sigue trabajando con vistas de figuras, para que el alumno se familiarice con las representaciones planas y trate de imaginar las figuras tridimensionalmente. El alumno ha de reconocer las diferentes partes de figuras representadas en perspectiva y con vistas. Tiene que completar unas hojas (concretamente 5), con un grado de dificultad creciente.

La tercera parte es el paso inverso. Es decir la reconstrucción de figuras, a través de materiales muy manipulables (plastilina, porespán) y los utensilios adecuados para manipularlos, a partir de sus vistas. Se pueden reconstruir diversas figuras, con un grado de dificultad también creciente.

Seguidamente se pasa a trabajar la reconstrucción de figuras a partir de una forma plana: su desarrollo plano. La cuarta parte es hacer el desarrollo plano de figuras geométricas que ellos tengan en sus manos (básicamente prismas y pirámides, tanto enteras como truncadas).

La misma actividad plantea encontrar los diferentes desarrollos planos que tiene un cubo y trabaja la proporción jugando con las longitudes, superficies y volúmenes.

La quinta parte es construcción de figuras geométricas con cartulina (desarrollo plano), donde el alumno no tiene la figura a su alcance, sólo se le da el nombre de la figura a construir y las dimensiones que tiene.

La sexta parte está dedicada exclusivamente al trabajo con las dimensiones de las figuras. Que los alumnos sean capaces de calcular el área y el volumen de diversas figuras en todas las diferentes representaciones que han visto (figuras reales, desarrollo plano, proyecciones, representaciones en perspectiva), con todas las dificultades que puede suponer el hecho de no ser figuras regulares.

Como actividad complementaria se proyectaron dos vídeos después de la primera actividad sobre las proyecciones planas de figuras tridimensionales que podeis encontrar en la bibliografía, debido a la dificultad que presentaban algunos alumnos para entender lo que suponía una vista de una figura, cuando no hay perspectiva.

5. ACTIVIDAD DE EVALUACION

La evaluación de la unidad didáctica se hizo a través de la observación sistemática del trabajo realizado por los alumnos en el aula, y la corrección de las actividades que así lo requerían. La información era recogida en la hoja de registro creada para el seguimiento de unidades didácticas como esta.

Para contrastar realmente el trabajo realizado en la unidad, la misma actividad de evaluación se pasó a alumnos del mismo nivel de diferentes centros de Reus. Los resultados de esta contrastación, en el momento de presentar esta comunicación por escrito no los tenemos.

6. BIBLIOGRAFIA Y RECURSOS DIDACTICOS

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M. (1987) : Invitación a la Didáctica de la Geometría. Ed Síntesis. Madrid.

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J.M. (1987) : Construir la Geometría. Ed. Síntesis. Madrid.

Castellnuovo, E. (1981): La Geometría. Keres. Barcelona.

I.C.M.I. (1987): Las matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90 (Kuwait, 1986). Ed. Mestral. Valencia.

MESA 3: MATEMATICAS EN LA UNIVERSIDAD

ESTUDIO DE LA CONVEXIDAD EN FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Gloria Cabrera Gómez

Dpto. Matemática Aplicada

E.U. Estadística. Universidad Complutense. Madrid

1. INTRODUCCION

Al introducir los conceptos de concavidad y convexidad para funciones reales de una variable real en los cursos de Cálculo Infinitesimal de primer año de cualquier carrera científica, surgen varias posibilidades, cada una de ellas con ventajas e inconvenientes.

Se puede definir la convexidad (concavidad) en un punto del dominio, o en un intervalo abierto. Y se puede hacer con relación a las tangentes a la curva, según queden por encima o por debajo de ella, o con relación a cuerdas que unen puntos de la gráfica.

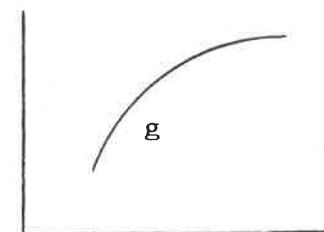
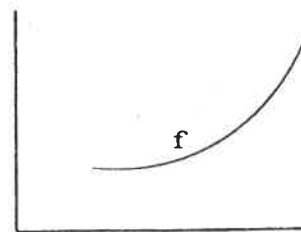
Nos parece que el modo natural de definir la convexidad (concavidad) es el de las tangentes a la gráfica en puntos de un intervalo abierto. Sin embargo, muchos autores evitan esta definición por las dificultades de la demostración del criterio de la derivada segunda. Otros, dan esta definición y la acompañan de demostraciones de este criterio que son muy complicadas y artificiosas.

Nosotros proponemos otra demostración que usa técnicas simples, y que son naturales e inmediatas para el alumno que cursa una asignatura de Cálculo Infinitesimal, y acaba de estudiar la derivación y sus propiedades fundamentales.

2.- DEFINICIONES

Consideramos las siguientes funciones crecientes y derivables

$$(f'(x) \geq 0, g'(x) \geq 0)$$

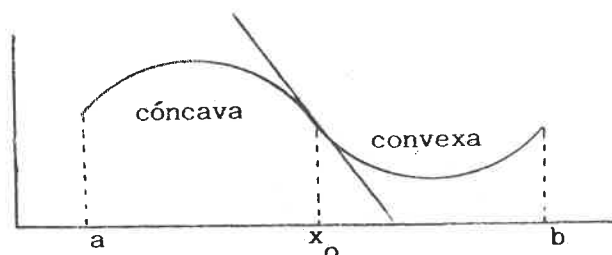


Observamos que la primera de ellas, f , crece más deprisa conforme x aumenta: $f'(x)$ es una función creciente; la segunda, g , al contrario: $g'(x)$ es decreciente.

Definición 1: f es convexa en el intervalo $(a, b) \subset \mathbf{R}$ si y sólo si la recta tangente a la gráfica de la función en cualquier punto del intervalo, está situada por debajo de dicha gráfica; y esto sucede en todo punto del intervalo salvo en el punto de tangencia.

Definición 2: f es cóncava en el intervalo $(a, b) \subset \mathbf{R}$ si y sólo si la recta tangente a la gráfica de la función en cualquier punto del intervalo, está situada por encima de dicha gráfica; y esto sucede en todo punto del intervalo salvo en el punto de tangencia.

Definición 3: Sea $x_0 \in \text{dom } f$. Se dice que x_0 es un punto de inflexión de f si y sólo si la función cambia de cóncava a convexa, o viceversa.



Propiedad: Si f es derivable en x_0 , y x_0 es un punto de inflexión de f , se tiene que la recta tangente a f en el punto x_0 , atraviesa a la gráfica.

3. TEOREMA: CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA

Sea f derivable dos veces en un intervalo abierto (a, b) .

(1) Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, entonces f es convexa en (a, b) .

(2) Si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b)$, entonces f es cóncava en (a, b) .

4. DEMOSTRACION

(1) Sea $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$

La ecuación de la recta tangente en un punto cualquiera $x_0 \in (a, b)$ es:

$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Se desea probar que la recta tangente está por debajo de la gráfica $\forall x \in (a, b)$, excepto en el punto x_0 , es decir, que:

$$f(x) - t(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b), \text{ con } x \neq x_0$$

Supongamos que $x > x_0$. Podemos aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[x_0, x]$, puesto que f es continua en todo el intervalo y derivable en (x_0, x) . Por tanto, el T.V.M. garantiza la existencia de al menos un $\alpha \in (x_0, x)$ de modo que $f'(x) - f'(x_0) = f''(\alpha) \cdot (x - x_0)$.

$$\begin{aligned} \text{Por tanto: } f(x) - t(x) &= f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \\ &= f'(\alpha) \cdot (x - x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) = f''(\alpha) \cdot (x - x_0) \end{aligned} \quad (*)$$

para algún α tal que $x_0 < \alpha < x$.

Pero f' es a su vez derivable. Podemos volver a aplicar el T.V.M. a la función f' en el intervalo $[x_0, \alpha]$, y obtenemos que existe al menos un $\beta \in (x_0, \alpha)$ de modo que:

$$f''(\beta) \cdot (\alpha - x_0) = f'(\alpha) - f'(x_0)$$

Por tanto, sustituyendo (*) se tiene:

$$\begin{aligned} f(x) - t(x) &= f''(\beta) \cdot (\alpha - x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{para algún } \alpha \text{ tal que } x_0 < \alpha < x \\ &\quad \text{para algún } \beta \text{ tal que } x_0 < \beta < \alpha \end{aligned}$$

Estos tres factores son positivos y por tanto lo es también su producto. Luego queda probado que $f(x) - t(x) > 0$ en el caso $x > x_0$.

Si $x < x_0$, obtendremos del mismo modo que

$$f(x) - t(x) = f''(\beta) \cdot (\alpha - x_0) \cdot (x - x_0)$$

con $x < \alpha' < \beta' < x_0$, que será también positivo por ser el producto de tres factores, el primero de los cuales es positivo y los otros dos negativos.

Luego, efectivamente, la condición $f''(x) > 0$ nos lleva a establecer que f es convexa en todos los puntos de (a, b) .

Análogamente se prueba (2).

5. COROLARIO

Si $x_0 \in \text{dom } f$, es un punto de inflexión de f , que es dos veces derivable, entonces $f''(x_0)=0$.

Demostración: Si x_0 es un punto de inflexión, por la definición dada la derivada segunda cambia de signo. Luego en x_0 debe ser nula: $f''(x_0)=0$.

Observación: El corolario nos da una condición necesaria para la existencia de punto de inflexión. Pero sabemos que x_0 puede ser un punto de inflexión y sin embargo no tener derivada segunda. Esta es otra de las ventajas que nos aporta utilizar la definición dada de punto de inflexión ya que nos evita tener que hacer distinciones entre f derivable dos veces, o no, en el punto x_0 . Basta únicamente que sea derivable dos veces en intervalos abiertos. En tal caso, sólo necesitamos que f sea cóncava en (a, x_0) y convexa en (x_0, b) , o viceversa para que el punto x_0 sea punto de inflexión, independientemente de que exista $f''(x_0)$ o no exista.

6. BIBLIOGRAFIA

- Apostol. *Calculus*. Ed. Reverté, Barcelona 1965.
Dixmier. *Matemáticas generales I*. Ed. Aguilar, Madrid 1974.
Fernández y Robledo. *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Ed. Dossat, Madrid 1991.
Kuratowski. *Introducción al Cálculo*. Ed. Limusa-Wiley, México 1970.
Larson Hostetler. *Cálculo y Geometría Analítica*. Ed. McGraw-Hill, Madrid 1989.
Sallas-Hille. *Calculus*. Ed. Reverté, Barcelona 1989.
Spivak. *Calculus*. Ed. Reverté, Barcelona 1989.
Stein. *Cálculo y Geometría Analítica*. Ed. McGraw-Hill, México 1982.
Taylor y Wade. *Cálculo Diferencial e Integral*. Ed. Limusa, México 1977.
Zill. *Cálculo con Geometría Analítica*. Grupo Editorial Iberoamericano, México 1987.

ESTUDIO DE LAS SUPERFICIES MEDIANTE EL USO DE TRANSPARENCIAS

Dionisio Pérez Esteban y Adela Salvador Alcaide
Universidad Politécnica de Madrid

1. INTRODUCCION

Trabajar en la clase con superficies mediante el uso de transparencias hechas utilizando medios informáticos, (como "Derive"), puede desarrollar la visión espacial. Buscar secciones, tanto en la expresión analítica como en la representación gráfica, cortando por planos paralelos a los planos coordenados, haciendo x o y constantes, o haciendo z constante y trazando las curvas de nivel, ayuda a "ver" la forma de la superficie, o a comprender mejor conceptos más difíciles como derivada parcial, diferencial, plano tangente, etc. y las relaciones entre ellos.

2. SECCIONES

La interpretación geométrica de las funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se hace en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se llama **gráfico** de f al conjunto de puntos $(x, y, f(x, y))$, y si la función es continua este gráfico recibe el nombre de **superficie**.

En la figura 1 tenemos la superficie $f(x, y) = x^2 + y^2$. Podemos estudiarla cortando por planos paralelos a los ejes coordenados. También podemos preguntarnos ¿Qué es lo que dibuja el ordenador? ¿Cómo lo hace? Precisamente el ordenador dibuja estas curvas secciones con los planos $x=k$ e $y=k$, o más exactamente, sólo va uniendo algunos de los puntos de estas curvas.

3. CONTINUIDAD

Por la forma en que el ordenador dibuja las gráficas no podemos garantizar la continuidad ni la discontinuidad de la función por este método ya que únicamente une determinados puntos. Sin embargo podemos estudiar la gráfica de:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \text{ es distinto de } (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

podemos estudiar el aspecto de la gráfica en el origen de coordenadas donde la función no es continua. Figura 2.

Del mismo podemos estudiar en la figura 3 la gráfica de:

$$f(x,y)= \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

que tampoco es continua en (0, 0) y que a lo largo de la parábola $y=x^2$ su límite es $1/2$.

O estudiar en la figura 4 la continuidad en (0, 0) de la función:

$$f(x,y)= \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La función de la figura 5:

$$f(x,y)= \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es discontinua en (0, 0) siendo infinito el límite en algunas direcciones cuando nos acercamos a este punto.

4. DERIVADAS PARCIALES, DIFERENCIAL Y PLANO TANGENTE

No tiene sentido aplicar la definición de derivada y dividir por un vector. Por ello debemos introducir el concepto de derivada direccional o de derivada parcial si las direcciones son las de los vectores coordenados.

Si la función es diferenciable en el punto (a, b) la superficie tiene plano tangente de ecuación:

$$z=f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b)$$

Se llama gradiente de f en (a,b) al vector:

$$\nabla f(a,b)=(f_x(a,b), f_y(a,b))$$

En la figura 6 tenemos la superficie $f(x,y)=9-x^2-y^2$ donde podemos estudiar el significado de:

a) Derivada parcial de f respecto a x en el punto P(1,2)

$$f_x(1,2)=(-2x)(1,2)=-2$$

b) Derivada parcial de f respecto a y en el punto P(1,2)

$$f_y(1,2)=(-2y)(1,2)=-4$$

c) Ecuación del plano tangente a f en dicho punto

$$z=4-2(x-1)-4(y-2)=-2x-4y+14$$

d) Vector gradiente de f en P(1,2)

$$\nabla f=(-2,-4)$$

e) Derivada direccional de f en P(1,2) según la dirección u(u1, u2)

$$D_u f = \nabla f \cdot u = (-2,-4) \cdot (u_1, u_2) = -2u_1 - 4u_2$$

d) Estudiar en qué dirección crece f más rápidamente observando que la función crece más rápidamente en la dirección del gradiente

$$\text{Módulo del gradiente} = |\nabla f| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Dirección del gradiente} = v = \frac{(-2, -4)}{\sqrt{20}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

La derivada direccional en la dirección del gradiente vale el módulo del vector gradiente, $|\nabla f| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Estudiar en que direcciones la derivada direccional vale cero, observando que es cero en las direcciones perpendiculares al gradiente. Por ejemplo en $n=(2\sqrt{5}, -1/\sqrt{5})$

$$D_n f = \nabla f \cdot n = (-2, -4) \cdot (2\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}) = -2 \cdot 2\sqrt{5} - 4 \cdot (-1/\sqrt{5}) = -4\sqrt{5} + 4/\sqrt{5} = 0$$

O también en $(-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$

En la figura 7 tenemos la gráfica de la función:

$$f(x,y)= \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

que es continua en todos los puntos, pero que como $y=|x|$ no es derivable en 0, no existe la derivada parcial de f respecto a y en $(x,0)$ $x \neq 0$, por tanto la función no es diferenciable en $(x,0)$ y no existe en esos puntos plano tangente. Podemos observar en dicha gráfica como efectivamente no existe plano tangente en esos puntos. Tampoco se puede utilizar en esos puntos la fórmula del gradiente ni la de las derivadas direccionales.

En la figura 9 tenemos la gráfica de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

que es continua en todos los puntos y por tanto en $(0,0)$, pero no es diferenciable ni, como podemos observar, existe el plano tangente en dicho punto, donde la función, con forma de paraguas, acaba en punta.

En la figura 9 tenemos la función:

$$f(x,y) = \frac{\text{sen}x - \text{sen}y}{\text{tg}x - \text{tg}y} \quad \text{si } \text{tg}x \text{ es distinto de } \text{tg}y$$

podemos comprobar, por ser la función seno y la función tangente funciones continuas y dervables, que la función es continua y diferenciable (cuando $\text{tg}x$ es distinto de $\text{tg}y$) y sin embargo el ordenador, al tomar únicamente valores discretos nos proporciona una mala aproximación.

MAXIMOS, MINIMOS Y PUNTOS DE SILLA

Las funciones de dos variables con valores en R pueden tener valores máximos y mínimos absolutos y relativos, al igual que ocurre con las funciones de una sola variable, ya que para poder hablar de máximos y mínimos se necesita una relación de orden en el espacio de llegada.

Una función continua definida en una región cerrada y llegada, $z=f(x,y)$, alcanza un valor máximo y un valor mínimo absolutos. Estos valores y cualesquiera otros máximos y mínimos relativos sólo pueden darse en:

- 1) puntos frontera de la región de definición
- 2) puntos interiores en los que $f_x=f_y=0$
- 3) o puntos donde no exista f_x o f_y

Veamos qué significado geométrico tiene que se anulen las dos derivadas parciales. Como se puede observar en la figura 10 en este caso el plano tangente es horizontal (de forma análoga a lo que ocurría con la recta tangente en las funciones de R en R). La figura 11 presenta un máximo y un mínimo absolutos.

Si analizamos la figura 12 vemos que alcanza un valor máximo en toda una circunferencia de puntos, o la figura 13 que presenta un valor máximo absoluto, una circunferencia de mínimos relativos... O la figura 14 con un valor máximo absoluto y circunferencias de valores máximos y mínimos que se propagan en forma de onda.

Si no podemos garantizar la diferenciability de f en un punto podemos encontrarnos con máximos o mínimos cuyo plano tangente no sea horizontal pues no exista como en la figura 16.

El hecho de que $f_x=f_y=0$ en un punto interior (a,b) sólo nos garantiza que el plano tangente en ese punto es horizontal ($z=f(a,b)=c$), no que la función alcance en ese punto un valor máximo o mínimo como puede observarse en la figura 15 en que el plano tangente en $(0,0)$ es horizontal y sin embargo no es ni máximo ni mínimo. A estos puntos los llamados puntos de silla o puntos de ensilladura (y podríamos establecer un paralelismo entre ellos y los puntos de inflexión de tangente horizontal de las funciones de R en R).

Para determinar si estos son o no son máximos o mínimos debemos observar la relación en un entorno de ellos entre la función y el plano tangente. En un máximo como el de la figura 17 el plano toma valores, en un entorno del punto, siempre mayores (o iguales) que la función. En un mínimo como el de la figura 18 el plano tangente toma valores, en los puntos de un entorno, siempre menores (o iguales) que la función. Mientras que en un punto de silla, como en las figuras 19 ó 20, el plano tangente horizontal unas veces esta por debajo de la función y otras por arriba.

MAXIMOS Y MINIMOS CONDICIONADOS

Si las superficies estudiadas las cortamos por un plano, (o por otra superficie, o ponemos algún tipo de condición) y queremos saber entre los puntos de la superficie que están en el plano cuales son ahora máximos o mínimos observamos que no lo son en absoluto necesariamente los anteriores máximos o mínimos de la superficie. Tenemos que hacer un estudio diferente para determinarlos.

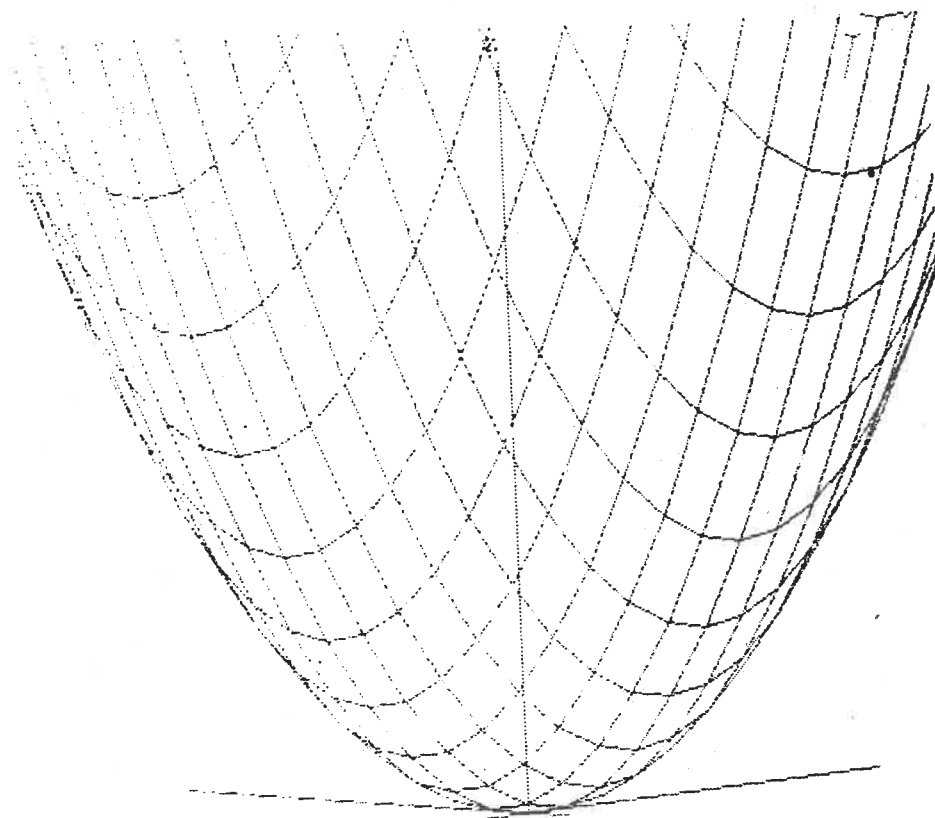


Figura 1:

La interpretación geométrica de las funciones $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se hace en el espacio $\mathbb{R}^3$. Se llama gráfico de f al conjunto de puntos $(x,y,f(x,y))$, y si la función es continua este gráfico recibe el nombre de superficie.

$f(x,y) = x^2 + y^2$ es un paraboloide de revolución.

a) Si cortamos por planos $y=k$, las curvas intersección $z=x^2+k$ son parábolas. Análogamente si cortamos por planos $x=k$.

b) Si cortamos por el plano $z=r$ obtenemos la curva de nivel $x^2+y^2=r^2$ que es una circunferencia.

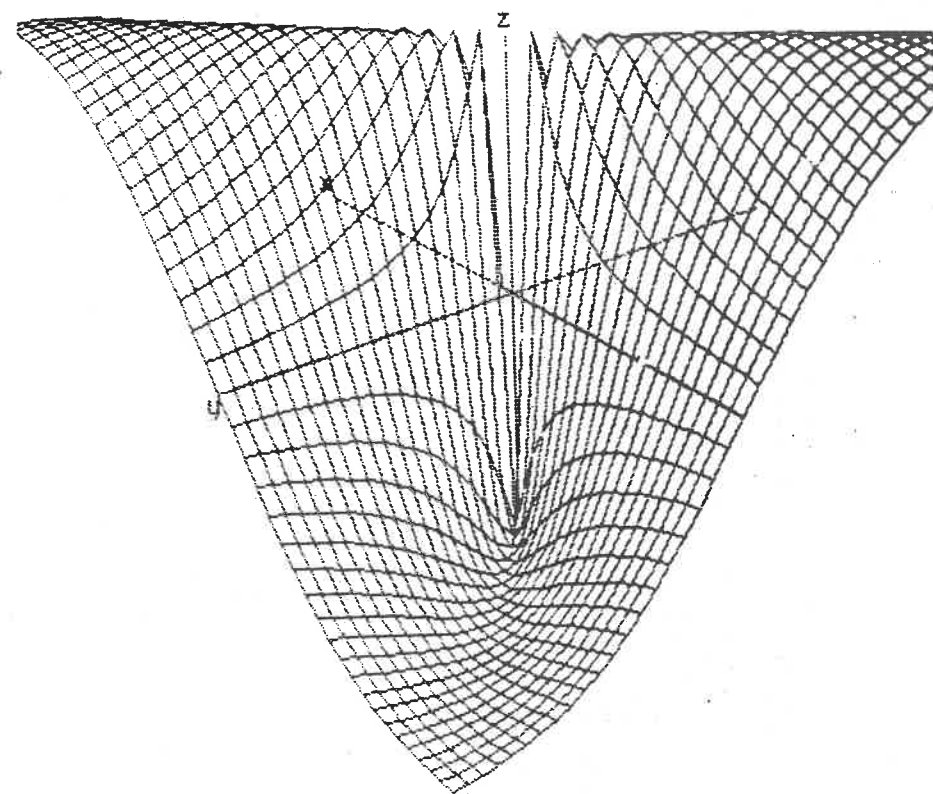


Figura 2:

Gráfica de:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La superficie no es continua en $(0,0)$

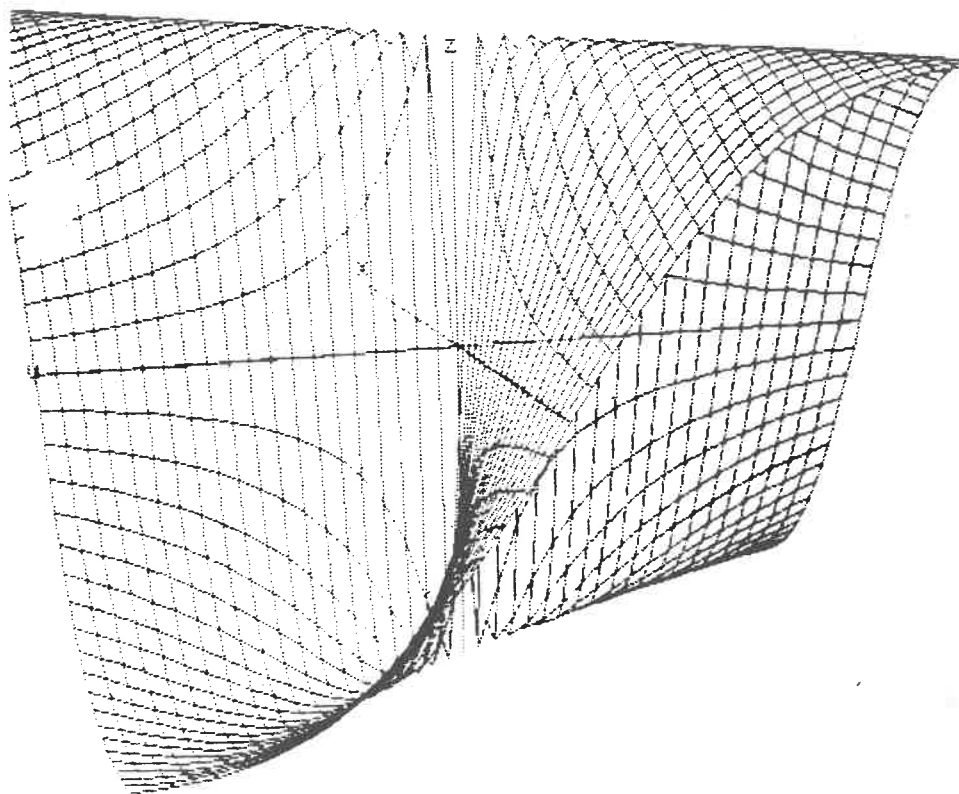


Figura 3:
Gráfica de:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

No es continua en $(0,0)$ y a lo largo de la parábola $y=x^2$ su límite es $1/2$.

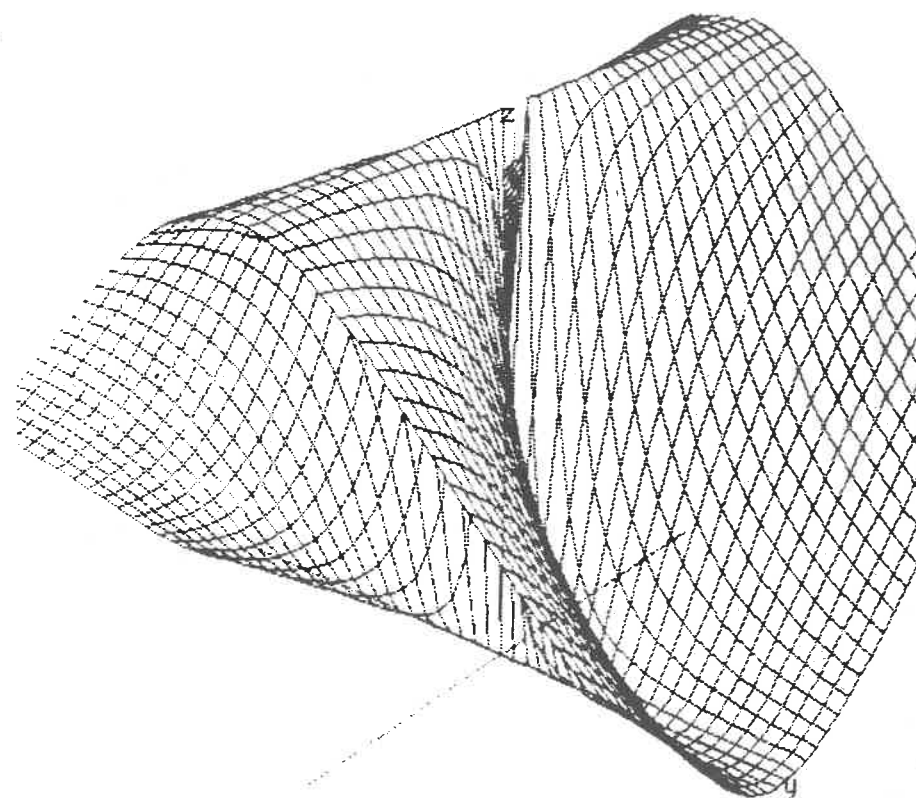


Figura 4:
Estudio de la continuidad en $(0,0)$ de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

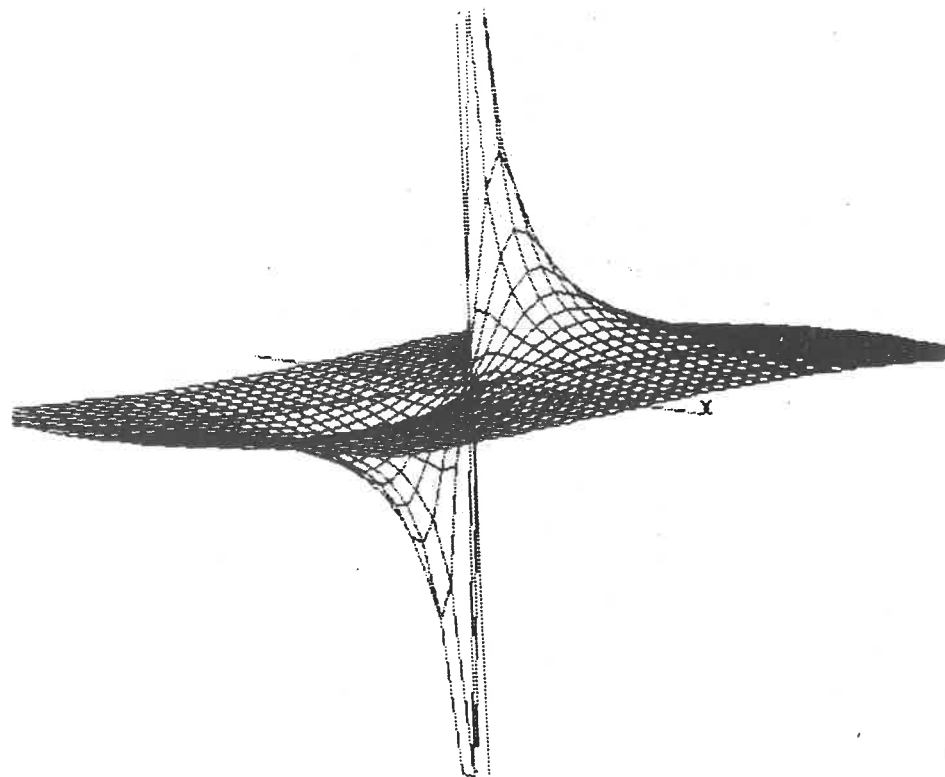


Figura 5:
La función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es discontinua en $(0,0)$ siendo infinito el límite cuando nos acercamos a este punto.

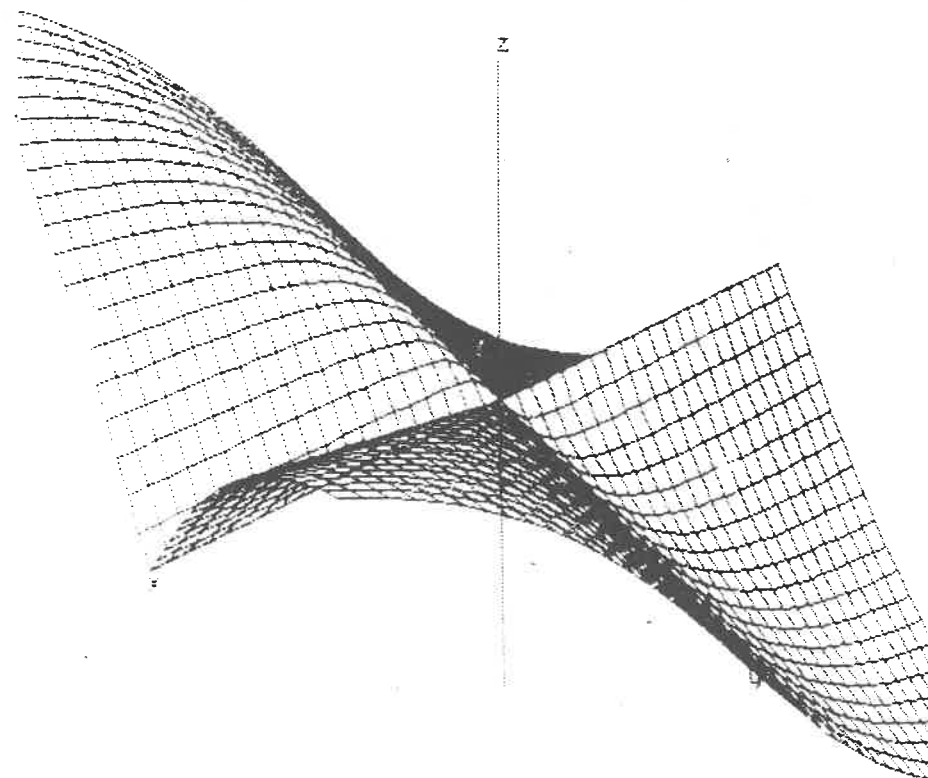


Figura 7:
La función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua en todos los puntos.

Como $y=|x|$ no es derivable en 0, no existe la derivada parcial de f respecto a y en $(x,0)$, por tanto la función no es diferenciable en $(x,0)$ y no existe en esos puntos plano tangente. Tampoco podemos utilizar en esos puntos la fórmula del gradiente ni la de las derivadas direccionales.

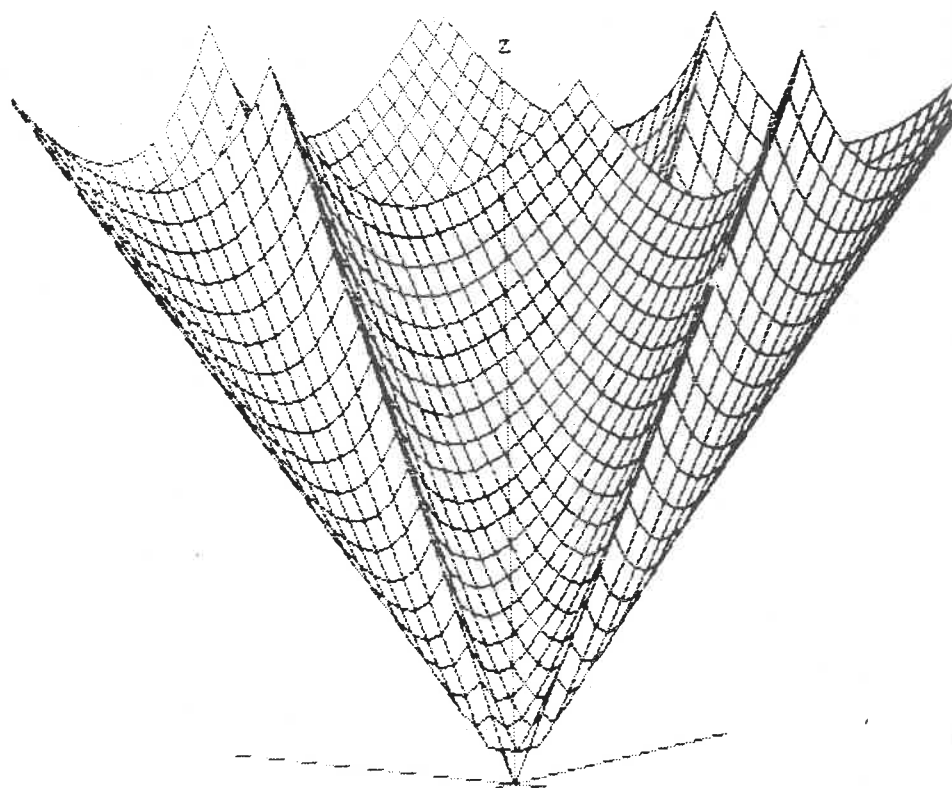


Figura 8:
La función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \text{ es distinto de } (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

es continua en todos los puntos y por tanto en $(0,0)$, pero no es diferenciable ni existe el plano tangente en dicho punto.

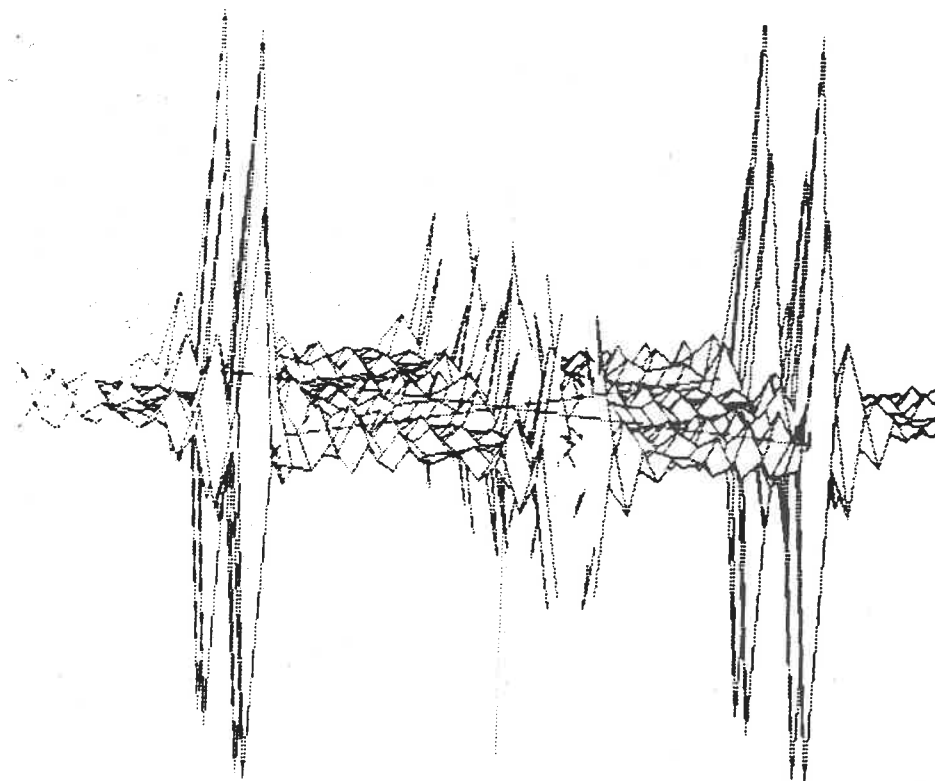


Figura 9:
En la función:

$$f(x,y) = \frac{\text{sen}x - \text{sen}y}{\text{tg}x - \text{tg}y} \quad \text{si } \text{tg}x \text{ es distinto de } \text{tg}y$$

podemos comprobar, por ser cociente de funciones continuas y derivables, que es continua en todos los puntos (donde $\text{tg}x$ es distinto de $\text{tg}y$) y sin embargo el ordenador, al tomar únicamente valores discretos nos proporciona una mala aproximación.

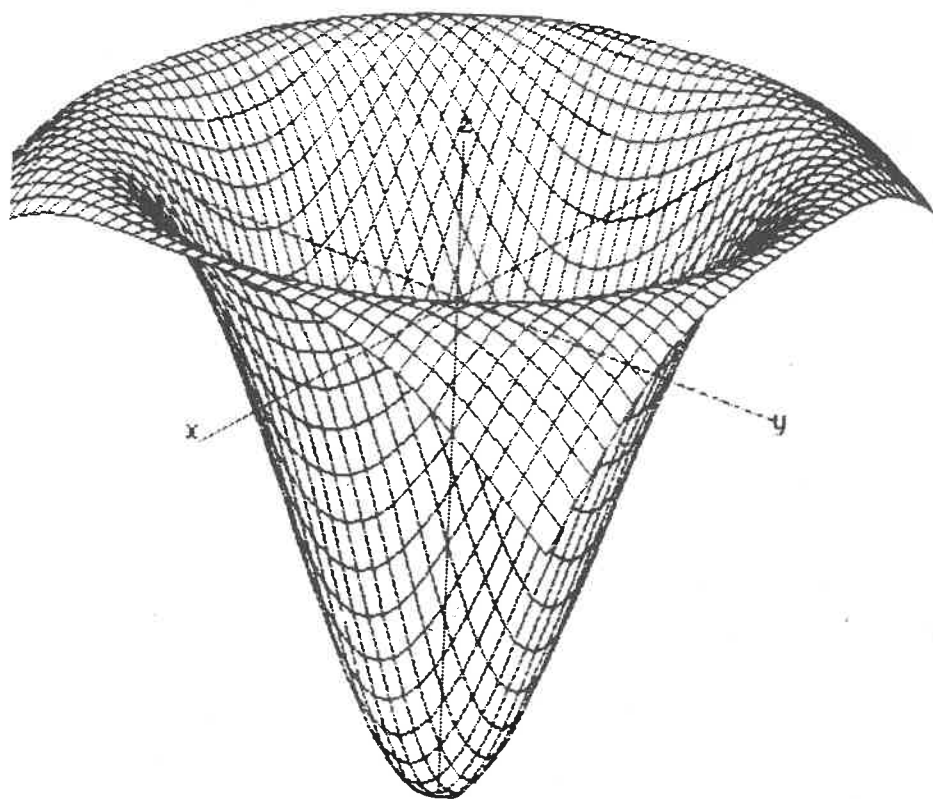


Figura 10:

$$z = \frac{-(x^2+y^2)+2\sqrt{2}(x+y)}{e^{x^2+y^2}}$$

La superficie alcanza un máximo en (0,0) y el plano tangente en ese punto es horizontal

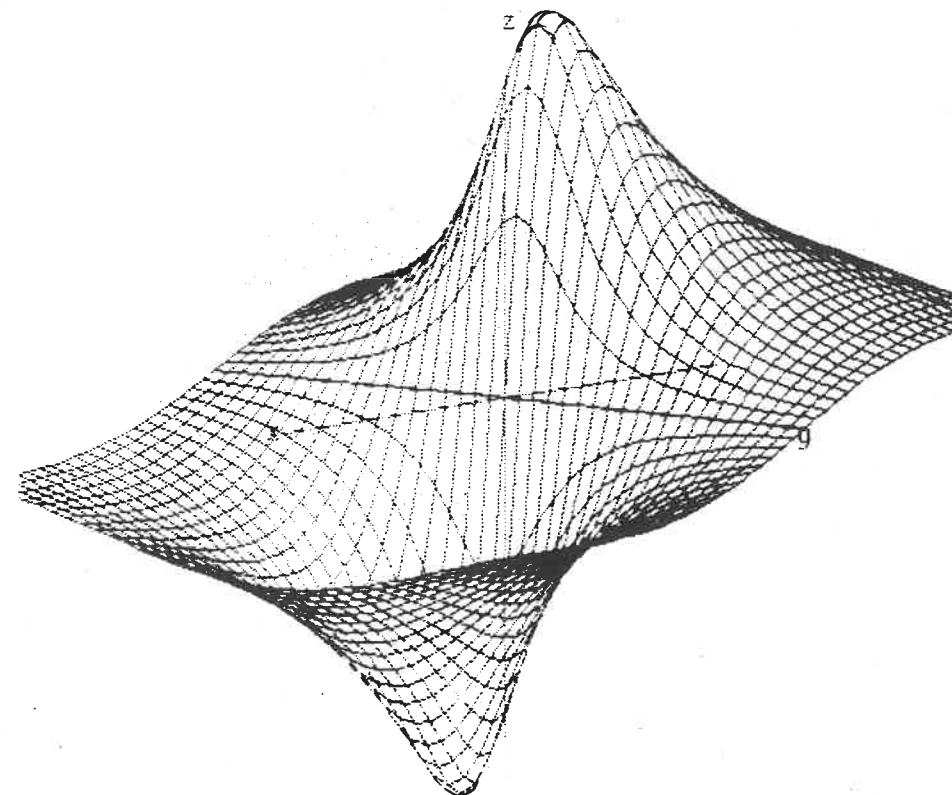


Figura 11:

$$z = \frac{-4x}{1+x^2+y^2}$$

La superficie alcanza un máximo y un mínimo absolutos, donde los planos tangentes son horizontales.

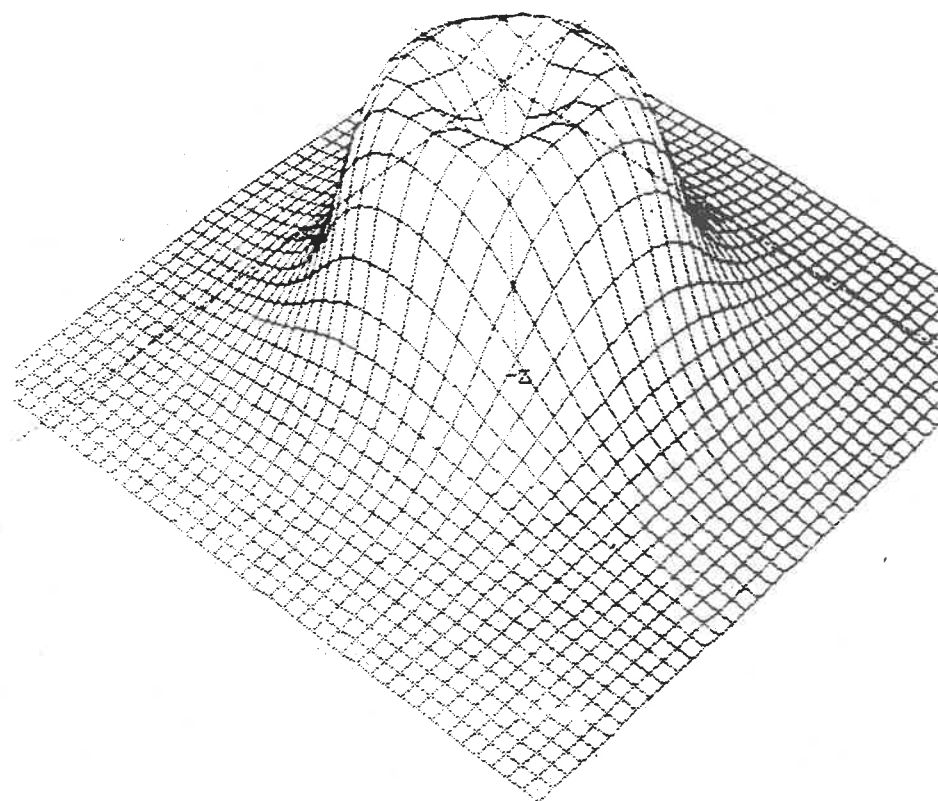


Figura 12:
La superficie:

$$z = \frac{1}{1 + (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2}$$

presenta una circunferencia de puntos con valor máximo.

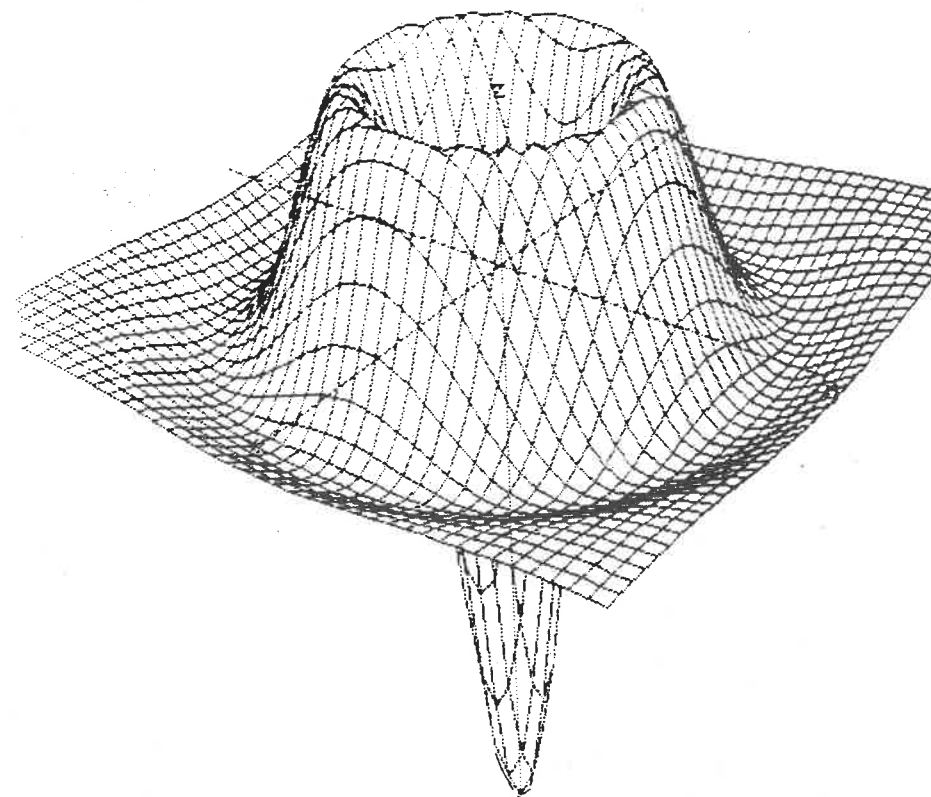


Figura 13:
La superficie:

$$z = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2\sqrt{2(x^2 + y^2) + 1}}{e^{x^2 + y^2}}$$

presenta un mínimo absoluto, una circunferencia de puntos con el mismo valor máximo absoluto, una circunferencia de mínimos relativos...

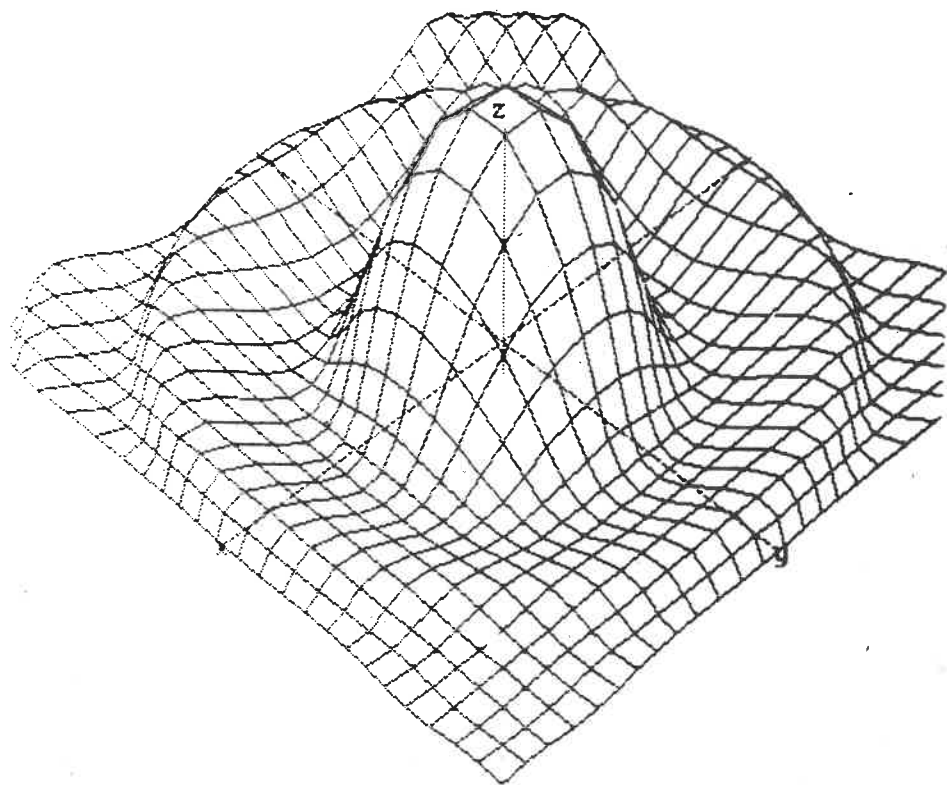


Figura 14:
La superficie:

$$z = \frac{3\cos((x^2+y^2)/3)}{3+x^2+y^2}$$

presenta un máximo absoluto y circunferencias de máximos y mínimos relativos en forma de ondas.

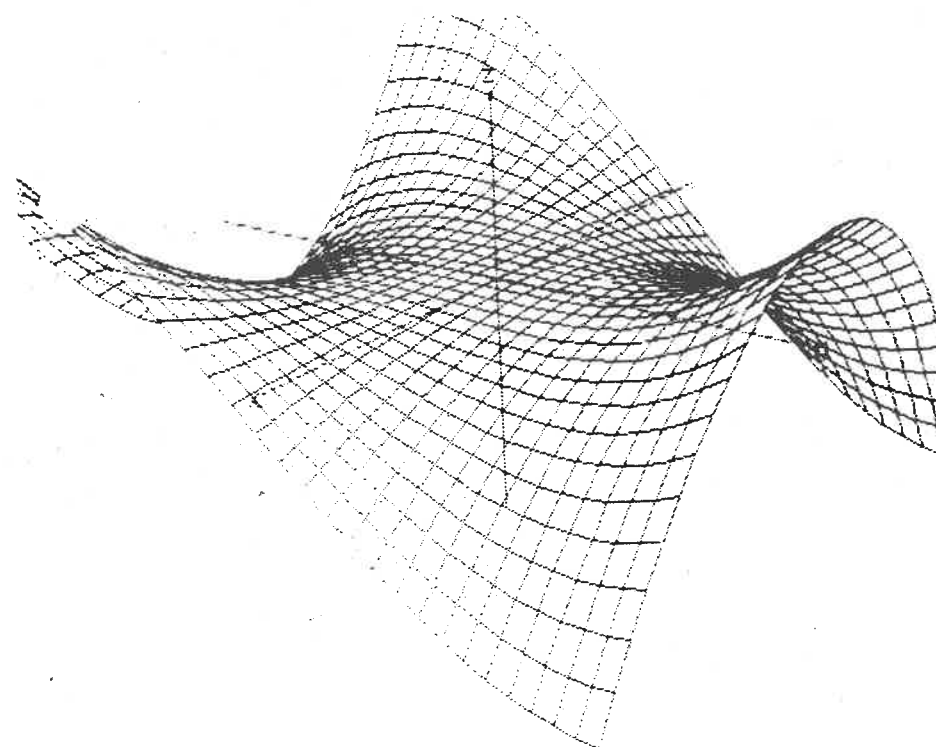


Figura 15:
La superficie $z=y^3-3yx^2-3x^2+1$ tiene en $(0,0)$ un punto de silla.

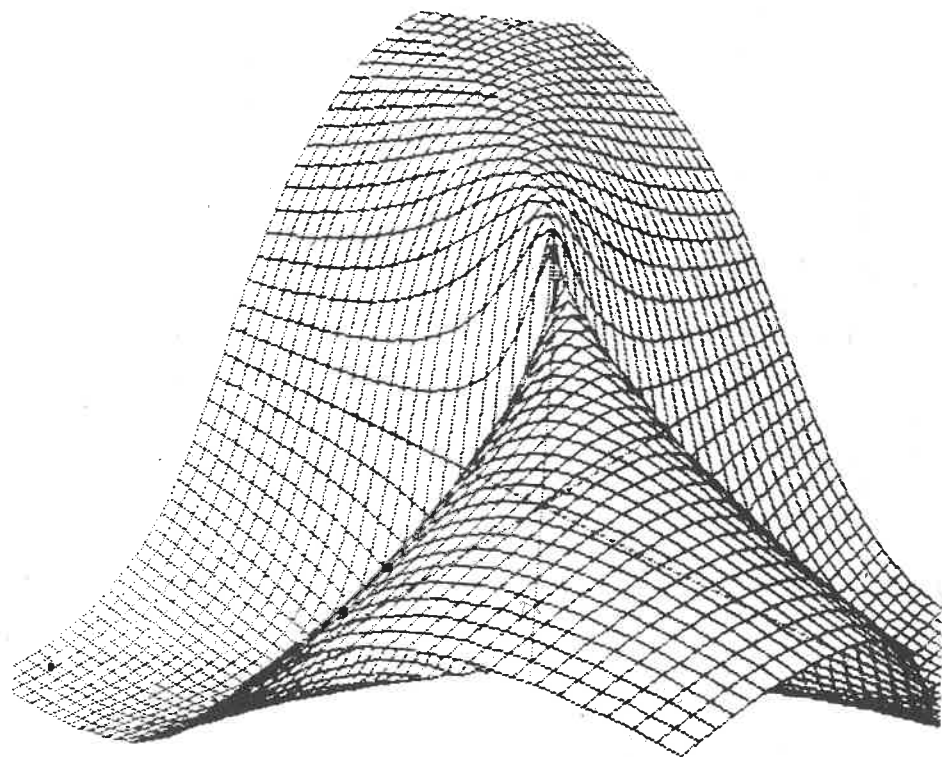


Figura 16:
La superficie:

$$z = \operatorname{arctg} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

tiene máximos en puntos en que no se anulan las derivadas parciales. En esos puntos la función no es diferenciable.

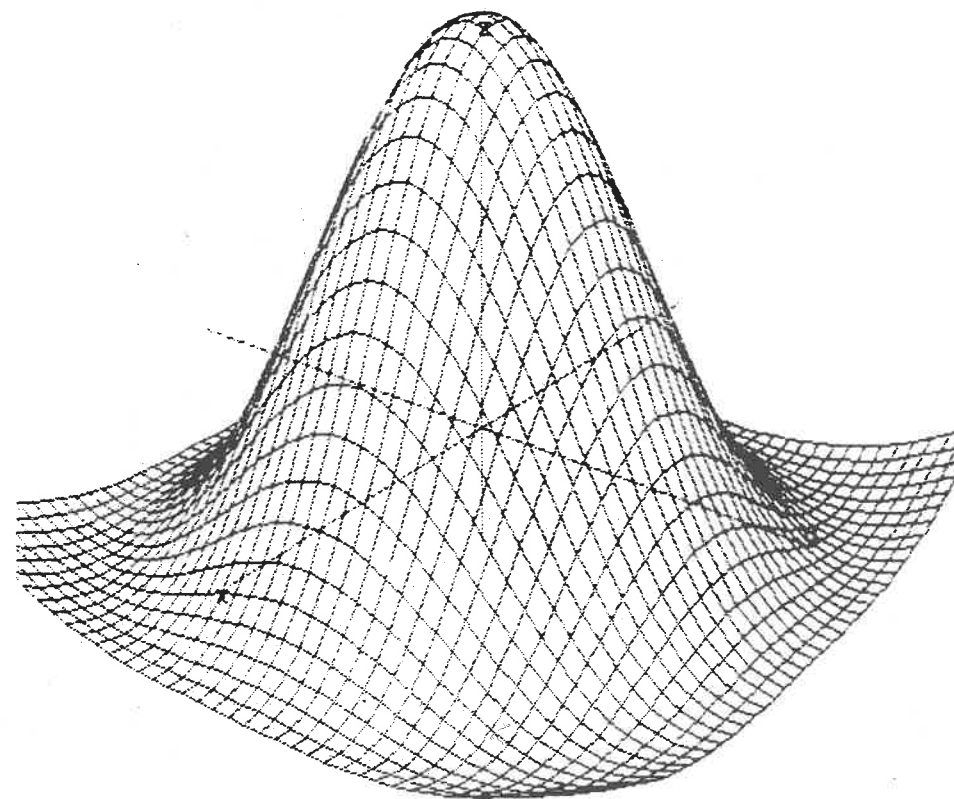


Figura 17:

$$z = \frac{-4x}{1 + x^2 + y^2}$$

En un entorno del máximo (0,0), la diferencia entre el valor de la función y el plano tangente es negativa.

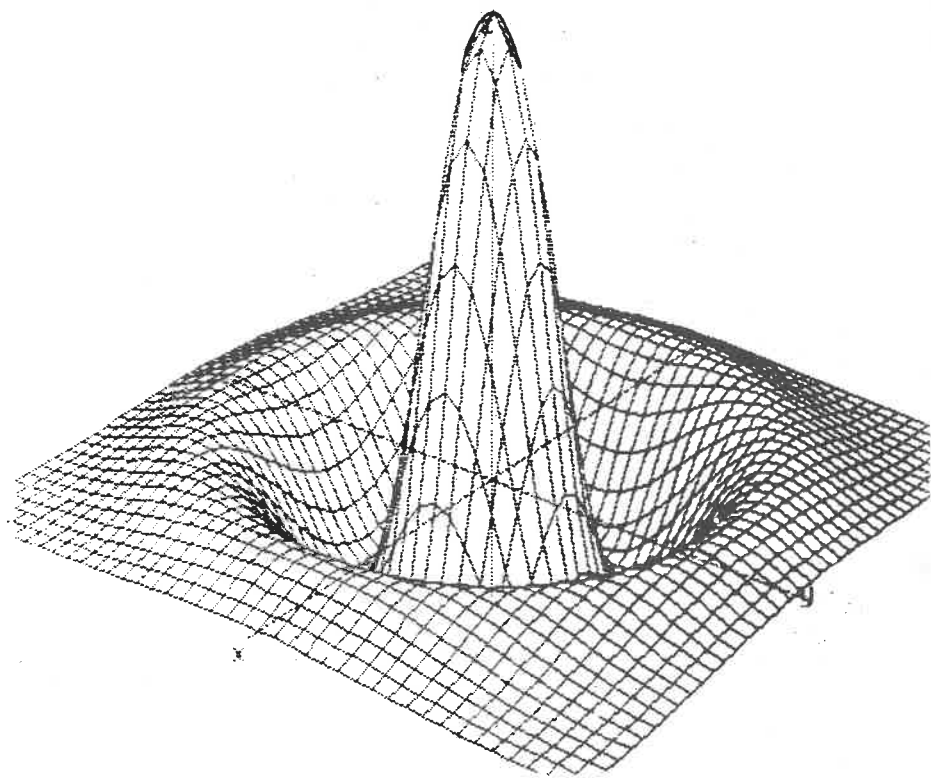


Figura 18:

$$z = \frac{(x^2+y^2)^2 - 2\sqrt{2(x^2+y^2)+1}}{ex^2+y^2}$$

En un entorno del mínimo (0,0) la diferencia entre el valor de la función y el plano tangente es positiva.

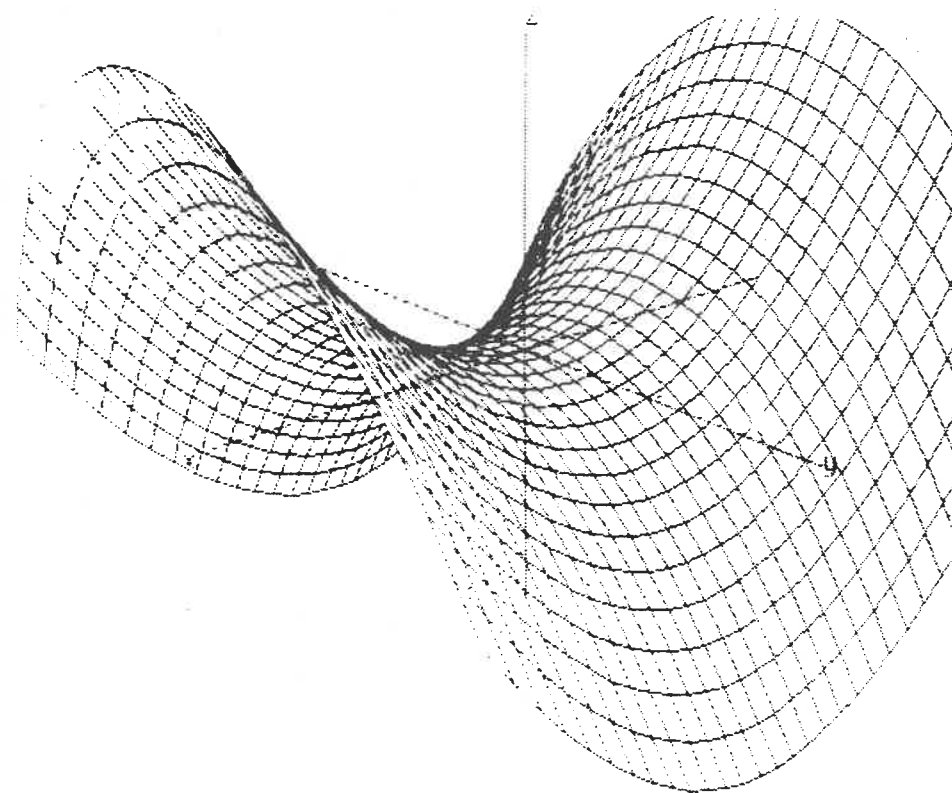


Figura 19:

La superficie $z=x^2-y^2$ tiene un punto de silla en (0,0).

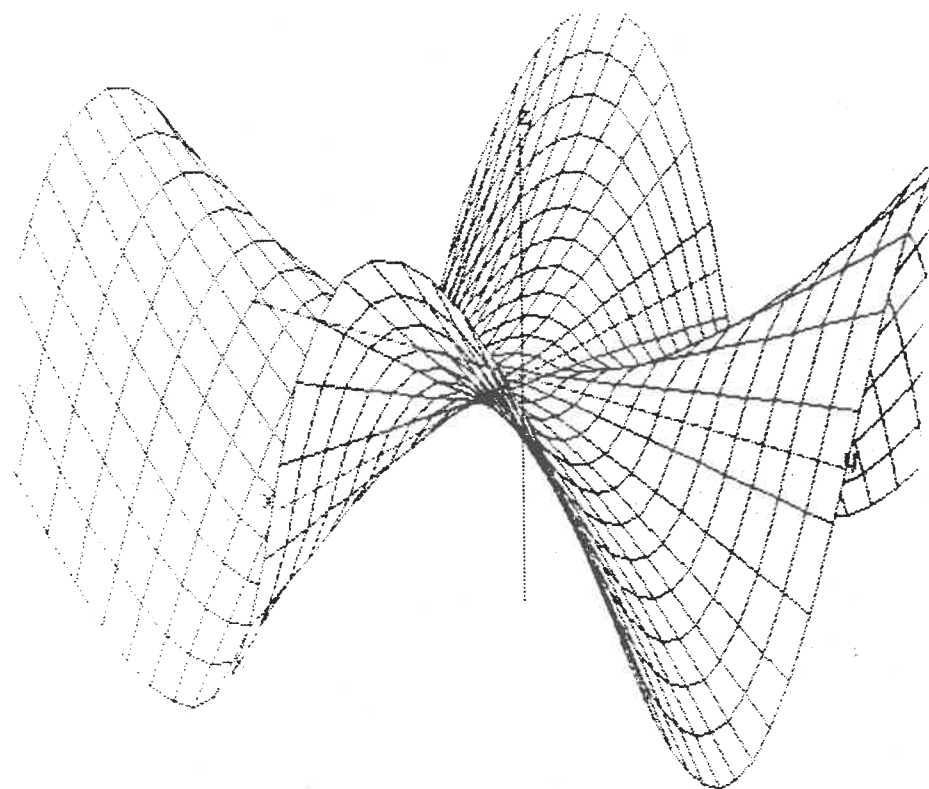


Figura 20:
La superficie $z=x^2 \arctg(y/x)-y^2\arctg(x/y)$ tiene un punto de silla en $(0,0)$.

ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE ERRORES EN LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGENEAS

M^a Trinidad Villar Liñan

*Dpto. de Algebra, Computación, Geometría y Topología
Universidad de Sevilla*

0. INTRODUCCION

Los estudios sobre Enseñanza y Aprendizaje del Análisis Matemático en el nivel universitario son relativamente recientes. Para realizar este trabajo tomamos como referencia base las investigaciones de Artigue, M. (1987, 1988 y 1991), Farfán, R.M. y Cantoral, R. (1990), Dreyfus, T. (1991), Tall, D. (1991) y Nemirovsky, R. (1991).

1. CONTEXTUALIZACION DEL TRABAJO

El presente trabajo recoge un análisis de los errores más frecuentes cometidos por alumnos de la Facultad de Químicas (de la Universidad de Sevilla), en el desarrollo de tareas con Ecuaciones Diferenciales, materia a la que se dedica un trimestre en la asignatura Matemáticas II impartida actualmente en segundo curso de esta licenciatura.

Así, pretendemos utilizar estos datos para localizar un punto del sistema didáctico que parece insatisfactorio, cuestionarlo para, posteriormente, intentar introducir cambios que permitan mejorarlo.

Damos un primer análisis descriptivo de las dificultades de los estudiantes que más tarde deberán ser categorizadas en obstáculos epistemológicos, cognitivos y didácticos. (Artigue, M., 1988).

2. CARACTERISTICAS

2.1. Objetivo del trabajo

Nuestra meta es mejorar (en el sentido de hacer más provechoso y satisfactorio) parte del sistema didáctico actual, en el caso concreto de la Enseñanza Superior Universitaria.

Hacer que la materia sea más adecuada para estudiantes de Matemáticas (que no quieren ser matemáticos), a la vez que la reconocen como herramienta de trabajo en otras de sus investigaciones, es nuestra aspiración más inmediata.

Queremos identificar las carencias y necesidades que presentan los alumnos de los primeros cursos de la licenciatura de Químicas en la conceptualización, simbolización y resolución de Ecuaciones Diferenciales, tan importantes en el desarrollo de las Ciencias Experimentales.

En particular, para iniciar el estudio, nos centraremos en el análisis de un tipo especial de ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden: la homogénea (EDH). Hemos elegido ésta como podríamos haber tomado cualquier otra. (Ver Nota Final)

2.2. Metodología

Iniciamos una fase de análisis previo de una situación didáctica concreta. Nuestra situación es la siguiente: un grupo de 37 alumnos, entre 19 y 27 años de edad, estudiantes de la Facultad de Químicas, que cursan la asignatura Matemáticas II (algunos de ellos matriculados por tercera o cuarta vez), realizan el examen del segundo parcial cuyo contenido está formado esencialmente por Métodos de Resolución de Ecuaciones Diferenciales. La prueba consta de una parte de cuestiones teórico-prácticas y otra de ejercicios de desarrollo más extensos.

La pregunta cuya respuesta analizamos sigue el esquema clásico de definir un objeto matemático, explicar algoritmo de resolución y aplicar dicho algoritmo a un caso particular. Tendremos en cuenta esta limitación, pues no hemos propuesto a los alumnos una prueba especial para realizar nuestro estudio. Los datos presentados en esta comunicación proceden de un análisis descriptivo de las respuestas dadas a la siguiente cuestión teórico-práctica:

a) La Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden Homogénea: Indicar su forma y método de resolución.

b) Integrar la EDH $(1+e^{-x/y})dx + (1-x/y)dy = 0$.

Una vez corregidos los ejercicios, anotamos los errores más frecuentes y procedemos a una clasificación en tres categorías que explicamos a continuación:

-Errores conceptuales: referidos al nivel de comprensión de los conceptos matemáticos en sí y sus definiciones formales. Ejemplo: confundir caso general (expresión de EDO de primer orden) con el caso particular pedido (la EDH).

-Errores originados por la utilización de "procedimientos previos" erróneos: referidos a la utilización de procesos y algoritmos algebraicos elementales que se suponen asimilados por el alumno en cursos anteriores. Ejemplos: despejar mal en una ecuación, fallos al derivar una función y en cálculos logarítmicos.

-Errores formales: referidos a la notación y terminología empleadas. Ejemplo: mezclar distintas notaciones como " du/dx , y' , u' , x'' ".

A continuación presentamos el análisis detallado de algunos de los errores con un breve comentario sugerido por éstos. En la medida de lo posible, realizaremos inferencias de las posibles causas del error.

3. RESULTADOS

A Errores conceptuales más repetidos:

A.1.- Dos alumnos confundieron la EDH con la EDL (ED Lineal) Homogénea ($y' + p(x)y = 0$) asociada a una EDL completa ($y' + p(x)y = r(x)$). Ambos explican el método de resolución de la EDL aunque no apliquen éste en el caso particular propuesto. Mientras uno identifica y resuelve la EDH del apartado b), el otro la integra como ED de Variables Separables (EDVS). Otras dos alumnas mezclan las definiciones de EDH y EDL como sigue:

1.- "La forma general de una Ecuación Diferencial Ordinaria de primer orden Homogénea es de la forma: $y' + p(x)y = r(x)$ donde $p(x)$ y $r(x)$ son funciones homogéneas, quiere decir que $p(\lambda x) = \lambda^n p(x)$ y $r(\lambda x) = \lambda^n r(x)$ ".

Y a continuación explica el algoritmo de resolución de las EDL.

2.- "EDH 1º Orden, $L[y] = 0$ o también se puede escribir como $q_0 y^n + q_1 y^{n-1} + \dots + q_{n-1} y' + q_n y = 0$

Aquí explica el algoritmo de resolución de las EDH y sigue con un ejemplo:

Ejemplo: $(2x + y)dx + (2y + x)dy = 0$

Comprobación de que es homogénea: $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$,

$M(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda x + \lambda y = \lambda(2x + y)$; $N(\lambda x, \lambda y) = 2\lambda y + \lambda x = \lambda(2y + x)$

Son homogéneas del mismo orden, luego la ED es homogénea".

A pesar de estas definiciones, la primera resuelve perfectamente el apartado b), mientras la segunda identifica la EDH b) con una reducible a homogénea e intenta resolverla como tal sin éxito.

A.2.- Definir EDH sólo como $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ con M y N homogéneas del mismo grado pero no definirla como $y' = f(x/y)$. (Respondieron así 17 alumnos).

A.3.- No explicar cómo son las funciones M y N . (12 respuestas).

A.4.- No especificar qué son λ (parámetro real) y m (grado) en la definición de función homogénea. (12 respuestas).

Los errores incluidos en **A.1.** muestran cómo la terminología en Matemáticas no es siempre suficientemente clara ni adecuada, utilizamos un mismo término, "homogénea", para objetos muy distintos, función homogénea y ecuación lineal homogénea.

Los errores **A.2** y **A.3** pueden reflejar dos realidades:

1ª.- Que los alumnos no conozcan más que la primera expresión para las EDH, o bien

2ª.- Que, aún conociendo la expresión $y' = f(x/y)$ como EDH en algún caso particular, no la incluyen dentro de la definición general.

Además de este grupo de errores, podemos inferir también que los alumnos tienen dificultades en contemplar todas las posibilidades de la noción matemática dentro de la definición formal. Nos preguntamos:

- ¿Hasta qué punto deben saber definir conceptos matemáticos?
- ¿Qué nivel de exigencias sería el apropiado para determinar si un estudiante de ciencia experimental conoce bien un cierto objeto/ concepto matemático?

No olvidemos que los matemáticos somos nosotros, debemos reflexionar si es acertado pedir el mismo rigor al futuro químico que al futuro matemático. Esto nos lleva a pensar que este tipo de tareas no siempre reflejan si el alumno ha dotado de significado al concepto.

A.5.- Considerar como método de resolución sólo el cambio de variable $y = ux$ y no el análogo $x = uy$. (Procedimiento encontrado en 15 ejercicios). La mayoría de estos casos van seguidos de la resolución b) mediante el cambio $y = ux$, no apropiado en esta ED. Algunos intentan integrar la complicada función que resulta, pero sin éxito; otros se dan cuenta y vuelven al principio introduciendo el cambio $x = uy$ (mucho más cómodo), incluso cuando no lo especificaron en el apartado a), lo que implica que para estos alumnos la expresión $y' = f(x/y)$ estaba implícita en la definición general (ver **A.2.**).

Estos errores podrían indicar que los alumnos se preocupan más de aplicar el algoritmo que de la base teórica que lo soporta, entre otras causas, debido a que están acostumbrados desde la enseñanza primaria a esta dinámica. La introducción del cambio de variable se hace de forma mecánica, sin ver qué es lo más conveniente antes de iniciar el proceso e incluso sin llegar al final de la resolución.

A.6.- En la explicación del método de resolución (segunda parte de a) fueron 28 los alumnos que no demostraron el tipo de ecuación resultante tras el cambio de variable (EDVS). Sin embargo, esto no fue obstáculo para resolver b) en ningún caso. El desarrollar con detalle la demostración, sin ser complicado, encierra la dificultad del trabajo en casos generales, con el consiguiente escollo del lenguaje formal algebraico. En cambio, pudieron desenvolverse en el caso particular.

En esta categoría comentaremos que 12 alumnos aplicaron directamente el algoritmo sin comprobar previamente si se trataba de una EDH. Esto podría

estar causado por la interpretación del enunciado en el que ya se indica que es una EDH, por lo cual no lo consideraremos un error propiamente dicho.

B Errores de procedimientos previos más repetidos:

B.1.- Relativos a cálculos logarítmicos:

" $-\ln y = \ln(-y)$ ", " $\ln A + \ln B = \ln(A + B)$ ", " $\ln A - \ln B = \ln A / \ln B$ ", " $\ln y = \ln f(u) + C \Rightarrow y = f(u)$ ", " $\ln y = \ln A / \ln B \Rightarrow y = 1/B + A$ ".

(Se encontraron siete respuestas de este tipo)

B.2.- Relativos al cálculo de primitivas:

No integrar $\int \frac{1 + e^{-x}}{xe^{-x} + 1} dx$ que es inmediata (6 alumnos).

B.3.- Operar o despejar mal en una ecuación. (7 alumnos).

B.4.- No deshacen bien el cambio de variable una vez resuelta la E.D. de variables separables o bien trabajan con las tres variables. Otros no deshacen el cambio por no terminar la integración pero lo dejan indicado (9 alumnos). Ejemplos:

$$y(u + e^u) = k, x = uy, \Rightarrow (x/u)(u + e^u) / k.$$

$$y = ux \Rightarrow (1 - 1/u)dy = -(1 + e^{-1/u})dx.$$

$$y = c - u - e^u.$$

$$\int \frac{1 + e^{-u}}{ue^{-u} + 1} du = \int \frac{1 + \tau}{ut + 1} \frac{dt}{t}; \frac{1 + t}{ut + 1} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 + ut} \dots$$

Los errores de procedimientos previos más llamativos son los cálculos con logaritmos, a partir de esto nos preguntamos si el alumno sabe qué es el logaritmo o simplemente lo considera una regla más de cálculo sin pensar mucho en su significado. El error **B.2.** es significativo pues, si pocos consiguieron llegar a esta integral en la resolución de la ED, menos fueron los que terminaron el cálculo de esta primitiva, la cual no sólo es inmediata (multiplicando numerador y denominador por e^x obtenemos $f'(x)/f(x)$ en el

integrando), sino que se resolvió en clase de problemas.

De los fallos **B.3.** sólo decir que están presentes siempre que se realice una tarea larga y densa con muchos cálculos, (también los que damos clases de Matemáticas los cometemos alguna vez).

C Errores formales más frecuentes:

C.1.- Mezclar notaciones, incluso después del cambio de variable. Ejemplos: " $y = u(x)x$ ", " $y' = u + xdu/dx$ " (4 respuestas).

C.2.- Hablar de "integral" en vez de "ED". (1 respuesta).

C.3.- Llamar "orden" al grado de una función homogénea. (3 resp.)

De estos errores diremos que el C.1. puede hacernos concluir que la notación sigue generando obstáculos para algunos alumnos de estos niveles. Hemos incluido los otros dos errores formales, poco representativos pero "curiosos" desde el punto de vista de su relación con la evolución de la terminología en los comienzos del Cálculo Diferencial e Integral.

4. DISCUSION

Según la meta que nos proponíamos, hemos conseguido detectar carencias tanto en las concepciones de nuestros alumnos como en nuestra práctica docente.

La tarea propuesta, examen, con todos los condicionantes que ella conlleva, no es la más adecuada para este tipo de análisis, por lo que una vez terminada esta fase del trabajo necesitamos proponer otro tipo de pruebas menos "rigoristas" que nos permitan conocer las concepciones de los estudiantes.

Nuestros análisis nos han llevado a reflexionar sobre la necesidad de exigir definiciones y demostraciones rigurosas a los estudiantes de Carreras Científico-Técnicas en lugar de fomentar la identificación de situaciones reales (en sus prácticas de laboratorio o en otras asignaturas, por ejemplo) que podrían ser modelizadas y resueltas matemáticamente. Llevar a la clase de Matemáticas algunas de ellas podría ser un paso hacia la consecución de nuestro fin.

NOTA FINAL

Además de existir razones históricas, hacemos esta afirmación a partir de los resultados de una encuesta realizada a los profesores de la Facultad de Químicas. En dicha encuesta se pedía evaluar de 1 a 5 cada tema del

programa actual de la asignatura Matemáticas II en relación a la importancia y necesidad de sus contenidos para el resto de las asignaturas de la carrera. De un total de 11 encuestas, 6 dan 5 puntos a casi todos los temas relativos a ED, 1 otorga una media de 3 puntos a dichos temas y el resto los puntúa poco o no los puntúa.

5. REFERENCIAS

Artigue, M.(1987): "Ingenierie Didactique à propos d'Equations Differentielles". Actas PME 1987. (236-242).

Artigue, M.(1988): "Ingenierie Didactique". *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.9, nº 3 (281-308).

Artigue, M.(1991): "Análisis". En D. Tall (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Pb. Dordrech/ Boston/ London. (168-198).

Dreyfus, T.(1990): "Advanced Mathematical Thinking". En p. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics and Cognition*. Cambridge University Press: Cambridge. (113-134).

Farfán, R. M. y Cantoral, R. (1990): "Elementos metodológicos para la reconstrucción de una didáctica del Análisis en el nivel superior." Cuadernos de investigación, nº 13. México. (19-26).

Nemirovsky, R.(1991): "Notas sobre la relación entre Historia y el Aprendizaje Constructivo del Cálculo". En R. Cantoral, F. Cordero, R. M. Farfán y C. Imaz (Eds.): *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*. Area Cálculo-Análisis. Universidad Autónoma del Estado de México. (37-53).

Tall, D.(1991): "The transition to Advanced Mathematical Thinking: functions, limits, infinity and proof". En Grows (Ed) *Handbook of Teaching and Learning Mathematics*. McMilan, New York. (495-511).

**ANALISIS DE LA BIBLIOGRAFIA MATEMATICA
RECOMENDADA A LOS ALUMNOS
EN LOS PRIMEROS CURSOS DE E.U. I.T.I. DE ESPAÑA**

*García, R.; López, M.L.; López, M.A. y Verastegui, D.
E.U. Politécnica . Almadén
Universidad Castilla-La Mancha*

1. ANTECEDENTES

Decidimos realizar este trabajo dada la gran diversidad de bibliografía recomendada a los alumnos en las asignaturas de Matemáticas de los primeros cursos de las E.U.I.T. Industrial de España.

Se fijaron los siguientes objetivos: Realizar una base de datos con la bibliografía recomendada a los alumnos en la E.U.I.T.I. de España, clasificarla según la frecuencia con que era recomendada y divulgar los resultados entre los Departamentos colaboradores.

2. METODOLOGIA

2.1. Recogida de Información

Se procedió a realizar un Mailing para solicitar la colaboración de los Departamentos de Matemáticas de las E.U.I.T.I. de España, a los que posteriormente se les enviará la base de datos que resulte de este trabajo.

2.2. Procesamiento de la información

Con la información recopilada, se confeccionó una base de datos en DBASE III Plus en la que se ordenaron las referencias bibliográficas de cada asignatura en función del número de Escuelas que las recomendaban.

A continuación se procedió a convertir la base de datos creada a WordPerfect, para realizar unos posters que permitieran visualizar, de forma eficiente, los resultados.

Simultáneamente, se procesó la base de datos con el paquete estadístico SPSS para realizar un análisis descriptivo de los datos.

3. RESULTADOS

3.1 Algebra

Número de libros recomendados: 84

Número medio de libros recomendados por escuela: 8.5

Distribución del número de citas

Citas (*)	Nº libros	%	% Acumulado
1	49	58,3	58,3
2	8	9,5	67,9
3	11	13,1	81,0
4	4	4,8	85,7
5	3	3,6	89,3
6	2	2,4	91,7
7	1	1,2	92,9
8	2	2,4	95,2
9	1	1,2	96,4
10	1	1,2	97,6
14	1	1,2	98,8
16	1	1,2	100,0
TOTAL	84	100.0	100.0

(*) Número de veces que un libro es recomendado

Libros recomendados en mas de cinco escuelas:

Autor: **de la Villa, A.**
TITULO: *Problemas de Algebra*
Nº de Citas: 16

Autor: **de Burgos, J.**
TITULO: *Curso de Algebra y Geometría.*
Nº de Citas: 14

Autor: **Anzola, M. & Caruncho, J. & otros.**
TITULO: *Problemas de Algebra.*
Nº de Citas: 10

Autor: **García García, J. & López Pellicer, M.**
TITULO: *Algebra Lineal y Geometría.*
Nº de Citas: 9

Autor: **Granero Rodriguez, F.**
TITULO: *Algebra y Geometría Analítica.*
Nº de Citas: 8

Autor: **Strang, D.**
TITULO: *Algebra Lineal y sus Aplicaciones.*
Nº de Citas: 8

Autor: **Torregrosa, J. R. & Jordan, L.**
TITULO: *Algebra Lineal y sus Aplicaciones.*
Nº de Citas: 7

Autor: **Luzarraga, A.**
TITULO: *Problemas Resueltos de Algebra Lineal.*
Nº de Citas: 6

Autor: **Tebar Flores, E.**
TITULO: *Problemas de Algebra Lineal.*
Nº de Citas: 6

Autor: **Grossman, S.**
TITULO: *Algebra Lineal.*
Nº de Citas: 5

Autor: **Queyssane, M.**
TITULO: *Algebra Básica.*
Nº de Citas: 5

Autor: **Seymour Lipschutz.**
TITULO: *Algebra Lineal.*
Nº de Citas: 5

3.2 Cálculo Infinitesimal

Número de libros recomendados: 116
Número de libros recomendados por escuela: 11,8
Distribución del número de citas

Citas (*)	Nº libros	%	% Acumulado
1	73	62,9	62,9
2	16	13,8	76,7
3	9	7,8	84,5
4	2	1,7	86,2
5	4	3,4	89,7
6	2	1,7	91,4
7	4	3,4	94,8
9	1	0,9	95,7
10	1	0,9	96,6
11	1	0,9	97,4
13	1	0,9	98,3
14	2	1,7	100,0
TOTAL	116	100.0	100.0

(*) Número de veces que un libro es recomendado

Libros recomendados en mas de cinco escuelas:

Autor: **Apostol, T. M.**
TITULO: *Calculus* (2 vols.)
Nº de Citas: 14

Autor: **Spivak, M.**
TITULO: *Calculus*
Nº de Citas: 14

Autor: **Piskunov, N.**
TITULO: *Cálculo Diferencial e Integral*
Nº de Citas: 13

Autor: **Demidovich, D.**
TITULO: *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático.*
Nº de Citas: 11

Autor: **Tebar Flores/E.**
TITULO: *Problemas de Cálculo Infinitesimal. (Vol. 1 y 2)*
Nº de Citas: 10

Autor: **Larson, R.E. & Hostetler, R.P.**
TITULO: *Cálculo y Geometría Analítica.*
Nº de Citas: 9

Autor: **Demidovich, B.**
TITULO: *5000 Problemas de Análisis Matemático*
Nº de Citas: 7

Autor: **García Castro, F.**
TITULO: *Cálculo Infinitesimal*
Nº de Citas: 7

Autor: **Granero Rodriguez, F.**
TITULO: *Cálculo.*
Nº de Citas: 7

Autor: **Martínez Salas, J.**
TITULO: *Elementos de Matemáticas.*
Nº de Citas: 7

Autor: **RAEC.**
TITULO: *Problemas de Cálculo Infinitesimal.*
Nº de Citas: 6

Autor: **Salas, S.L. & Hille, E.**
TITULO: *Calculus de una y Varias Variables (2 Vols.)*
Nº de Citas: 6

Autor: **Apostol, T. M.**
TITULO: *Análisis Matemático.*
Nº de Citas: 5

Autor: **Coquillat, F.**
TITULO: *Cálculo Integral, Metodología y Problemas*
Nº de Citas: 5

Autor: **De Diego, B.**
TITULO: *Ejercicios de Análisis*
Nº de Citas: 5

Autor: **Swokowsky, E. W.**
TITULO: *Cálculo con Geometría Analítica.*
Nº de Citas: 5

3.3 Ampliación de Matemáticas

Número de libros recomendados: 121

Número medio de libros recomendados por escuela: 10,4

Distribución del número de citas

Citas (*)	Nº libros	%	% Acumulado
1	79	61,2	61,2
2	24	18,6	79,8
3	11	8,5	88,4
4	2	1,6	89,9
5	6	4,7	94,6
6	3	2,3	96,9
8	2	1,6	98,4
9	2	1,6	100,0
TOTAL	129	100.0	100.0

(*) Número de veces que un libro es recomendado

Libros recomendados en mas de cinco escuelas:

Autor: **Marsden, T.**

TITULO: *Cálculo Vectorial.*

Nº de Citas: 9

Autor: **Simmons, F.**

TITULO: *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones.*

Nº de Citas: 9

Autor: **Kiseliiov, Drasnov & Makarenko**

TITULO: *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.*

Nº de Citas: 8

Autor: **Marcellan, F.**

TITULO: *Ecuaciones Diferenciales. Problemas Lineales y aplicaciones.*

Nº de Citas: 8

Autor: **Piscunov, N.**

TITULO: *Cálculo Diferencial e Integral.*

Nº de Citas: 6

Autor: **Spiegel, Murray.**

TITULO: *Transformada de Laplace*

Nº de Citas: 6

Autor: **Spiegel, Murray.**

TITULO: *Estadística.*

Nº de Citas: 6

Autor: **Apostol, T. M.**

TITULO: *Calculus*

Nº de Citas: 5

Autor: **Ayres, F.**

TITULO: *Ecuaciones Diferenciales.*

Nº de Citas: 5

Autor: **Peña, D.**

TITULO: *Estadística Modelos y Métodos (2 vols)*

Nº de Citas: 5

Autor: **Puig, A.**

TITULO: *Curso Teórico Práctico de E.D.O. Aplicado a la Física y a la Técnica.*

Nº de Citas: 5

Autor: **ROSS, S.**

TITULO: *Ecuaciones Diferenciales.*

Nº de Citas: 5

Autor: **Spiegel, Murray.**

TITULO: *Variable Compleja.*

Nº de Citas: 5

4. CONCLUSION

Existe una fuerte dependencia entre la amplitud y dispersión de los temarios y el número de libros necesarios para cubrirlos. Así en la asignatura de Algebra Lineal se recomienda 8,5 libros como media, mientras que en Cálculo Infinitesimal y Ampliación de Matemáticas 11,8 y 10,4 respectivamente. Por otra parte el número total de libros vuelve a ratificar este hecho: 84 en Algebra Lineal, 116 en Cálculo Infinitesimal y 121 en Ampliación.

El número de autores extranjeros varía entre el 33 % Algebra Lineal, 56 % Cálculo Infinitesimal y el 85 % Ampliación de Matemáticas para los libros recomendados en cinco o más Escuelas.

Los resultados obtenidos se pueden considerar como una propuesta de la bibliografía mínima para los alumnos que toda biblioteca debería tener y a la vez pueda servir como elemento unificador a nivel de todas las E.U.I. T. Industriales de España.

NIVEL DE SIGNIFICACION EN UN TEST DE HIPOTESIS: UN ANALISIS DE SU INTERPRETACION POR ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

*M. A. Vallecillos; M. C. Batanero y L. Serrano
Dpto. de la Dca. de las Matemáticas
Universidad de Granada*

INTRODUCCION

Hoy día se plantea desde múltiples perspectivas y con fines distintos el análisis didáctico de temas de Estadística que tienen repercusión en la enseñanza de los diversos niveles educativos. Uno de estos temas es la Inferencia Estadística en general, y el contraste estadístico de hipótesis en particular. En este trabajo presentamos una descripción de resultados experimentales obtenidos en un grupo de estudiantes universitarios a los que se preguntó sobre la interpretación dada al nivel de significación en un contraste de hipótesis.

MUESTRA Y CUESTIONARIO EMPLEADOS

La prueba fué realizada en Mayo de 1991 a un grupo de 35 alumnos de la asignatura de Estadística de 2º Curso de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la ETS de la Universidad de Granada. Los resultados que aquí presentamos se refieren a dos items que forman parte de un cuestionario más amplio formado por 20 cuestiones sobre diversos aspectos conceptuales del nivel de significación en un contraste de hipótesis (Vallecillos y cols., 1992). Estos dos items son los siguientes:

Item 1:

Un nivel de significación del 5% significa que, en promedio, 5 de cada 100 veces que rechazamos la hipótesis nula, estaremos equivocados: V/F. Razona la respuesta.

Item 2:

Un nivel de significación del 5% significa que, en promedio, 5 de cada 100 veces que la hipótesis nula es cierta la rechazaremos: V/F. Razona la respuesta.

Aunque los items tienen una redacción sintácticamente muy parecida, el primero de ellos es verdadero y el segundo no. El propósito del análisis de las respuestas a ambos items, así como de los argumentos que las explican, es profundizar en nuestro conocimiento acerca de la comprensión del concepto de nivel de significación así como en el error de confusión de condicionales que se produce en la definición del mismo que ya ha sido descrito por Diaconis y Freedman (1981), Birnbaum (1982) y Falk (1986).

RESULTADOS Y DISCUSION

Los resultados se presentan en la Tabla 1. La respuesta mayoritaria, en mas de la mitad de los alumnos, ha sido incorrecta expresando aparentemente el error de confusión entre los dos sucesos condicionales que definen el nivel de significación. La respuesta correcta, en ambos casos, la han dado el 40% de los alumnos. Sin embargo, al estudiar conjuntamente los dos items hallamos que sólo 7 estudiantes dan la respuesta correcta a ambos items, 11 estudiantes dan ambas respuestas incorrectas y 17 son inconsistentes, dando una respuesta correcta y otra incorrecta.

Tabla 1

Frecuencias y porcentajes de respuestas

Item	Verdadero (%)	Falso (%)	Blanco	R. Correctas
1	18 (51.4)	14 (40.0)	3 (8.6)	14 (40.0)
2	14 (40.0)	18 (51.4)	3 (8.6)	14 (40.0)

Aunque estos datos son ya de por si bastante reveladores, es preciso hacer un análisis mas fino para tratar de comprender mejor la concepción que estos estudiantes tienen sobre el nivel de significación analizando los argumentos dados como razonamiento a las respuestas de los items. Aunque hay un alto porcentaje de alumnos que no han razonado la respuesta, 22,9% al item 1 y 45.7% al item 2, consideramos de interés comentar los argumentos dados, por la gran diversidad de respuestas.

A continuación describimos los diferentes argumentos dados por los alumnos en cada uno de los items. Entre paréntesis aparece el código asignado a los alumnos que dan este argumento, con objeto de poder estudiar la consistencia de los mismos en la respuesta a ambos items. Finalmente, en la Tabla 2, se presentan las frecuencias de los diversos argumentos empleados en cada item.

Categorización de argumentos:

* Respuestas correctas:

Son aquellas en que se interpreta $\alpha = P(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta})$.

Hemos encontrado dos variantes:

I₁ : Se emplea consistentemente con la opción (V/F) elegida. [AL: 5, 10 en Item 1] [AL: 5, 19, 23, 25, 28, 30, 33 en Item 2].

I₂ : Se emplea la definición, pero en forma contradictoria con la respuesta al item. [AL: 8, 12, 19, 21, 27, 30, 35, 29 en Item 1]. [AL: 12, 27, 29, 35 en Item 2].

* Respuestas incorrectas conservando la idea de probabilidad condicional:

I₃ : Confusión de α con $P(H_0 \text{ cierta/rechazada})$. [AL: 9 en Item 1]. ("Error asociado al rechazo de la H_0 cierta"). [AL: 26 en Item 2].

I₄ : Confusión de α con "probabilidad de haber acertado al aceptar H_0 ". ($P(H_0 \text{ cierta/aceptada})$). [AL: 11, 28 en Item 1].

I₅ : Confusión de α con $P(H_0 \text{ falsa/aceptada})$. [AL: 13 en Item 1]. [AL: 11, 13 en Item 2].

I₆ : Nivel de significación asociado a la aceptación de la hipótesis nula falsa, esto es, confusión con el error tipo II. [AL: 2 en Item 1] [AL: 2 en Item 2].

* Nivel de significación como probabilidad no condicional referida a la hipótesis nula:

I₇ : Nivel de significación como probabilidad de aceptar la hipótesis nula ("zona o intervalo donde puedo aceptar como válida la H_0 "). [AL: 17 en ambos items].

I₈ : Nivel de significación asociado con rechazo de la hipótesis nula. [AL: 7 en Item 1].

I₉ : Probabilidad de que la hipótesis nula sea falsa. ("La H_0 en un 5% no se cumplirá"). [AL: 23 en Item 2].

Tabla 2

Frecuencia de interpretaciones dadas al nivel de significación por los alumnos en la argumentación de los ítems

Interpretaciones	Item 1	Item 2
I ₁ $\alpha = P(\text{rechazar } H_0 H_0 \text{ cierta})$ (1)	2	7
I ₂ $\alpha = P(\text{rechazar } H_0 H_0 \text{ cierta})$ (2)	8	4
I ₃ $\alpha = P(H_0 \text{ cierta} H_0 \text{ rechazada})$	1	1
I ₄ $\alpha = P(H_0 \text{ cierta} H_0 \text{ aceptada})$	2	2
I ₅ $\alpha = P(H_0 \text{ falsa} H_0 \text{ aceptada})$	1	
I ₆ $\alpha = P(\text{aceptar } H_0 H_0 \text{ falsa})$	1	1
I ₇ $\alpha = P(\text{aceptar } H_0)$	1	
I ₈ $\alpha = P(\text{rechazar } H_0)$	1	
I ₉ $\alpha = P(H_0 \text{ falsa})$		1
I ₁₀ $\alpha = P(H_0 \text{ cierta})$	1	1
I ₁₁ $\alpha = P(\text{error en la decisión})$	6	2
I ₁₂ $\alpha = P(\text{error})$	1	1
I ₁₃ Confusión de α con $1-\alpha$	1	1
I ₁₄ Otros argumentos	3	1

(1) Correctamente empleada.

(2) Contradictoria con la respuesta al ítem.

I₁₀ : Probabilidad de que la hipótesis nula sea cierta. (" α depende de que H_0 sea cierta"). [AL: 24 en Item 1]. ("Probabilidad de la hipótesis, no si la aceptamos o no"). [AL: 15 en Item 2].

*** Nivel de significación como probabilidad de error:**

I₁₁: α como probabilidad de error en la decisión tomada: ("5 de cada 100 veces nos equivocaremos en la hipótesis aceptada"). [AL: 3 en ambos Items]. (" α es el margen de error al tomar una decisión, tanto si se acepta como si se rechaza la hipótesis"). [AL: 31 en ambos items]. Nivel de significación asociado a error en la aceptación de la hipótesis nula. [AL: 4, 13, 16, 33 en Item 1].

I₁₂: α como probabilidad de error: ("nivel de significación es el error que no podemos salvar ante un contraste de hipótesis"). [AL: 18 en ambos items].

*** Otras interpretaciones:**

I₁₃: Confusión de α y $1-\alpha$; (respuesta contradictoria). [AL: 9 en Item 2]. Relación con el nivel de confianza "para estar seguros del resultado". [AL: 15 en Item 1].

I₁₄: argumentos confusos: ("No estaremos equivocados"). [AL: 32 en Item 1]. ("Además H_0 ha de ser cierta"). [AL: 34 en Item 1]. (" α depende de que H_0 sea cierta"). [AL: 24 en Item 2].

En resumen, encontramos una gran diversidad de interpretaciones, empleadas a veces no consistentemente en ambos ítems. Un porcentaje elevado de alumnos da argumentos semejantes en ambos. En la Tabla 2 se presenta un resumen de las frecuencias de aparición de estos argumentos.

- Observamos que sólo 10 alumnos usan la definición correcta del nivel de significación en el ítem 1 y 11 en el ítem 2, aunque esta definición correcta no es siempre consistente con la respuesta (verdadero/falso) al ítem, lo que podría explicarse por el error generalizado en la confusión de condicionales en el nivel de significación, señalado por Falk (1986). Sin embargo, sólo 1 alumno en cada ítem emplea explícitamente el argumento erróneo. El resto de los argumentos pueden clasificarse en los siguientes apartados:

- Efectuar la sustitución de uno o ambos de los sucesos "rechazar H_0 " y " H_0 cierta" o sus contrarios en la definición del nivel de significación. (Interpretaciones I3 a I6).

- Interpretar el nivel de significación como probabilidad asociada a la hipótesis nula, bien de que sea falsa o cierta, bien de que se acepte o rechace, suprimiendo los condicionales. (Interpretaciones I7 a I10).

- Confusión de α con probabilidad de error o bien con la probabilidad de error en la decisión, por lo que la probabilidad de error se considera la misma, sea o no cierta la hipótesis nula y sea cual sea la decisión tomada. (Interpretaciones I₁₁ e I₁₂).

- Confusión de α con $1-\alpha$, que supone la confusión con la probabilidad del suceso contrario al dado. (Interpretación I₁₃).

CONCLUSIONES

En este trabajo se han descrito los resultados de un estudio exploratorio sobre la interpretación dada por alumnos universitarios al nivel de significación de un contraste estadístico de hipótesis. En el análisis de las respuestas de los alumnos a las preguntas planteadas se ha puesto de manifiesto la existencia de una gran diversidad de errores sobre este concepto, que hemos descrito de una manera sistemática y que es necesario tener en cuenta en una adecuada planificación de la enseñanza del mismo. Como afirma Borassi (1987), (pag.7), "los errores pueden ser usados como recurso motivacional y como punto de partida para la exploración matemática creativa, implicando actividades valiosas de planteamiento y resolución de problemas".

Sin embargo el estudio es exploratorio y el tamaño de la muestra limitado, por lo que es difícil prever la extensión que estos errores pueden tener en una población más amplia de estudiantes y la variabilidad respecto a distintos enfoques dados a la enseñanza del tema. Como indica Brousseau (1983) la investigación didáctica debe profundizar en las posibles causas de los errores, identificando aquellos que tengan un carácter sistemático y puedan ser indicativos de la existencia de obstáculos en el aprendizaje matemático. Un primer paso en este estudio para el tema concreto del nivel de significación viene dado por el análisis que hemos realizado y que pone de manifiesto la complejidad de esta noción matemática y la necesidad de este tipo de análisis que deben también contribuir a empañar la ilusión de transparencia con la que, a veces, se planifica la enseñanza del tema.

REFERENCIAS:

Birnbaum, I. (1982). Interpreting statistical significance. *Teaching Statistics*, 4, 24-27.

Borassi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, 7, 3, 17-28.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2.

Diaconis, P. y Freedman, D. (1981). The persistence of cognitive illusions. *The behavioral and brain sciences*, 4, 333-334.

Falk, R. (1986). Misconceptions of statistical significance. *Journal of structural Learning*, 9, 83-96.

Vallecillos, M. A.; Batanero, M. C. y Godino, J. D. (1992). Student's understanding of the significance level in statistical test. *Actas del XVI Congreso de Psychology of Mathematics Education, (XVI PME)*. New Hampshire. U.S.A.

AUTOAPRENDIZAJE DE LOS CONCEPTOS BASICOS DEL ALGEBRA LINEAL UTILIZANDO SOFTWARE REALIZADO EN AUTHORWARE PROFESIONAL

*Maria Joaquina Berral Yerón
E.U. Politécnica. Universidad de Córdoba*

La enseñanza del Algebra lineal tiene a mi juicio unas características y unos problemas clásicos como veremos más adelante, entre los problemas cabe destacar el que se refiere a las dificultades de los alumnos procedentes de F.P. (que suelen ser un 30% del total); para intentar paliar este problema, utilizo programas realizados en el lenguaje Authorware de Macintosh que posteriormente describiré.

CARACTERISTICAS Y PROBLEMAS CLASICOS DE LA ENSEÑANZA DE ESTA MATERIA

a) Contenidos matemáticos sin mucha aplicación inmediata a la técnica pues muchas de las aplicaciones pertenecen a asignaturas de tercer curso de carrera como por ejemplo, estudio de valores y vectores propios de una matriz, fundamental en la asignatura de Cinemática y Dinámica de Máquinas, cursada en tercer curso de ingeniería técnica. Este hecho da lugar a una falta de interés por parte de los alumnos que al ser técnicos quieren ver la aplicación de lo que le estás enseñando.

b) Metodología clásica, es decir, exposición por parte del profesor, los alumnos copian apuntes y despues se examinan.

c) Cursos numerosos, una media de 100 alumnos por curso , hecho que repercute en :

- Dificulta la participación activa del alumno en clase.
- Es casi imposible trabajar en grupos.
- Es muy difícil conocer a todos los alumnos para ver sus progresos en la materia....

d) Errores en conocimientos previos referentes a conceptos básicos:

- División por cero, sobre todo si está un poco disfrazada, por ejemplo cuando en el denominador aparece un parámetro.
- Producto de dos ecuaciones igualadas a un número distinto de cero se resuelve igualando a ese número cada una de las ecuaciones.
- El concepto de aplicación está fundamentalmente asociado a funciones reales de variable real, con el consiguiente problema en caso de trabajar con otros conjuntos, por ejemplo espacios vectoriales.
- Problemas de generalización o modelización por ejemplo, siempre que se

hable de vectores de un espacio vectorial, para ellos tienen tres componentes, si una propiedad se cumple para los primeros números naturales la dan cierta para todos los números.

- Todas las operaciones estudiadas hasta el momento son conmutativas y en el producto de matrices la siguen utilizando.....
- Tendencia a linealizar.

e) Grandes diferencias de nivel entre alumnos.

- Alumnos de C.O.U.
 - Alumnos que han suspendido selectividad y utilizan estas asignaturas para prepararse para el curso siguiente la selectividad.
 - Alumnos de F.P.
 - Alumnos que trabajan en empresas y necesitan el título
- Ante esta situación puede establecerse entre otras, las siguientes

Posibles alternativas

a) Desde el punto de vista matemático:

- Se puede ir incorporando en los contenidos matemáticos aplicaciones a la técnica, poniéndonos en contacto con los profesores de las distintas materias y poniendo ejemplos de aplicación siempre que sea posible, con esto podremos conseguir un poco de motivación del alumnado.

- Introducir métodos numéricos del álgebra lineal, sustituyéndolos en caso de ser necesario (falta de tiempo) por los métodos clásicos, los cuales suelen necesitar muchas más operaciones.

b) Desde el punto de vista metodológico:

- Pocas variantes debido al número de alumnos
- No se puede trabajar en grupo.
- Se pueden hacer muy pocas puestas en común.
- No se pueden dar pequeños trabajos de investigación.
- De vez en cuando se pueden comentar artículos de prensa (normal o científica) a modo de divulgación y al trabajar en clase con los artículos se rompe un poco la dinámica y se favorece la relación.
- Uso de transparencias, no sustitutorias de la exposición sino como centro de atención de un tema, o como recordatorio de conceptos a utilizar, o como esquema de una demostración que se realizará en pizarra...

- Dar unas relaciones de problemas no resueltos pero sí con indicaciones para resolverlos.

c) Para hacer conscientes a los alumnos de los errores más comunes que suelen cometer y por tanto intentar solucionarlos, se pueden mostrar los errores más comunes detectados en cursos anteriores desde el primer día, pero haciendo que ellos encuentren el error en distintos razonamientos donde se hayan cometido.

d) Para solucionar el problema de las diferencias de nivel, se pueden pensar en varias alternativas:

- Seminarios, pero el alumno ya se encuentra cargado de clases y si queremos que aprenda conceptos de forma más rápida, lo que no podemos hacer es agobiarlo con más clases que siguen el mismo esquema que las clases normales.

- Utilizar las horas de tutoría para una enseñanza más personalizada, pero eso no lo permite el número de alumnos y además hace que el profesor repita muchas veces los mismos conceptos, lo cual lleva al aburrimiento del profesor y el concepto lo transmite con poco interés y motivación.

- Hay que ofrecerle algo nuevo y que no tenga los inconvenientes de las dos soluciones anteriores; las nuevas tecnologías pueden ser la clave, puesto que evidentemente son "algo nuevo" y es posible que reduzcan la dependencia profesor-alumno, por tanto la decisión había que tomarla entre utilizar programas ya diseñados o diseñar software específico para solucionar el problema expuesto; la solución se encaminó en diseñar un programa en lenguaje Authorware, que a riesgo de no ser potente en cálculo, incidiese más en los aspectos de comprensión de conceptos.

Decido empezar por MATRICES (M) por las siguientes razones:

- En F.P. es uno de los temas que no se trabaja o que se estudia muy poco, los alumnos de B.U.P. lo estudian en C.O.U.

- Es un concepto que se necesita en la asignatura de álgebra lineal desde el primer momento.

- Es un concepto que apenas necesita conocimientos previos.

¿QUE CARACTERISTICAS DEBE TENER EL PROGRAMA?

- Debe permitir a cada usuario seguir su propio camino.
- Entendemos que debe ser un programa que no sustituya al libro de texto.
- Debe servir para mejorar en el aprendizaje de conceptos.
- Debe ser lo más interactivo posible.

Desarrollo del programa

He de señalar que el objetivo del programa (M) no es su utilización para operar con matrices, el objetivo es enseñar a operar con matrices.

M está dividido en cuatro grandes temas que aparecen en el Menú principal:

- Tema 1, Definiciones generales
- Tema 2, Operación suma de matrices
- Tema 3, Operación producto de un escalar por una matriz
- Tema 4, Producto de matrices.

El esquema del TEMA 1 es principalmente teórico, un alumno no puede trabajar con matrices sin saber previamente una serie de definiciones básicas, después de algunas de estas definiciones se propone algún ejercicio sencillo para ver si el alumno ha asimilado la definición dada.

Los TEMAS 2 y 4 tienen el mismo esquema dentro del programa. Comienzan con definiciones propias del tema, ejemplos, prácticas y propiedades de la operación tratada. Las propiedades llevan incorporados unos ejercicios que pretenden hacer que el usuario asimile la propiedad, en caso de que dichos ejercicios no los sepa resolver, se recomienda volver hacia atrás y comprender mejor los conceptos.

El esquema del TEMA 3 es similar al de los temas 2 y 4, pero en el apartado de las propiedades, por ser estas más simples, no se propone un ejercicio de cada una de ellas, sino una vez vistas las propiedades, hay ejercicios en los que se utilizan las propiedades.

En estos tres temas existe un apartado de práctica general, en dicho apartado el alumno puede elegir los órdenes de las matrices con las que desea trabajar, así como los datos de esas matrices; se ha limitado el orden para la suma y producto de un escalar por una matriz a ($n \leq 6$ y $m \leq 6$) y para el producto de matrices ($A_{n \times m}$, $B_{m \times p}$, $n \leq 6$, $m \leq 6$ y $p \leq 4$). La limitación de los órdenes no supone ningún problema, puesto que para aprender a operar con matrices con esos tamaños es más que suficiente, y como ya se ha dicho el objetivo no es que el programa haga operaciones entre matrices, el objetivo es que el programa enseñe a operar con matrices.

Los ejercicios que se proponen al alumno no son elegidos al azar, son el fruto de años de experiencia y se ha intentado proponer ejercicios que corrijan los errores más comunes que se cometen cuando se trabaja con matrices.

A lo largo del programa se le plantean al usuario muchas cuestiones, algunas de ellas admiten distintos tipos de respuestas, como es imposible pensar todas las posibles respuestas que el usuario puede dar, en muchos casos se ha optado por ofrecer distintas posibilidades y que el usuario escoja la que crea correcta; para evitar que sea el azar el que le haga contestar correctamente, normalmente detrás de esa pregunta se le efectúa otra que puede hacerle pensar sobre lo contestado anteriormente.

Una vez finalizado el tema de matrices, pensé que este podría ser un buen método para el aprendizaje de parte de la asignatura de álgebra lineal, y por tanto decidí ampliar el programa con los siguientes puntos:

1.- Matrices

2.- Rango de una matriz

3.- Sistemas de ecuaciones lineales

4.- Determinantes

5.- Matrices inversas

Rango consta de cinco partes en su menú principal

- Definición.
- Operaciones elementales.
- Cálculo del rango por operaciones elementales.
- Ejemplos.
- Ejercicios.

Las operaciones elementales se utilizarán después en el cálculo de determinantes, inversas y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, pero quedan explicadas y es de esperar que asimiladas y comprendidas en el tema de rango.

En el apartado de ejemplos, el usuario podrá elegir hacer ejemplos introduciendo el orden de la matriz (se ha limitado a matrices como máximo de orden 5×5) así como los datos, en caso de no querer, el ordenador los toma aleatoriamente, eso significa que se podría utilizar los ejemplos para calcular rangos de matrices concretas, pero es fundamental insistir en el hecho de que estos programas no se deben utilizar para calcular rangos (aunque los calculan) puesto que no son rápidos en operar y además al trabajar con decimales acumulan errores de cálculo que para rangos no son significativos, pero sí para inversas, determinantes y sistemas; se deben usar para aprender a calcular y assimilar los conceptos.

FORMA DE UTILIZAR ESTOS PROGRAMAS

Cuando el usuario trabaja con este programa, tiene en todo momento en la parte superior de la pantalla un menú Pulldown que consta de los siguientes apartados:

 **File** **Ficheros** **Notas** **Índice** **Control** **Ayudas**

En **Manzana** () lo más importante para el usuario es que tiene una calculadora que puede utilizar en cualquier momento de la ejecución del programa y así evitarse errores numéricos.

File, permite la salida de la ejecución del programa sin almacenar ninguna nota, si el usuario quiere almacenar sus propias notas o sacarlas por impresora, tendrá que utilizar para abandonar el programa la opción Ficheros, la cual permite almacenar las notas propias de un usuario en su propio fichero de notas para una futura utilización y también permite sacar las notas por impresora.

En **Notas** el usuario puede escribir, almacenar, guardar, leer ...sus propias notas que le pueden ser de ayuda a la hora de assimilar los conceptos aprendidos.

En **Índice**, aparece el índice completo del programa (si está en M aparecerá el índice de las operaciones y propiedades, si está en Rango aparecerá el índice del

tema de rango...). Haciendo click sobre el apartado escogido, el programa se irá directamente a dicho apartado y el usuario podrá trabajar con él; con esta utilidad el usuario en caso de no saber que hacer, podrá desbloquearse pues en todo momento podrá ir al lugar deseado.

En **Control**, el usuario puede ver siempre que quiera el número de respuestas acertadas correctamente al primer intento, el número de respuestas erróneas....

En definitiva, todas estas ayudas al usuario que se encuentran en el menú Pulldown, se explican al usuario en **Ayudas**.

Si el usuario está en M en la esquina inferior izquierda de la pantalla aparece siempre un *Ir menú*; cuando el usuario teclea sobre *Ir menú*, el programa volverá directamente al menú principal. Es muy interesante esta utilidad, con ella el usuario nunca se queda bloqueado pues puede desbloquearse volviendo al menú principal y desde ese punto ir al lugar deseado. (En rango aparece MenúR, en sistemas MenúS...)

BIBLIOGRAFIA

Manual de Authorware Profesional
Torregrosa, J,R, y Jordan Lluch, C.: Algebra Lineal y sus aplicaciones.
Schaum 1987.

ASPECTOS SINGULARES SOBRE LA DEMOSTRACION EN MATEMATICAS

Martín, C. y Ortega, T.
Dpto. Análisis Matemático y Dca. de la Matemática
Universidad de Valladolid

DESCRIPCION DEL PROBLEMA

Pretendemos indicar otra forma de construir matemáticas en la creencia que la aridez de su contenido puede ser más asequible para los alumnos. Como en la demostración de ciertos teoremas se encuentran muchas de las técnicas que se usan en la resolución de problemas y estas son repetitivas, si somos capaces de conseguir que los alumnos entiendan y reproduzcan esas técnicas, habremos alcanzado dos metas importantes: por una parte, se darán cuenta de que no es una materia tan difícil y, por otra, la destreza en el uso de estas técnicas les dará un potencial enorme par abordar con éxito la tarea de resolución de problemas.

MARCO TEORICO

Como punto de partida consideramos la definición metamatemática de demostración dada por S.C. Kleene: ([08], pag.83)

"1. Si D es un axioma, entonces D es demostrable. 2. Si E es demostrable y D es una consecuencia inmediata de E, entonces D es demostrable. 3. Si E y F son demostrables y D es una consecuencia inmediata de E y F, entonces D es demostrable. 4. Un enunciado es demostrable sólo según lo requerido por 1-3."

Esta definición no es la más apropiada para dar al alumno esquemas de trabajo que le proporcionen estrategias de razonamiento para abordar con éxito la resolución de problemas. Por ello consideramos más adecuado el sentido expresado por Godement, Lakatos, Polya, ...

" Un texto matemático es perfectamente correcto cuando ha obtenido el grado de claridad y rigor que se ha encontrado siempre en aritmética elemental ([07], pag. 31)."

"Lo que quiero es hacer matemáticas y no estoy interesado en las dificultades filosóficas de la justificación de sus fundamentos ([09], pag. 73).

"**Reglas de descubrimiento.** La primera de estas reglas es ser inteligente y tener suerte. La segunda es sentarse bien tieso y esperar la ocurrencia de una idea brillante ([11], pag. 186).

METODOLOGIA

La que proponemos tiene tres etapas: en la primera se hará una exposición general participativa del tipo de demostración y de uno o dos ejemplos apropiados; en segundo lugar, se realizarán seminarios de trabajos en equipo en los que, después de enunciar el problema a tratar y dar las indicaciones oportunas de tipo general, el profesor ayudará a los alumnos a resolver las dificultades que aparezcan durante la sesión; finalmente, se encargarán tareas apropiadas para cada uno de los grupos de trabajo. La evaluación se hará proponiendo la resolución de cuatro problemas de grados de dificultad diferentes, disponiendo del material elaborado en clase.

ALGUNAS TECNICAS DE DEMOSTRACION

Exponemos las más usuales.

Demostración deductiva: Es la que más se asemeja al concepto formal de demostración y consiste en deducir una tesis T , partiendo de unas hipótesis H mediante una cadena de enunciados establecidos.

1. Teorema del resto. El resto que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ por $x-a$ es $P(a)$ [04], pag. 126. (En los libros nuevos de BUP no aparece demostrado y en la Universidad no se estudia).

2. T. de d'Alembert-Gauss es algebraicamente cerrado. ([07], pp. 502, 753-754. Usa propiedades de funciones continuas). Todo polinomio no constante con coeficientes complejos posee al menos una raíz compleja ([03], pp. 89-90; Usa el T. de Liouville "toda función holomorfa acotada en todo el plano es constante").

3. Teoremas fundamentales del Cálculo integral: 1º. Si f está acotada y es integrable en $[a,b]$, entonces la función F definida por $F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a,b]$ es continua en $[a,b]$, y además, es derivable en los puntos "c" donde f es continua y $F'(c) = f(c)$. 2º. Si f es acotada e integrable en $[a,b]$ y existe una función F tal que $F' = f$ en $[a,b]$, entonces $\int_a^b f(x) dx = F(b) - f(a)$.

Demostración gráfica: Se deduce observando un dibujo apropiado.

1. Teoremas de Pitágoras y del ángulo inscrito.
2. Potencia de una circunferencia respecto de un punto.
3. Dados una circunferencia y un punto exterior, existen dos rectas que pasan por el punto y son tangentes a la circunferencia. Esta demostración es constructiva y puede aplicarse al trazado de las tangentes comunes a dos circunferencias exteriores.

No se debe incurrir en errores, tomando por demostraciones ciertos modelos gráficos que no se ajustan a la realidad.

1. Si $0 < a < e^{-e}$ funciones $\log_a(x)$ y a^x coinciden en tres puntos, [13], pp. 60-70.
2. $y=x$ e $y=\tan(x)$ sólo se cortan en $(0,0)$, $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.
3. Las gráficas de $y=\sin(x)$ y su polinomio aproximante óptimo de grado 2, aparentemente, coinciden en $[0,\eta]$.

Demostración por exclusión: Consiste en ir eliminando una a una todas las posibles soluciones del problema distintas de la tesis.

0. El problema de los cuatro colores. Son necesarios y suficientes cuatro colores para colorear cualquier mapa de cualquier número de provincias que sean regiones conexas.

1. Si un plano corta a otros dos paralelos entre sí, entonces las rectas intersección son paralelas.
2. Si un plano contiene al eje de un cilindro de revolución, entonces le corta en dos rectas paralelas.
3. Si un plano y una recta tienen un sólo punto común, el rango de la matriz de los vectores directores es tres.

Demostración por reducción al absurdo: La tesis T se deduce de las hipótesis H demostrando que la proposición "Si H entonces T " es una tautología. Por otra parte, la proposición anterior es equivalente a la condicional "Si H y $\neg T$, entonces R y $\neg R$ ", donde R es una proposición cualquiera y como R y no R es siempre falso (absurdo) H y $\neg T$ tiene que ser falso y como H es verdad por conformar las hipótesis $\neg T$ tendrá que ser falso y por lo tanto T verdad.

1. Si $f: [a,b] \rightarrow R$ es continua, entonces f alcanza el máximo y el mínimo en un punto de $[a,b]$. (T. de Weierstrass)
2. El conjunto de números primos es infinito. Negando la tesis T , se obtiene T y no T (caso particular para $R=T$).
3. La raíz cuadrada de cualquier natural no cuadrado perfecto es irracional (igual que antes).

Demostración por un contraejemplo: Consiste en exponer un ejemplo que manifieste la falsedad del enunciado.

1. Toda función integrable Riemann en un intervalo $[a,b]$ tiene una primitiva en $[a,b]$. [06], pag. 650.
2. Toda función que tiene una primitiva en un intervalo $[a,b]$ es integrable Riemann en $[a,b]$. [06], pag. 650.
3. El límite puntual de una sucesión de funciones integrables es integrable [12], pp. 607-615.
4. Si $f+g$ es una función continua en $x=a$, entonces las funciones f y g son continuas en $x=a$.

Demostración algorítmica-posicional: Un algoritmo posicional de cálculo puede, por su claridad, ser útil en alguna demostración.

1. Toda fracción es equivalente a un n° entero, a un decimal finito o a un decimal periódico.

2. Cualquier $n \in \mathbb{N}$ puede escribirse de forma única en base $b \in \mathbb{N}$.

3. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica ($a_1 \cdot (1-r)$)

Demostración verificativa: En ciertos teoremas la tesis se establece mediante una simple comprobación.

1. $\mathbb{Z}$ es un anillo ordenado. $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado, etcétera.

2. La suma de la solución general homogénea y de una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea es la solución de esta ecuación diferencial.

3. Si la ecuación característica asociada a una ecuación diferencial homogénea de n -ésimo orden tiene n raíces reales distintas $x_1, \dots, x_n$, entonces la solución general es $c_1 e^{x_1} + \dots + c_n e^{x_n}$ [05], pag. 110.

Demostración referencial: Ocurre, a veces, que ciertas demostraciones son aparentemente muy dispares porque se presentan en contextos diferentes. Un cambio de notación adecuado y una referencia constituyen la demostración.

1. Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$, entonces:

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx,$$

$$\left(\int_a^b [f(x) + g(x)]^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

son las desigualdad de Cauchy-Schwarz y Minkowski, considerando

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

2. Las tres alturas de un triángulo se cortan en un punto. (Las alturas son las mediatrices del triángulo que se obtiene trazando por cada vértice la paralela al lado opuesto.)

3. La aritmética de las funciones continuas y derivables está implícita en la de las funciones que tienen límite.

Demostración implícita: Existen teoremas cuya demostración es inherente a ciertos enunciados que ya han sido expuestos y sólo es necesaria una reflexión sobre los mismos.

1. Una función f tiene límite l en $x=a$ si y solo si existen los límites laterales en $x=a$ y ambos son iguales a l . (Sólo hay que escribir ambas definiciones y ver que ...)

2. Un sistema de p ecuaciones y q incógnitas tiene solución si y solo si los rangos de las matrices de los coeficientes y ampliada coinciden. (Sólo hay que interpretar las columnas de coeficientes y términos independientes como vectores.)

3. $\max(f+g)(x) < \max(f(x)) + \max(g(x))$. (conjuntos numéricos)

Demostración contrarrecíproca: Como $H \rightarrow T$ es equivalente a

$\neg T \rightarrow \neg H$, en ciertos casos se utiliza esta técnica de demostración.

1. Definiendo mediatriz de un segmento como la recta perpendicular en el punto medio, se tiene: Teorema. Si un punto está en la mediatriz de un segmento, entonces equidista de sus extremos. Contrarrecíproco: si un punto no equidista de los extremos de un segmento, entonces no está en su mediatriz.

2. Teorema. La convergencia por sucesiones de f en $x=a$ implica la existencia de límite. (Se prueba que la no existencia de límite en $x=a$ implica la no convergencia por sucesiones [10], pag. 122.)

3. La suma de un n° racional y un irracional es irracional.

Demostración inductiva: Método de inducción matemática, en general, aplicable a toda propiedad que depende de $n \in \mathbb{N}$. No damos ejemplos.

Demostración constructiva: Consiste en expresar de forma explícita una solución del problema planteado.

1. Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe un punto z de (a,b) tal que $f(z)=0$. (T. de Bolzano. La prueba da lugar a la "regla de bisección" para obtener raíces reales aproximadas)

2. Existen cuerpos no conmutativos. (cuerpo de los cuaterniones, [08], pp.101-121).

3. Todo polinomio cuadrático en " n " indeterminadas es una combinación lineal de cuadrados de $q \leq n$ polinomios lineales L.I. en las mismas indeterminadas. (Método práctico de Gauss [02],)

4. Ortogonalización de Schmidt, Interpolador de Lagrange, ...

BIBLIOGRAFIA

1. Appel, K & Haken, W. *Every Planar Map is Four Colorable*. American Mathematical Society. Providence - Rhode Island, 1989.

2. Cagnac, G y otros. *Géométrie*. Mason & Cia. París, 1967.

3. Cartan, H. *Teoría elemental de funciones analíticas de una o varias variables complejas*. Selecciones científicas. Madrid, 1968.

4. Caruncho, J. y otros. *Matemáticas BUP 1*. Santillana, S.A. Madrid, 1985.

5. Elsgoltz, L. Ec. *diferenciales y cálculo variacional*. Mir, Moscú 1969.

6. Fischer, E. *Intermediate Real Analysis*. Springer-Verlag. New York, 1983.
7. Godement, R. *Algebra*. Técno, S.A. Madrid, 1967.
8. Kline, M. *Matemáticas en el mundo moderno*. Blume. Madrid, 1974.
9. Lakatos, I. *Pruebas y refutaciones. Lógica del descubrimiento matemático*. Alianza Editorial (A. Universidad), Madrid, 1987.
10. Malik, S.C. *Mathematical analysis*. Wiley Eastern Limited. New Delhi 1982.
11. Polya, G. *Como plantear y resolver problemas*. Trillas, Madrid, 1990.
12. Spivak, M. *CALCULUS. Cálculo infinitesimal*. Reverté, S.A. Barcelona, 1970.
13. Vavilov, V. *Problemas con parámetros*. Universidad M.V. Lomonosov, Moscú, 1990.

MESA 4: MATERIALES Y RECURSOS

VARIABLES EN LA ELECCION DE MATERIAL MANIPULATIVO

Carlos Maza Gómez
Dpto. de Dca. de las Ciencias
Universidad de Sevilla

CREENCIAS Y REALIDAD

Desde la introducción de los materiales manipulativos en el aula y, particularmente, con el impulso que tomaron a partir de la introducción de la llamada Matemática Moderna, se han ido formando entre el profesorado una serie de creencias: Primero, que su utilización en la enseñanza de las Matemáticas es conveniente, sobre todo a edades tempranas. Esto ha sido corroborado por la investigación (Suydam e Higgins 1977). Segundo, que la utilización de materiales es garantía de un aprendizaje activo. Esto último es cuestionable por cuanto, dependiendo de la metodología de su uso, el aprendizaje con materiales puede llegar a rutinizarse.

Frente a estas creencias la realidad muestra un aspecto diferente. Tras observar 65 aulas de Preescolar y 63 correspondientes al Ciclo Inicial, pudimos constatar que la tercera parte de las primeras y las tres cuartas partes de las segundas no utilizaron, durante el período de observación (seis semanas), material manipulativo alguno. De entre los utilizados destacan los bloques lógicos y los puzzles, que superan el 50% de presencia en las de Preescolar, las regletas Cuisenaire y los dominós, que superan el 20% en el mismo nivel. En el Ciclo Inicial la situación es más desoladora, por cuanto sólo los bloques lógicos están presentes en más del 10% de las aulas.

Parece existir entonces una contradicción entre las creencias y la realidad, que revela la existencia de una serie de obstáculos ante los cuales la Didáctica de las Matemáticas debe intentar dar una respuesta.

OBSTACULOS Y NECESIDADES

1) Los profesores observados, en general, parecían carecer de la preparación necesaria para utilizar el material, del conocimiento técnico de sus posibilidades y situaciones a las que aplicarse.

2) El problema fundamental, sin embargo, residía en su actitud de desconfianza hacia el empleo de materiales, por los "problemas de disciplina" que acarreaba.

Tanto el aspecto técnico como de formación metodológica en el uso de materiales plantean una necesidad práctica: La de que la instrucción de los futuros profesores o en reciclaje aborde frontalmente esta cuestión.

No obstante, queremos señalar unas necesidades de fundamentación teórica que subyacen a toda esta problemática:

1) Dado que no todo material sirve para cualquier situación, es necesario aclarar cuáles son los criterios para la elección del mismo y su aplicación a un tipo determinado de situaciones.

2) Es preciso estudiar cuál es la metodología más adecuada para la utilización en el aula de Matemáticas del material.

LA NOCION DE TRANSPARENCIA

En los años sesenta, el objetivo de la introducción de materiales era el de asegurar mediante un proceso (la abstracción) el aprendizaje de conceptos matemáticos. Este objetivo, actualmente, ha cambiado. Se trata ahora de asegurar mediante los conceptos necesarios la realización de un proceso (el de resolución de problemas). ¿Qué papel cumplen en esta tarea los materiales manipulativos?. No se trata tanto de que el niño abstraiga propiedades matemáticas (aunque es importante) como que pueda construir con tales ayudas un problema análogo al que se le plantee, que sepa resolverlo y aplicar lo descubierto al problema original. En este sentido, la principal virtud de un material será la de "hacer ver" los elementos del problema planteado. En el caso aritmético, por ejemplo, el alumno debe "ver" a través del material las cantidades numéricas, las acciones que han de ejecutarse sobre ellas y la equivalencia de estas acciones con el resultado final.

Esta característica de "hacer ver" se conoce como "transparencia" de la representación utilizada, en este caso manipulativa (Hiebert 1988). Así pues, el material manipulativo más conveniente es aquél que sea más transparente respecto a los elementos del problema original, aquél que muestre, en mayor grado, su analogía con los elementos del problema. Planteado en estos términos, el problema de una adecuada elección de material se reduce al de determinar las variables que intervienen en la transparencia del mismo.

VARIABLES QUE INFLUYEN EN LA TRANSPARENCIA

Consideremos un problema habitual en una clase de primer curso de Primaria: "Enrique tiene siete canicas al principio de la tarde. Luego gana cinco canicas. ¿Cuántas tiene al final?". Si elegimos un material como las regletas Cuisenaire, el carácter discreto de la magnitud no queda reflejado y, por ello, será necesario traducir las regletas a números (la blanca es el 1, la

roja es el 2, etc.). Este carácter discreto es más transparente si utilizamos fichas, garbanzos o similares. Las acciones de "juntar, añadir, cambiar" propias de este problema se verán con más claridad a través del material multibase, por ejemplo, que con una máquina operadora de Dienes (si ésta oculta el cambio realizado). La transparencia de la acción sería considerablemente menor en otro material como la balanza numérica. De estas observaciones se puede deducir la primera variable que influye en la transparencia de un material:

1) Las propias características del material actúan como un filtro en el momento de reflejar las propiedades, atributos y relaciones propias de los elementos del problema original.

Es necesario sostener, además, que la analogía es construida con una intencionalidad (Holyoak 1985) que condiciona su utilización. Además, es construida por una persona que le dota de significados adicionales (Lesh 1987). Todo ello lleva a que deban considerarse distintas variables que afectan a la transparencia del material y que tienen su fuente en los factores humanos del que construye la analogía (el alumno) o del que induce a construirla (el profesor).

En general, es preciso tener en cuenta si los términos del problema original tienen sentido para el alumno. Si no fuera así, la transparencia o no del material sería cuestión secundaria. Por ello, todo factor que intervenga en dotar de sentido al problema afectará decisivamente la cuestión de la elección del material más transparente. Este es el caso del propio contexto del problema planteado. Hay niños que, a los seis años, pueden no haber tenido contacto con el juego de las canicas. Puede que Enrique sea un niño conocido en clase por no jugar a las canicas o ser muy torpe con ellas. El hecho de plantear que gane priva de cierto sentido a los términos del problema. Por otro lado, la experiencia que haya tenido el alumno con sumas de resultado superior a la decena afectará decisivamente a la transparencia de la equivalencia entre la acción y el resultado final. En este sentido, el material multibase sería más transparente que un conjunto de fichas. Así, la segunda variable a considerar es:

2) La adecuación del material a las experiencias previas del alumno.

Las experiencias previas del alumno, en relación con las de otros alumnos y demás agentes sociales (adultos, prensa, televisión, etc.), crean unos significados sociales a las acciones que realizan conjuntamente y que deben ser considerados. Por ejemplo, es posible observar entre los niños que diez canicas "españolas" (las más comunes) equivalen a una canica "pirata" (negra). Ello puede hacer que las fichas (sobre todo si son de colores semejantes) resulte un material más transparente que el multibase pese a que, estructuralmente, éste pueda parecer más adecuado. Es, por tanto, necesario considerar una tercera variable:

3) La adecuación del material a los significados sociales de los elementos del problema.

El problema planteado no existe de esta manera en la realidad. Hasta

llegar al aula, la situación que intenta recrear ha sido recreada por el profesor de varias maneras. En primer lugar, ha tenido la intención de presentar un problema resoluble por la suma. Para un alumno de primer curso de Primaria éste puede ser, en realidad, un problema de cambio, con una secuencia y sujeto a una estrategia de resolución determinadas. Esta discrepancia no afectaría tanto a este problema como a otros (de combinación y, sobre todo, de comparación) menos usuales.

Por otro lado, el profesor prescinde de características que considera irrelevantes: Dónde se juega a las canicas, si se juega con canicas pequeñas o grandes, qué clase de juego de canicas se practica, etc. Estas características pueden ser importantes para el niño, sobre todo si entiende del asunto. Es conocido que, a edades tempranas, la analogía entre dos problemas se construye en base a sus características estructurales pero también considerando otras más superficiales (Holyoak 1985). Así, las fichas son redondas, los garbanzos son aproximadamente esféricos. En cambio, los cubitos del material multibase no muestran el mismo parecido respecto a las canicas.

Podemos observar entonces la necesidad de considerar una cuarta variable en la transparencia de un material, y no la menos importante:

4) La capacidad del material de hacer ver, sin detrimento de otras variables, las intenciones educativas del profesor.

En conclusión, la transparencia con que un material refleja el problema original análogo viene determinada por:

a) La capacidad de este material para hacer ver las propiedades, atributos y relaciones propios de los elementos de este problema original.

b) La capacidad para reflejar los significados adicionales con que los agentes sociales construyen la analogía (experiencias previas, significados sociales, intenciones educativas).

Con esta fundamentación es más fácil abordar con rigor la elección del material más adecuado para una situación didáctica determinada.

BIBLIOGRAFIA

HIEBERT, J. 1988: "A theory of developing competence with written mathematical symbols". *Educational Studies in Mathematics*, 19, 333-355.

HOLYOAK, K.J. 1985: "The pragmatics of analogical transfer". *Psychology of Learning and Motivation*, 19, 59-87.

LESH, R. 1987: "The evolution of problem representations in the presence of powerful conceptual amplifiers". En Janvier, C.: "Problems of representation in the teaching and learning of Mathematics". Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey.

SUYDAM, M.N. e HIGGINS, J.L. 1977: "Activity-based learning in Elementary School Mathematics: Recommendations from research". ERIC. Columbus, Ohio.

ALGEBRA Y JUEGOS EN LA E.S.O.

Joaquín Giménez

Facultad de Educación. Universidad de Tarragona

INTRODUCCION

La reflexión y propuestas presentadas parten de los trabajos realizados con diversos profesores y alumnos de E.S.O. desde 1983 y nuestra propia experiencia docente desde 1976. En un primer bloque de experiencias realizadas indicamos un trabajo de introducción en el antiguo 7º EGB (Giménez y Gr. Anoya 1986), con un acento en elementos de interrelación geometría-fracciones-álgebra (Giménez 1987). En una primera propuesta metodológica se incidió con mayor profundidad en el uso de diversos lenguajes y el diseño de interacciones entre ellos (Giménez 1987), más adelante en el diagnóstico en el contexto de la Formación Continua del Profesorado (Giménez 1992), desembocando ahora con la utilización de elementos multimedia mediante el uso de juegos abiertos (Giménez 1993) e integrando esos diversos principios en un Proyecto más amplio de materiales (Alsina, Fortuny, Giménez 1992, 1993).

EXPERIENCIAS REALIZADAS

Nuestras experiencias más próximas, paralelas a las del Grupo Azarquiel (1990) han ofrecido un diseño multifuncional que, atendiendo a la diversidad, basen buena parte del trabajo en la utilización de materiales y juegos de diversos tipos. Los juegos se organizan en base a los principios siguientes: atención a la diversidad, niveles de razonamiento propuesto, funcionalidad, integración y uso como evaluación.

La propuesta didáctica plantea la integración de los juegos, materiales y actividades en general en la relación gráfico-algebraico-funcional que nunca debe olvidarse, la atención a los diversos elementos que se implican en el uso de lenguaje algebraico y la idea de variable (en el sentido de Booth 1985) siguiendo los muy diversos trabajos de Filloy, Kieran y Rojano hasta la fecha que ahorro comentar.

Las actividades generales se agrupan en bloques, atendiendo a niveles de dificultad siguiendo el principio que el trabajo algebraico tiene su momento fuerte en el segundo Ciclo de la E.S.O. y no antes. Sin que ello implique que no se hayan significado experiencias anteriores incluso en la escuela primaria (Giménez 1989). Otro elemento importante es la ligazón con el trabajo con números naturales, sucesiones, etc. como fuente de resolución de problemas. Todo ello con un estilo ecléctico similar -en este aspecto- a las propuestas de los/las colegas del Proyecto 12-16 (Grupo Cero 1988).

En la figura que se muestra a continuación (figura 1) se puede ver un esquema simple de títulos de actividades con su planteamiento correspondiente para los créditos 5 y 7 de la E.S.O. (correspondientes a trabajos aproximadamente para 15-16 años).

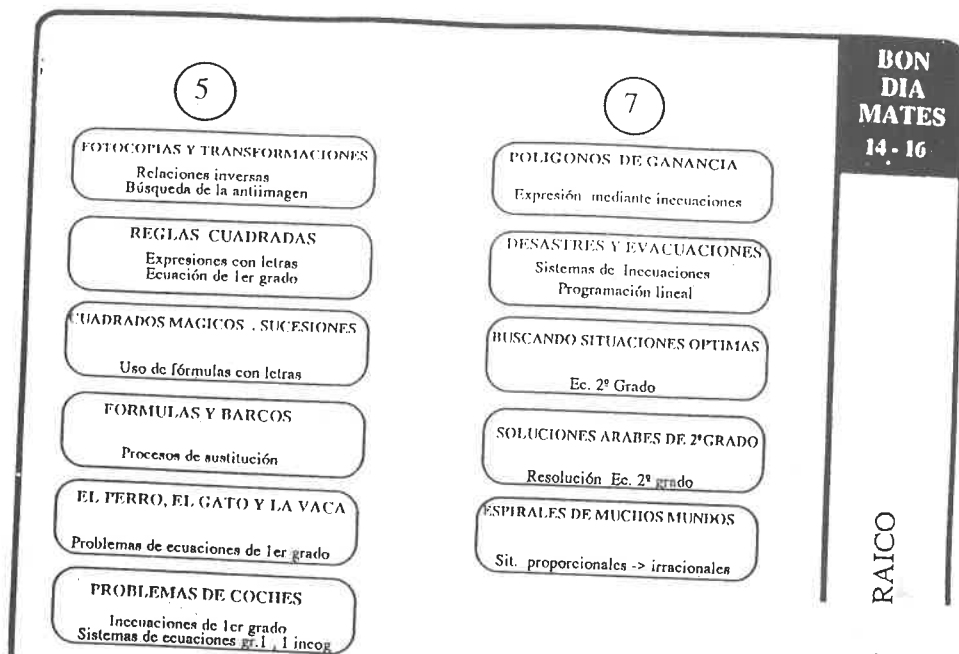


Fig. 1. Algunas actividades del Proyecto BDM 12-16 (Alsina, Fortuny Giménez 1993).

EL ROL DE LOS JUEGOS Y EL MATERIAL

El juego -como ejercicio recreativo con reglas, que se identifica como actividad de entretenimiento o lúdica más que intelectual, comporta diversidad de significados. Desde nuestra perspectiva, consideramos los siguientes: elemento lúdico, elementos de azar, temporalización ilimitada e incorporación curricular subterránea. El juego aporta ilusión incluso cuando se relaciona con el contexto escolar, proporciona un elemento motivacional y de predisposición al trabajo. Además fomenta los procesos de socialización. Aún así, sabemos que nuestra sociedad está promoviendo comercialmente el uso individual del juego. El azar sabemos que ha hecho entrada en el juego, y le proporciona el interés de constante novedad, pues la jugada del contrario es inesperada y provoca siempre reflexiones. El número limitado de movimientos hace que sea posible utilizarlo como instrumento didáctico. El contenido curricular, debería quedar en un segundo término, pues acentúa la

motivación en cuanto esconde lo más posible el contenido asociado. Sólo en el caso de situaciones de consolidación, puede plantearse el contenido (en nuestro caso algebraico) en primer plano.

El material no sólo debe considerarse un apoyo a la representación, sino una representación por sí misma que debe interrelacionarse con las demás (siguiendo un modelo interactivo).

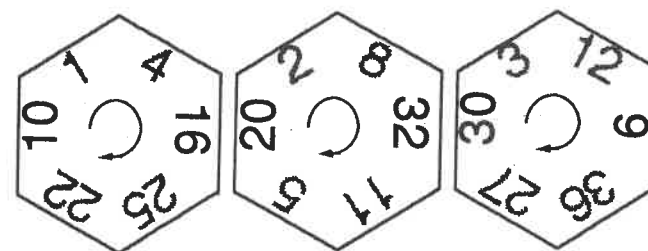


Fig. 2. Hexágonos con secuencias cíclicas que deben identificarse algebraicamente según una regla del tipo $(na + mb)$, donde n, m son números naturales y d, u indica las decenas y unidades del número anterior del ciclo).

ALGUNAS PROPUESTAS SINGULARES

Consideramos importante en los trabajos de introducción, el reconocimiento del valor de la variable y sus diversos significados a partir de experiencias con secuencias finitas en las que hay que encontrar la regla (figura 2) o bien un juego de carreras en que debe sustituirse el valor que saquemos de un dado en la expresión de la casilla correspondiente (figura 3).

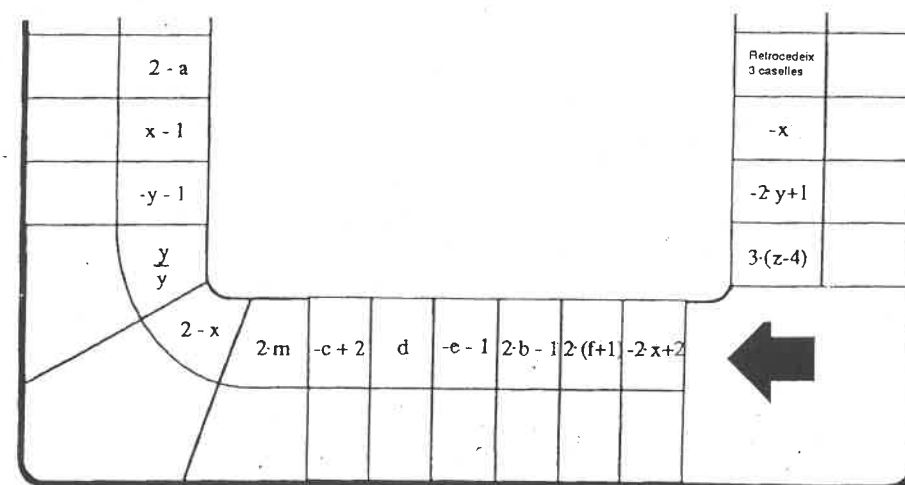


Fig. 3. La carrera de caballos. Una parte del juego.

No prescindimos del ordenador en cuanto al uso de la hoja de cálculo como juego de acción y discusión (Hoyles et al. 1991). Elaboramos materiales en cartulina de tipo abierto en los que pueden variar los tres elementos de una relación: definición, relación algebraica, imagen (explicadas en Giménez 1990). Atacamos el problema de acceder a la ecuación de segundo grado y cómo inciden las variaciones de los parámetros en la ecuación de forma que se fomente la visualización inmediata del proceso después que el ordenador haya podido servir para su introducción y análisis.

También acentuamos en las propuestas el uso de las inecuaciones con igual rango de importancia que las propias ecuaciones. He aquí unas fichas de juego "tipo bingo" con posibles identificaciones de los cambios de representación necesarios en estos casos (figura 4).

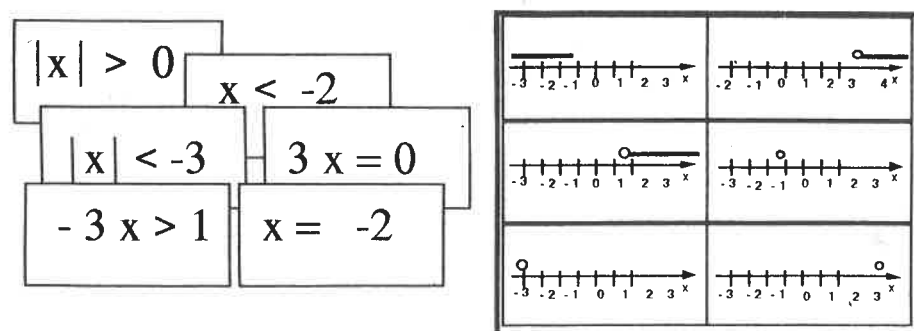


Fig. 4. Bingo de representaciones de inecuaciones lineales.

Se han introducido representaciones diversas del mundo geométrico que son fuente de generalización y algebraización como el uso de puzzles y transformaciones (algunos ejemplos en Giménez 1984) así como para el descubrimiento de propiedades.

En otros casos, los juegos incluso forman parte del proceso de evaluación. Tal es el caso - entre otros- de identificaciones autocorrectivas (fig.5) de ecuaciones equivalentes mediante encajes, etc..

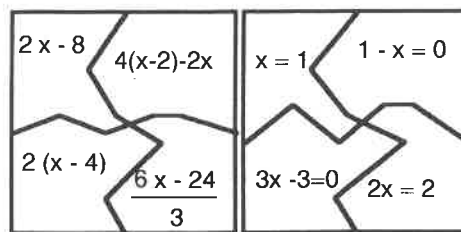


Fig. 5. Fichas autocorrectivas de ecuaciones equivalentes mediante encaje

Otro juego utilizado es la identificación de propiedades en distintas representaciones mediante cartas que indican dichas propiedades (ver figura 6). El objetivo es que, a partir de la identificación, se pueda utilizar cualquier tipo de juego en que el "orden" no sea clave pues las propiedades no implican ningún elemento de ordenación.

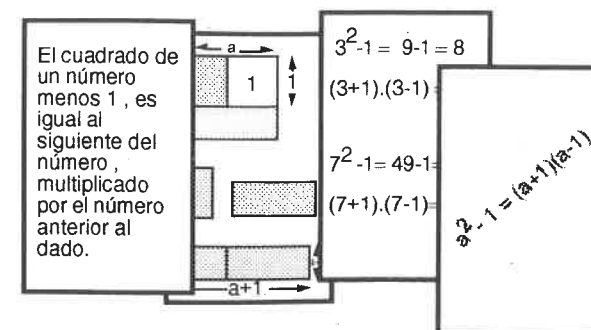


Fig. 6. Cartas que se identifican por ser representaciones diversas de una misma propiedad. Forman parte de un juego con 12 cartas y 4 palos esas características.

Un elemento más que ha sido utilizado en nuestras experiencias ha sido el uso del juego multimedia, cual es el trabajo con el jueguecito PAR (Arcavi y Nachmias 1989) que ha aportado elementos interesantes a los alumnos noveles.

REFERENCIAS UTILIZADAS

- ALSINA, C, FORTUNY, JM, GIMENEZ, J (1992) *Bondía Mates* 12-14. Generalitat de Catalunya. Barcelona.
- ARCAVI, A; NACHMIAS, R (1989) Familiar concepts with a new representation. in Vergnaud et al.(eds) *Proc. PME 13*, Paris, pg. 77-84.
- AZARQUIEL, Grupo (1990) *Ideas y recursos para el aprendizaje del álgebra*. Síntesis. Madrid.
- BROUSSEAU, G (1986) *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse. Univ. Bordeaux. Existe una traducción del 1er capítulo en el Dep. Matemàtiques de la Univ. Zaragoza.
- CERO, Grupo (1988) *Matemáticas* 12-16. Generalitat Valenciana. Valencia.
- ESTEVE, J i GIMENEZ, J (1992) "Recursos y Materiales" en *Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria*. MEC. Madrid.
- ESTEVE, J i GIMENEZ, J (1986) *Materials del laboratori de matemàtiques*. Dep. Didàctica Matemàtiques i CC Experimentals UAB. Bellaterra.
- FERRERO, L (1990) *El juego y la matemática*. Ed La Muralla. Madrid.
- GAIRIN, JM (1990) Efectos de la utilización de los juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas en *Educación* 17 (1990) UAB. Bellaterra pp. 105-118.

GIMENEZ, J (1984) "Sobre cortes de... papel y algunos sabios" en *Cacúmen* núm. 18. Madrid. pp. 33-35.

GIMENEZ, J i grup ANOIA (1986) *Adquisició del llenguatge algebraic a EGB*. Memòria de investigació no publicada. ICE de l'UPC. Barcelona.

GIMENEZ, J (1987a) Reflexiones sobre el lenguaje algebraico y sus representaciones en la resolución de problemas en la enseñanza obligatoria. *Actas III J.E.M. Thales*. Huelva.

GIMENEZ, J (1987b) "Influencias mutuas entre estudio de las fracciones, lenguaje algebraico y geometría. Reflexiones y experiencias". II Conf. *Interamericana de Educación Matemática*. Actas publicadas por la UNESCO. Santo Domingo.

GIMENEZ, J. (1989) *Un poco de álgebra para la escuela primaria*. Documentos. EUFP-EGB. Burgos.

GIMENEZ, J (1990) *Material manipulativo para el aprendizaje del álgebra*. Dossier Dept. Educació i Psicologia. Univ. Barcelona.

GIMENEZ, J (1992) "Elaboración de un test diagnóstico algebraico en el marco de la formación del profesorado" en *Epsilon* n. 23, pp. 19-38.

GIMENEZ, J (1993a) "Àlgebra i jocs a l'ensenyament obligatori". En *Comunicació Educativa* n.6. Tarragona.

GIMENEZ, J (1993b) *Aprendizagem algebraica. Propostas ludicas*. Univ. Rio Claro. Brasil. Versión castellana disponible per l'autor.

HOYLES, C et al. (1991) "Children talking in computer environments: New insights into the role of discussion in mathematics learning" in *Language in mathematical education*. NFER Nelson. London.

SOCAS, M et al. (1989) *Iniciación al álgebra*. Síntesis. Madrid.

TASKMASTER ed. (1989) *Materials: Dominos algebraics*. Equations. London.

EL MODEM VA A LA ESCUELA

Margarita Marín (Universidad de Castilla-La Mancha),
Carlos Cruz (C.P. Francisco Carrillo. Madrid)
y Antonio España (C.P. Alcalde de Móstoles. Madrid)

El ordenador como instrumento de trabajo o didáctico está entronizado ya en casi todas nuestras escuelas, pero sobre todo en las casas de nuestros alumnos. El modem, ese teléfono personal para que hablen dos ordenadores comunicándose sus cosas, empieza a ponerse de moda fuera de los ambientes puramente informáticos. Y he aquí que llega a la escuela, ¿qué puede hacer un modem en la escuela?, algo fundamental: abrir una ventana al mundo real sin moverse del lugar donde está ubicada expandiendo la comunicación entre docentes y discentes de culturas dispares.

Creemos que el modem llegará a ser un instrumento de trabajo más y necesario en la escuela dentro de unos años. Hoy por hoy estamos en la etapa de la adaptación previa para poder conseguirlo.

La mayoría de nosotros hemos comprobado que cualquier hecho novedoso en el aula atrae poderosamente a los niños y les fomenta su curiosidad hasta que se familiarizan con la nueva situación. El modem nos permite introducir situaciones nuevas constantemente, teniendo a los niños pendientes del hilo telefónico. Esta realidad la hemos utilizado para, de una forma sutil, motivar la investigación en Matemáticas por parte de nuestros alumnos; cómo lo hemos realizado y qué hemos conseguido es lo que narramos en esta comunicación: una experiencia telemática, basada en el correo electrónico, llevada a cabo con alumnos de 6º de EGB de dos escuelas madrileñas. Esta experiencia se realizó gracias al soporte prestado por CLAVIUS, Base de Datos Educacional, en la utilización de su mensajería electrónica.

DESCRIPCION DE LA EXPERIENCIA

A grandes rasgos consiste en un personaje inventado recién llegado a Madrid, solicita la amistad de los niños a través del correo electrónico, entablándose conversaciones en que cuenta anécdotas y plantea preguntas que obliga a investigar por su cuenta en Matemáticas, bien individualmente bien en equipo.

El profesor realiza un papel absolutamente orientativo, facilitando a los niños bibliografía adecuada donde puedan encontrar respuestas. Después que el niño las ha encontrado y está motivado en el tema que planteaba la cuestión, el profesor, en el aula trabaja los puntos que cree conveniente aumentando los conocimientos de los niños.

El correo electrónico nos permitió lanzar preguntas a la vez a dos escuelas emplazadas en extremos de Madrid, y los niños se contestaban e interrogaban entre ellos, enriqueciéndose mutuamente.

La clave de la experiencia está en la realización de los mensajes que va dejando este personaje, ya que tienen que ser a la vez divertidos y serios, comunicativos y exigentes, motivadores y orientativos. Estas preguntas fueron realizadas por el equipo de profesores participantes para que se pudiese obtener el máximo provecho de cada cuestión en el Aula.

Los objetivos que nos propusimos con esta experiencia fueron:

- motivar a los niños a la investigación en el aula,
- enseñar a los niños a buscar y trabajar con bibliografía,
- fomentar el trabajo en grupo y no competitivo,
- poner a los niños en contacto con un "nuevo" medio de comunicación que van a emplear constatemente en el futuro,
- facilitar "la salida" de la escuela, intercambiando opiniones con niños de otras en distintas partes de la geografía,
- habituar al niño a pensar de forma integradora no por compartimentos según la asignatura que toque,
- fomentar la solidaridad y la ayuda entre personas,
- potenciar el estudio de aspectos no convencionales de la matemática.

La experiencia así planteada tiene las siguientes características:

- es socializadora ya que facilita la interacción social entre compañeros proporcionando una adecuada situación para desarrollar el proceso de aprendizaje,
- es diversificadora, permite que cada niño investigue y trabaje a su ritmo dentro de su equipo o individualmente, contestando cuando ya lo tiene preparado y no cuando le mandan.
- potencia un aprendizaje significativo en el alumno, ya que este quiere aprender por estar altamente motivado y realiza los aprendizajes por descubrimiento, siendo el constructor de su propio conocimiento y este aprendizaje es funcional.

En el transcurso de la experiencia además de ampliar sus conocimientos sobre Matemáticas, los niños realizaron importantes aprendizajes informáticos, como son:

- uso de editores para poder escribir los mensajes
- conocimiento y utilización del modem como herramienta de trabajo
- uso de programas de comunicaciones que posibilitan que el ordenador "hable por teléfono"
- uso y manejo de bases de datos de acceso telemático

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

El 1º paso fue motivar a los niños a participar de forma voluntaria. De ello se encargaron los profesores coordinadores en los respectivos colegios. Tal y como suponíamos quisieron participar todos los alumnos de la clase de 6º en ambos colegios. El 2º paso fue preparar informáticamente a estos alumnos enseñándoles a trabajar con el editor, el programa de comunicaciones y la conexión a Clavius. Debido a la expectativa, estos aprendizajes nos llevaron simplemente dos semanas, pudiendo comenzar con la experiencia como tal el 18 de enero de 1993 y con la duración de un mes. Durante este tiempo, los profesores responsables de la experiencia fuimos preparando los mensajes que debía enviar nuestro personaje a los niños y completando la biblioteca de aula, fundamental para la investigación, con los libros que pensábamos eran necesarios y asequibles para su edad y conocimientos.

La forma de trabajo fue la siguiente:

- los lunes y jueves se llamaba a Clavius para enviar el correo con las respuestas y opiniones de los niños y recibir los nuevos mensajes de los niños del otro colegio y/o del personaje clave,
- la llamada de conexión la hacía un sólo alumno, supervisado por el profesor coordinador,
- se imprimía el paquete de mensajes recibidos, se repartía a todos los niños y se comenzaba a trabajar con ellos, dando el profesor las orientaciones oportunas,
- una vez que los niños han obtenido sus respuestas investigando, el profesor las amplía en el camino preacordado por el equipo de profesores,
- el tiempo que dedicaban los niños a la experiencia era de una hora diaria dentro del colegio y, fuera del mismo, un tiempo variable en función de cada alumno concreto.

El personaje inventado decidimos llamarle "**Pies Ligeros**", ya que era un trotamundos que, en su continuo viajar, iba recorriendo lugares entablando siempre amistad con los niños de la zona, contándoles sus anécdotas y vivencias a la vez que les pedía información y opinión sobre una serie de cosas.

Los mensajes dejados por "Pies ligeros" potenciando el estudio de las Matemáticas fueron cuatro, cuyos títulos y objetivos fueron los siguientes:

1º mensaje: Título: Buscando a Lilavati

Objetivo: Este mensaje intenta motivar a los niños en la Historia de las Matemáticas, en concreto en la introducción y evolución del sistema de numeración decimal de origen hindú.

2º mensaje: Título: Cuadrados mágicos

Objetivo: Potenciar el cálculo mental en los niños, motivándolos a trabajar en la resolución de figuras mágicas a raíz del mensaje del personaje.

3º mensaje: Título: Cintas de Möbius

Objetivo: es claro, introducir a los niños en los objetos topológicos, en concreto en el análisis y estudio de las Cintas de Möbius.

4º mensaje: Título: Los apuros del pastor

Objetivo: con este rompecabezas clásico pretendemos introducir a los niños en la resolución de pequeños problemas lógicos, insistiendo fundamentalmente en la utilización de una buena notación para conseguirlo.

A lo largo de la experiencia se generó una interesante colección de mensajes matemáticos y amistosos entre los niños de ambos colegios y el personaje.

La conclusión clara a la que llegamos los responsables de la experiencia es que el uso del modem motivó altamente a los niños, facilitándonos la labor en el aula para trabajar/investigar los aspectos elegidos de las Matemáticas.

BIBLIOGRAFIA

Agostini, F. ; "Juegos de Lógica y matemáticos"; Madrid, Pirámide

Agostini, F. y De Carlo, N.; "Juegos de la Inteligencia"; Pirámide, 1986 Madrid

Armejach, R. y Cemeli, R.; "Tecnologías en el aula"; Cuadernos de Pedagogía nº 197

Bolt, B.; "Divertimentos matemáticos"; Labor, 1988 Barcelona

Carlavilla, J.L. y Fernández, G.; "Historia de las Matemáticas"; 1988 Junta de Comunidades de Castilla - La Mancha

Gardner, M.; "¡Ajá!"; Labor, 1981 Barcelona

Gros Salvat B.; "Psicología cognitiva e informática educativa"; Cuadernos de Pedagogía nº 197.

Grupo Tidoc-Proyecto; "Datos e información"; Cuadernos de Pedagogía nº 197.

I.C.M.I.; "Las Matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90"; Mestral 1987

Langdon, N. y Snape, Ch.; "El fascinante mundo de las Matemáticas"; Limusa, 1989 México

Rodríguez Vidal, R. y Rodríguez Rigual, M.C.; "Cuentos y cuentas de los matemáticos"; Reverté, 1986 Barcelona

PRESENTACION

El Programa d'Informàtica Educativa (PIE) tiene como objetivo primordial proporcionar medios y soporte informático al sistema educativo no universitario. Corresponde al PIE promover el uso del ordenador como recurso didáctico, posibilitar la incidencia de la informática en los currículums y potenciar experiencias en materia de informática educativa.

Dentro del plan de dotaciones promovido por el Departament d'Ensenyament los primeros en ser equipados con ordenadores fueron los centros de secundaria con una media de 8/10 ordenadores por centro y actualmente existe un plan para equipar a los centros de primaria.

LA TECNOLOGIA DE LA INFORMACION Y LAS MATEMATICAS

Una programación que tenga presente las posibilidades ofertadas por la tecnología de la información y en especial por los medios informáticos, ha de modificar las exposiciones de algunos temas, incorporar nuevos contenidos, suprimir otros e integrar las nuevas metodologías.

La potencia de cálculo fue inicialmente uno de los aspectos motores del desarrollo informático. En la actualidad las calculadoras y los ordenadores pueden ejecutar largas manipulaciones y cálculos. No está justificado realizar largas manipulaciones numéricas o cálculos reiterativos manualmente. Debe pues modificarse la importancia de estos en favor del análisis o de la interpretación de los resultados.

La estadística concebida como ciencia se dedica al estudio y análisis de los datos. Es impensable realizar un estudio mínimamente serio, y por tanto la enseñanza de la misma, sin soporte informático.

La incorporación de recursos y gráficos a los ordenadores y al software potencia el uso de la pantalla como representación del plano. La simulación de entornos geométricos, la creación de micromundos geométricos, la representación en el plano de los objetos de dos y tres dimensiones, la producción de imágenes y su manipulación en la pantalla del ordenador como representación de un plano ofrecen amplias posibilidades geométricas.

El ordenador, con su tratamiento discreto de la información anuncia la incorporación de la matemática discreta frente a la actual situación de predominio absoluto de la matemática continua.

La incorporación de los calculadores simbólicos disminuirá la importancia

de manipulaciones y cálculos algebraicos o resolución de ecuaciones en beneficio de aspectos como el planteamiento o la interpretación de los resultados.

Las matemáticas han estado tradicionalmente ligadas con la algorítmica. Las capacidades de los lenguajes de programación para diseñar, ejecutar y analizar algoritmos son un elemento fundamental a tener presente.

El ordenador permite realizar simulaciones que reproducen modelos y realizar "experimentos" probabilísticos, estadísticos o geométricos, todo ello con gran rapidez y flexibilidad.

ORDENADORES EN EL AULA

La existencia de ordenadores y software en el centro, y profesorado formado, no garantiza la utilización del equipamiento con finalidades didácticas.

La incorporación de las nuevas tecnologías a la enseñanza lo mismo que cualquier renovación pedagógica exige una experimentación y adecuación de los recursos. En esta experimentación debe tenerse en cuenta cual es la realidad de los centros: la existencia de una o dos aulas de ordenadores por centro.

Se han realizado o se realizan distintas experiencias para encontrar modelos de cómo integrar la tecnología de la información en la clase de matemáticas. Desde el uso de un único ordenador por el profesor como pizarra electrónica hasta la existencia de centros donde la ratio ordenador/alumno permite un uso permanente en la clase, son distintos modelos no incompatibles entre sí.

La utilización individual (o en grupos de 2/3 alumnos) del ordenador, guiados y con presencia o no del profesor aconseja la existencia de guías o ayudas al alumno. Las fichas de prácticas o cuadernos de trabajo pueden considerarse como un material que sirve de soporte al profesor dentro del aula.

Distintos ejemplos de cuadernos de trabajo, sobre cómo utilizar un programa pueden servir de ayuda sobre que elementos pueden o deben tener estas fichas.

El modelo escogido en las fichas que presentamos tiene las siguientes características:

La primera parte dirigida al profesor, proporciona información sobre el programa, sus características, los objetivos de la ficha, dónde y cómo debe integrarse antes, durante o después de la explicación, las dificultades...

La segunda parte dirigida al alumno comienza con una explicación sobre las características del programa; cómo debe utilizarse, cual es su interacción, qué teclas deben utilizar para introducir información... Estos elementos son comunes a todas ellas.

A continuación las fichas se diversifican según las características del

programa, no es lo mismo trabajar con un programa de simulación que con uno de ejercitación. En los primeros se propone que el alumnado descubra con ayuda del ordenador aspectos teóricos nuevos en los segundos el objetivo es comprobar o practicar el conocimiento adquirido.

Por último se ha pedido a los autores/profesores de las fichas que incorporen su experiencia en el aula para que pueda servir al resto de compañeros.

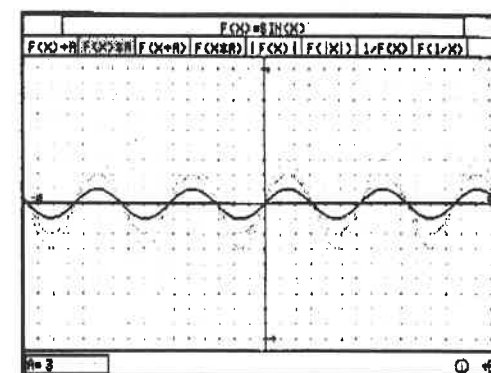
Ejemplo 1: Representación gráfica de funciones

El PIE ha repartido a todos los centros de secundaria tres muestrarios de software educativo; de la última distribución presentaremos un programa de representación gráfica de funciones.

Un programa de representación gráfica de funciones es aquel que permite representar diferentes funciones a través de la pantalla del ordenador. La pantalla simula un plano donde se representa la función. El origen, los ejes de coordenadas, visibles o no, y la escala puede modificarse de forma dinámica mientras se realiza el estudio de la función.

El alumno puede ajustar la zona de visión que más interese de acuerdo con el tipo de función y los aspectos que se pretenden estudiar en ese momento. Este proceso de ajuste y la representación de la función se realiza de forma automática adaptándose a las nuevas condiciones.

En la actualidad, el curriculum de matemáticas incorpora temas donde un representador gráfico de funciones aporta elementos distintos a los habituales. Permite por ejemplo dedicar más tiempo a la interpretación de la gráfica y a sus características que a la construcción.



Muestra de algunos ejemplos de utilización del ordenador en el estudio de funciones:

- Representación gráfica de las funciones elementales como afín, cuadrática, polinómica, trigonométricas...
- Modificación de la escala y zoom de una función.

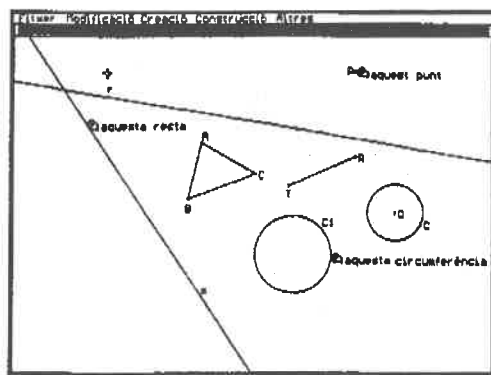
- Estudio de una función, su opuesta y su inversa. Diferencias gráficas y cómo éstas se pueden observar en la pantalla.
- Estudio de la simetría, la continuidad, el crecimiento...
- Influencia de un parámetro dentro una familia de funciones.

Ejemplo 2: Micromundo geométrico

El Programa de Informática Educativa, los autores del programa y la universidad Joseph Fourier (Grenoble) han realizado la traducción del programa Cabri-géomètre que próximamente será distribuido en todos los centros.

Cabri-géomètre es un programa que recrea el entorno clásico de la geometría elemental de lápiz, regla y compás formando un micromundo de gran potencia y versatilidad.

Un micromundo se caracteriza por el uso del ordenador y por la creación de un ambiente o situaciones destinados al aprendizaje o a la enseñanza con especial énfasis en los aspectos didácticos.



La pantalla del ordenador representa el papel sobre el que se puede trabajar con los instrumentos básicos, que son el lápiz, la regla y el compás. Con estos instrumentos los primeros objetos que se pueden construir son el punto, la recta (segmento) y la circunferencia, objetos tradicionales de la geometría euclídea.

Con estos objetos y utilizando las relaciones geométricas podemos construir paralelas, perpendiculares, simetrías...

El micromundo Cabri recrea estas construcciones y además permite al alumnado transformar (deformar) las imágenes a partir del movimiento de uno o más objetos, mientras se redibuja toda la figura y recalcula el valor de un ángulo o un segmento, de forma automática, permitiendo investigar sus propiedades. Asimismo el programa incorpora otras características como macroconstrucciones, menús definibles... que refuerzan los aspectos más didácticos.

El profesor puede formular un problema donde indica unas hipótesis y sugiere determinadas conclusiones. El alumno construye la figura y comprueba que cumple la hipótesis, verifica las conclusiones y se dedica a estudiar otras posibilidades, por ejemplo trasladando un objeto, eliminando uno de los objetos de la construcción...

Muestra de algunos ejemplos de utilización del programa:

- Creación de objetos primitivos
- Construcción de nuevos elementos
- Construcción del baricentro, ortocentro y circuncentro de un triángulo y construcción de la recta de Euler.
- Las cónicas como lugar geométrico de puntos del plano.

MESA 5: RESOLUCION DE PROBLEMAS

NOTAS CRITICAS SOBRE ALGUNOS ASPECTOS DE LA REFORMA EN MATEMATICAS Y DE SU DIVULGACION

Martínez Delgado, A.
I.B. Tartesos. Camas (Sevilla)

La reforma de las enseñanzas básicas goza de un consenso casi general en cuanto se refiere a sus objetivos y a su enfoque general. Las críticas que se plantean a la misma suelen estar centradas en las dificultades prácticas para su realización, y en particular en la preparación del profesorado para llevar a cabo tan "utópica" tarea. Sin embargo existen puntos de vista en el mismo planteamiento global de la Reforma que resultan discutibles y preocupantes. Dentro del espacio concedido a este tipo de trabajo intentaremos bosquejar algunos de los planteamientos problemáticos de la Reforma y de su divulgación.

I. HEGEMONIA DEL MODELO EDUCATIVO CONSTRUCTIVISTA:

El Diseño Curricular Base del M.E.C. para la E. S. O. señala en numerosas ocasiones (p. 31, 482...) su adscripción al modelo educativo constructivista. Este modelo goza de un apoyo oficial y académico que supera el disfrutado por el modelo conductista en la Reforma de 1970, y se acompaña, frecuentemente, de un optimismo pedagógico rayano en la milagrería, que se refleja especialmente en algunos artículos y declaraciones de divulgación.

Como prototipo de los planteamientos constructivistas, en la Reforma de la didáctica de las matemáticas, podemos tomar el siguiente párrafo de Callejo, M. Luz (1992, p. 27):

"El conocimiento matemático no se recibe pasivamente, como si la mente fuese un libro en blanco, en el que se van escribiendo los nuevos contenidos, en el sentido más amplio del término, sino que el sujeto construye activamente el conocimiento, incorporando los nuevos contenidos a las estructuras mentales que su experiencia ha ido forjando. Esto significa que la matemática no se aprende por transmisión directa de lo que se explica en clase o de lo que se lee en los libros de texto, sino que la matemática se aprende en interacción con situaciones problemáticas y con otros sujetos, que obligan al alumno a ir modificando su estructura cognitiva mediante una serie de acciones: experimentando, haciéndose preguntas, particularizando situaciones, generalizando resultados, encontrando contraejemplos, etc. En una palabra, las matemáticas "se aprenden en gerundio".

Contiene este texto unas afirmaciones que pueden considerarse triviales, desde casi cualquier modelo educativo, pero que se adaptan para señalar el carácter constructivo del conocimiento. Cualquier teoría cognitiva (no necesariamente constructivista) resalta el papel del individuo en la propia formación del conocimiento, sin por ello rechazar, por ejemplo, "la transmisión directa de lo que se explica en clase o de lo que se lee en los libros de texto" que puede realizarse de forma significativa y no forzosamente memorística (Ausubel, D. P., Novak, D. J., Hanesian, H., 1983).

A los problemas de imposición del modelo constructivista, y de sus connotaciones de carácter epistemológico vinculadas al paradigma "interpretativo" o "convencionalista", se añade, en ocasiones, cierta superficialidad respecto al propio modelo propuesto. Si realmente el conocimiento es construido, sin que pueda producirse por comunicación directa entre dos personas (profesor-alumno...), si el profesor debe abandonar totalmente su "viejo" papel de "transmisor", entonces los problemas de la enseñanza, de la contribución del profesor al proceso constructivo del alumno, no hacen sino comenzar. Mientras que la comunicación, y la actividad "descubrimiento" pueden ser significativas en función de la existencia de una realidad objetiva exterior, común a los dos intervinientes, o en función de una estructuración previa "innata" similar, o de la confluencia de ambas posibilidades, si el aprendizaje se pretende "construir" exclusivamente a partir de los propios esquemas peculiares del individuo, la labor que se presenta a cada profesor está por encima de las consecuciones conocidas, hasta el momento, de la investigación educativa. La desorientación sería la principal nota de la actividad del profesorado, y algunos indicios aparecen de que esto empieza a ser así.

La división del mismo campo constructivista entre la tendencia individual o psicológica y la tendencia social son muestras de las dificultades para llegar a un modelo definitivo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Frente a la rigidez de algunos defensores de la Reforma, Noddings, N. (1990, p. 16), desde una posición constructivista reconoce:

"Muchos educadores matemáticos reconocen el poder de los "métodos constructivistas" en situaciones de uno-uno, pero ven también que los maestros no pueden trabajar continuamente en esta situación... Las condiciones del aula nos fuerzan a pensar en economías instruccionales. Los profesores constructivistas deben conservar en mente sus premisas básicas, pero deberían sentirse libres para adaptar una amplia variedad de métodos a sus propósitos".

Análoga posición "eclectica" respecto a los métodos, defiende Guzmán, M. de, en 1987 (p. 22), si bien desde planteamientos que no pueden ser considerados, en ese momento, constructivistas por la importancia concedida a la "transmisión" del conocimiento:

"¿Cómo puede suceder que la matemática, la más antigua y más seriamente establecida de todas las ciencias no haya encontrado a lo largo de sus 26 siglos de historia unos paradigmas de transmisión estables, incuestionables? ¿Cómo es posible que en nuestro tiempo estamos dando tan serios bandazos en lo que se refiere a lo que hay que transmitir y cómo hay que transmitirlo a los más jóvenes..." (p. 14).

II. RESOLUCION DE PROBLEMAS COMO FORMA DE APRENDIZAJE

Aunque el constructivismo no es el único modelo educativo que reivindica la importancia de la resolución de problemas como vía de aprendizaje de las matemáticas y de desarrollo de las potencialidades creativas, en algunas declaraciones aparece este tipo de actividad como casi la única vía de aprendizaje. La importancia real de este método de aprendizaje debe alejarnos de planteamientos triviales del mismo y llevarnos al reconocimiento de las dificultades de su aplicación. Shoenfeld, A. H. (1982), tras manifestar su creencia de que "la mayor parte de la instrucción en matemáticas es, en un sentido real, engañosa y posiblemente fraudulenta" (p. 27), y señalar algunas deficiencias en la utilización de la "resolución de problemas" en la enseñanza escolar, nos ofrece su interesante y desmitificadora experiencia académica en este terreno:

"El mundo de la resolución de problemas es pequeño y posiblemente incestuoso. Hace algunos años pedí a algunos colegas comprometidos en la investigación de la resolución de problemas si tenían colecciones de buenos problemas. Entre las personas que respondieron estaba Ed Silver. Yo estaba familiarizado con virtualmente todos los problemas que envió Ed. La mayoría eran de Polya y otros de fuentes standard. Unos pocos eran problemas que yo había creado... Basta con mirar al anuario 1980 del N.C.T.M. para ver que virtualmente todos los autores discuten los mismos tipos de problemas «no rutinarios», si no exactamente los mismos problemas (Se me pidió que cambiara algunos ejemplos en mi artículo porque repetían los ejemplos de otros artículos)" (p. 30).

III. LA ENSEÑANZA "FELIZ". ALGUNOS EXCESOS DIVULGATIVOS

La motivación de los alumnos en el proceso de aprendizaje, se insiste en la perspectiva constructivista, debe conseguirse a través de la presentación de problemas en forma de juegos. De esta forma se pretende resolver el problema del fracaso escolar, y hacer del aprendizaje una actividad feliz para el alumno. Nos parece innegable que debe evitarse el sufrimiento de los alumnos, quizás excesivamente presente en la educación actual, pero no creemos que podamos hacernos demasiadas ilusiones respecto a la

desaparición de todo tipo de esfuerzo en el aprendizaje, ni que las profundas raíces del fracaso y del desencanto escolar puedan desaparecer con este planteamiento lúdico.

Algunos artículos de divulgación como "Matemática útil y jocunda en la infancia" (*El Correo de Andalucía*, 25 de junio de 1992, p. 36) llevan cierta intransigencia metodológica hasta describir como "tragicómica historia" los intentos de una madre por hacer recitar la "tabla del 2" y otras canciones "infantiles" a su hija. No sabemos, hasta qué punto puede resultar más opresiva la recitación propuesta por la madre de la historia referida que la imposición de determinados juegos "educativos".

IV. ¿UNA RUPTURA DEL MODELO?. LA RESTRICCIÓN A LA ENSEÑANZA BÁSICA

La Reforma que se implanta a través de la LOGSE afecta a la enseñanza considerada como básica (EGB y "Medias"). Esto conlleva que la enseñanza universitaria permanezca fuera de este afán renovador y de sus principios y modelos, con la consiguiente repercusión sobre la formación del profesorado (Guzmán, M. de, 1987, p. 18). Pero además del fraccionamiento de las decisiones políticas referentes a los distintos niveles educativos, en algunos textos parece perfilarse una escisión epistemológica y educativa en referencia a la "educación básica" y la "educación superior". Esta antítesis se revela a través de la explicitación de que el marco constructivista, y sus métodos van dirigidos a los niveles básicos. Tal es el caso de la siguiente declaración de Callejo, M. L. (1992, p. 33) sobre el constructivismo:

"Pero este enfoque va más allá del curriculum de matemáticas, se trata de UN MODO DE ENTENDER LA EDUCACIÓN EN LAS ETAPAS INICIALES, (PRIMARIA Y SECUNDARIA), que supera la disciplina concreta, las matemáticas". (Mayúsculas y subrayado nuestros).

V. ALGUNOS INTERROGANTES SOBRE CONSTRUCTIVISMO E IDEOLOGÍA

1. ¿La pujanza demostrada por el modelo constructivista de aprendizaje está basado exclusivamente en las virtudes científicas de este enfoque, o son determinantes de esta eclosión constructivista, y del paradigma interpretativo subyacente, factores de tipo ideológico?

2. ¿Existe alguna relación entre el auge del constructivismo y los intereses de pervivencia de una sociedad sometida a una profunda crisis económica y social, en la que "interese" resaltar el consenso "construido" frente a la disensión que una realidad reconocida pueda provocar?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ausubel, D. P., Novak, D. J., Hanesian, H., (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. (2ª ed.). Interamericana. México.
- Callejo, M. L. (1992). "Curriculum de matemáticas y resolución de problemas". *Suma*, nº 10. p. 25-35.
- Guzmán, M. de (1987). "Cuestiones fundamentales sobre la enseñanza de la matemática". *Thales*, nº 8, p. 13-26.
- Noddings, N. (1990). "Constructivism in Mathematics Education", en Davis, R. B., Maher, C. A. y Noddings, N. (eds.). *Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics*. N.C.T.M. Reston, Virginia.
- Shoenfeld, A. H. (1982). "Some Thoughts on Problem-solving Research and Mathematics Education", en Lester, F. K. Jr. y Garofalo, J. (eds.). *Mathematical Problem Solving. Issues in Research*. The Franklin Institute Press. Philadelphia, Pennsylvania.

ANALISIS DE ERRORES Y DIFICULTADES EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS COMBINATORIOS POR ALUMNOS DE SECUNDARIA

*V. Navarro-Pelayo; M.C. Batanero y J. D. Godino
Dpto. de Dca. de las Matemáticas
(Universidad de Granada)*

INTRODUCCION

De acuerdo con Piaget e Inhelder (1951), el desarrollo de la capacidad combinatoria es uno de los componentes fundamentales del pensamiento formal y puede ser relacionado con los estadios descritos en su teoría; tras el estadio de las operaciones formales el sujeto descubre procedimientos sistemáticos de construcción combinatoria, aunque en el caso de las permutaciones es preciso, a veces, esperar a la edad de 15 años. Fischbein (1975) sostiene que la capacidad de resolución de problemas combinatorios no se alcanza en todos los casos ni incluso en el nivel de las operaciones formales sin instrucción específica. Fischbein y Gazit (1988) estudian la dificultad relativa de los problemas combinatorios en función de las variables de la tarea tipo de operación combinatoria y naturaleza y número de los elementos, así como el efecto de la instrucción sobre la capacidad combinatoria.

En este trabajo describimos los resultados de un estudio sobre el efecto en la dificultad relativa de diferentes problemas combinatorios de ciertas variables de tarea de los mismos. Aunque el estudio realizado hasta el momento es limitado, consideramos de interés describir la tipificación efectuada de los errores y las diferencias halladas en esta distribución, entre un grupo de alumnos que no han recibido instrucción previa y otro grupo que sí la ha recibido.

CARACTERISTICAS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

Los problemas son de dos clases: enumeración y cálculo. La prueba consta de 9 problemas, algunos con varios apartados, en total, 12 cuestiones. Problemas de enumeración. Llamamos problemas de enumeración a aquellos, en que se pide al alumno un inventario de todos los casos posibles. Estos problemas son idóneos para nuestro propósito de conocer la capacidad combinatoria de los alumnos previa a la instrucción. Navarro-Pelayo (1991) pone de manifiesto el poco énfasis dado a este tipo de ejercicio en los manuales

Problemas de cálculo del número de posibilidades. En estos enunciados,

se pregunta al alumno el número de posibilidades, sin pedirle explícitamente el inventario de las mismas, teniendo que identificar la operación combinatoria. Esta es una de las dificultades descritas por Hadar y Hadass (1981) para la resolución de problemas combinatorios y es también señalada como una de las tareas más difíciles por los profesores (Navarro-Pelayo (1991)).

VARIABLES DE TAREA CONSIDERADAS

Las variables de tarea (Kilpatrick (1978)) que se han tenido en consideración para la elección de los problemas han sido las siguientes:

a) Tipo de operación combinatoria (variaciones, combinaciones,...). Esta variable ha sido uno de los factores determinantes de la dificultad de los problemas en la investigación de Fischbein y Gazit (1988).

b) Contexto. Asimismo, los anteriores autores distinguieron los contextos de letras, números, personas y objetos; también hemos incluido un problema en que se consideran objetos indistinguibles, puesto que Lecoutre (1985) indicó la mayor dificultad de emplear este tipo de objetos. Asimismo, hemos incluido un contexto geométrico.

c) Valor dado a los parámetros m y n , ya que ha sido también un factor de dificultad descrito por Fischbein y Gazit (1988).

d) Modelo matemático implícito. Según expone Dubois (1984) las configuraciones combinatorias simples pueden clasificarse en tres modelos concretos: selecciones, que enfatiza el modelo de muestreo, colocaciones, relacionado con la idea de aplicación y particiones o división de un conjunto en subconjuntos. Hemos considerado estos tres modelos, así como el de ordenaciones simples que puede ser considerado como un caso particular de cualquiera de ellos.

e) Ayuda suministrada. Dar o no un ejemplo en el enunciado, y en caso de darlo, si se utiliza una tabla o un diagrama en árbol.

En la Tabla 1 aparecen el contexto, modelo, valores de los parámetros y operaciones combinatorias empleadas en cada uno de los ítems.

DIFICULTAD RELATIVA DE LOS PROBLEMAS: EFECTO DE LAS VARIABLES DE TAREA

Tabla 1

Porcentaje de soluciones correctas en los diferentes problemas

<u>Problema</u>	<u>Contexto</u>	<u>Operación Combinatoria</u>	<u>Porcentaje 8º EGB</u>	<u>soluciones correctas 1º BUP</u>
3a	Ordenar personas	P_3	89.5	95.9
3b	"	P_4	17.5	51.0
3c	"	P_5	7.0	46.9
4	Partición grupo pers.	$C_{10,3}$	0.0	6.1
5	Selección objetos	$C_{5,3}$	8.8	20.4
1	Lanzar monedas	$VR_{2,2}$	56.1	67.3
2	Selección caminos	R. Producto	43.9	26.5
6	Selección personas	$V_{4,3}$	1.8	49.0
7	Colocación objetos	$V_{4,2}$	38.6	67.3
8	Selección números	$V_{5,2}$	38.6	51.0
9a	Ordenación letras	P_5	7.0	53.1
9b	Ordenación letras	$PR_{5,1,1,1,2}$	0	12.2

Para este primer estudio piloto hemos preferido elegir una muestra intencional, constituida por un total de 106 alumnos: 57 alumnos de 8º Curso de EGB (14 años) que no habían recibido instrucción y 49 alumnos de 1º de Bachillerato (15 años), tras el periodo de enseñanza de la Combinatoria. La Tabla 1 refleja los porcentajes de soluciones correctas a cada cuestión en los dos grupos. Se observa que prácticamente en todos los ítems los porcentajes de soluciones correctas son mayores en alumnos de Bachillerato.

Al considerar la magnitud de los parámetros vemos claramente la diferencia de dificultad cuando el valor del número de elementos a seleccionar es 2 ó 3. En todos estos casos ha habido un porcentaje importante de soluciones correctas incluso en los alumnos de EGB, de lo que se deduce una buena capacidad combinatoria cuando el número de objetos es pequeño. Cuando este número crece estos alumnos no han sido capaces de completar satisfactoriamente un procedimiento y, al no conocer una fórmula, en pocos casos han sabido deducirla. Es en estos problemas donde se aprecia, un mayor efecto de la instrucción y la edad. Otro ítem en que ha habido bastantes repuestas correctas, a pesar de emplear un valor 4 para el parámetro m ha sido el ítem 7 en que se dio como ayuda un diagrama en árbol. Esto concuerda con la importancia que da Fischbein y Gazit (1988)

al diagrama en árbol como modelo para la resolución de problemas combinatorios. En general, el suministrar un ejemplo al alumno, ha supuesto una mayor facilidad del problema, especialmente en el ítem 3a) donde el porcentaje de respuestas correctas ha sido sorprendente en los alumnos de EGB, teniendo en cuenta que, tanto las teorías de Piaget (1951) como las de Fischbein (1975) señalan las permutaciones como la operación combinatoria de mayor dificultad cognitiva antes de la instrucción. Sin embargo, este porcentaje baja drásticamente al pasar a las permutaciones de 4 y 5 personas, incluso baja en los alumnos que han recibido instrucción. La diferencia de dificultad debida al tipo de operación combinatoria no parece en nuestro estudio tan grande como la debida al tamaño de los parámetros, ya que antes de la instrucción éste ha sido el principal determinante del éxito y después no hay tampoco una diferencia muy clara. Al considerar el modelo matemático concreto bajo el que se presenta la operación combinatoria, no observamos diferencias importantes en el modelo de selección (ítems 5, 1, 2, 6, y 8), ordenación (ítems 3a, 3b, 3c, 9a y 9b) y colocación o aplicaciones (ítem 7), salvo en el caso de las permutaciones con repetición que han resultado mucho más difíciles. En este caso, el principal determinante de la dificultad es el hecho de aparecer objetos distinguibles mezclados con objetos indistinguibles. Se ha encontrado una diferencia bastante acusada de dificultad en el ítem 4 referido a un contexto de partición de un conjunto en dos subconjuntos (14% de respuestas correctas tras la instrucción) a pesar de ser un enunciado típicamente combinatorio.

TIPOS DE ERRORES IDENTIFICADOS

Error de orden. Este error descrito por Fischbein y Gazit (1988) consiste en confundir las combinaciones y variaciones. Este error representa el 16.5% del total de los errores en BUP y el 2.6% en los alumnos de EGB.

Error de repetición y de exclusión. Hemos llamado así al error del alumno que no considera la posibilidad de repetir los elementos o cuando no habiendo posibilidad, el alumno la utiliza. Por ejemplo, en el ítem 1, cuando el alumno emplea la fórmula de variaciones con repetición o repite un elemento dentro de la permutación. En el caso del ítem 9b), que trata de las permutaciones de 5 letras, dos de ellas iguales: A,B,C,D,D, otra opción seguida por algunos alumnos es excluir la letra repetida y formar las permutaciones de las restantes, tomando así $PR_{5,1,1,1,2} = P_4$. Hemos denominado a este error, error de exclusión. La letra D se considera fija y no se considera su permutación con las restantes. Este error ha sido cometido principalmente por los alumnos de EGB (17 casos; 5.6 % de sus errores) y reviste una especial importancia puesto que sólo se ha dado asociado a un problema particular, por lo que parece típico de esta clase de problema. En

total, se han tenido 53 errores de repetición en BUP, que representan un 25 % del total de errores frente a 8 en EGB (2.6 % de errores), debido al empleo preferente de fórmulas en el primer grupo. También hay que señalar la mayor importancia de este error, frente al error de orden, en el grupo de alumnos con instrucción.

Enumeración no sistemática. Este tipo de error descrito por Fischbein y Gazit consiste en intentar resolver el problema mediante una enumeración usando el ensayo y error sin un procedimiento recursivo que lleve a la formación de todas las posibilidades. Ha sido uno de los errores más frecuentes en ambos grupos, 24 casos en BUP (11.3% de errores), 96 (31.6%) en EGB. Este error ha ocurrido especialmente antes de la instrucción, por haber empleado estos alumnos la enumeración como estrategia más frecuente en la solución de los problemas. En (Navarro-Pelayo, 1991) se puso de manifiesto que los ejercicios de enumeración no suelen ser propuestos a los alumnos por considerar que es una habilidad ya adquirida. Los resultados de esta primera muestra confirman los de otros autores como Mendelsohn (1984) de que muchos alumnos, aún en la etapa de las operaciones formales, tienen dificultades con la enumeración sistemática. Incluso hemos visto que estas dificultades continúan en algunos de los alumnos tras el periodo de instrucción.

Error en operaciones aritméticas empleadas. Cuando un alumno de BUP no ha sabido identificar la operación combinatoria, intenta aunque no lo indique explícitamente, deducir una serie de operaciones aritméticas necesarias para la solución. Este también es el caso de los alumnos de EGB. En el caso de que no se haya llegado a una fórmula correcta con este procedimiento diremos que ha ocurrido error en operaciones aritméticas. Este tipo de error aparece en un total de 20 problemas resueltos por los alumnos de BUP (9.4 % de los errores) y 56 por los de EGB (18.8% de los errores)

Respuesta intuitiva errónea. Consiste en no justificar la respuesta: dar una solución numérica equivocada. La frecuencia de este tipo de error ha sido 82 casos: un 27% de los errores en EGB frente a 17.9% en BUP; sigue siendo este tipo de respuesta importante en BUP.

Otros errores identificados: Fórmula mal aplicada, confusión en los parámetros, no recordar una propiedad de los números combinatorios, interpretación incorrecta del diagrama en árbol.

REFERENCIAS

- DUBOIS, J. G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. Educational Studies in Mathematics, v. 15, pp. 5-31.
- FISCHBEIN, E. (1975). The intuitive sources of probabilistic thinking in children. Reidel. Dordrecht.

FISCHBEIN, E. y GAZIT, A. (1988). The combinatorial solving capacity in children and adolescent. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5, pp. 193-98.

HADAR, N. y HADASS, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. Educational Studies in Mathematics, v. 12, pp. 435-443.

LECOUTRE, M.P. (1985). Effect d'information de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes. Recherches en Didactique des Mathématiques, v.6, pp.193-213.

MAURY, S. (1986). Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution des problèmes. Thèse d'Etat. Université Montpellier II.

MENDELSON, P. (1981). Analyse procedural et analyse structural des activités de permutations d'objets. Archives de Psychologie, v. 49, pp. 171-197.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1978). La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant. Presses universitaires de France. Paris.

NAVARRO-PELAYO, V. (1991). La enseñanza de la combinatoria en bachillerato. Memoria de Tercer Ciclo. Dpto de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

PROBLEMAS ESTEREOTIPADOS EN LA CLASE DE MATEMATICAS

Antoni Vila

I.B. Gabriel Ferrater. Reus (Barcelona)

La idea central de esta exposición podría resumirse en la siguiente pregunta: ¿realmente resolvemos / planteamos problemas en la clase de matemáticas o son más bien ejercicios planteados en forma de enunciado en los cuales se trata de aplicar unos conocimientos previamente adquiridos?

Las reflexiones sobre los "estereotipos" en la resolución de problemas han sido el motor de una "investigación-experiencia" llevada a cabo por el equipo de profesores de matemáticas del I.B. Gabriel Ferrater de Reus en 1º de B.U.P.

JUSTIFICACION

Cabría plantearse si estas reflexiones no son una simple "alucinación" o un "ver fantasmas". En otras palabras, ¿estamos realmente, de forma generalizada, ante unos estereotipos de problemas que llegan a encorsetar el trabajo matemático de los alumnos?

Las siguientes situaciones pueden ilustrar nuestra posición ante esta cuestión (en los tres casos se hace referencia a 1º de BUP):

a) *Actividad de diagnosis (octubre 1991)*

Si ayer una docena de huevos costaba en el mercado 200 ptas y hoy cuesta 180 ptas, ¿cuánto costará mañana?

Tan solo 11 alumnos de 40 "se atreven" a afirmar que no disponen de información suficiente.

b) *Actividad de diagnosis (octubre 1991)*

Un comerciante ha comprado 385 botellas de aceite a 154 ptas cada una. Después las vende a 179 ptas cada una. ¿Cuánto ganará en la venta de cada botella?

Tan solo 20 alumnos de 40 dan como respuesta 25 ptas.

c) *Actividad de resolución de problemas (enero de 1993)*

1) En el caso de que tengas una moto, ¿qué te resultaría más barato: ir al Instituto en moto o en autobús?

2) En el periódico X se publicó la siguiente noticia: "durante el mes pasado el número de parados aumentó en 10.000 personas". Al mismo tiempo en otro periódico Y se publicó: "durante el mes pasado la tasa de paro disminuyó". ¿Crees que es esto posible?

La mayoría de los 200 alumnos a los que se les propuso los problemas quedaron bloqueados ante la escasa información "cuantitativa" aportada por

el primer enunciado y ante la aparente contradicción planteada en el segundo. Tan solo unos 50 de los 80 alumnos que habían desarrollado un trabajo con problemas "abiertos" realizaron un estudio económico en el primer problema y plantearon ejemplos explicativos de forma coherente en el segundo.

El análisis que puede hacerse de los resultados anteriores es realmente complejo. Sin embargo me atrevo a afirmar que una de las razones de esos "fracasos" cabe buscarla en el modelo de enseñanza de las matemáticas basado en la transmisión de unos conocimientos ya elaborados y la posterior aplicación / consolidación mediante ejercicios, una parte de los cuales son planteados mediante un enunciado verbal y hacen referencia al entorno (los mal llamados "problemas").

OBJETIVOS GENERALES DE LA EXPERIENCIA

Los objetivos que se pretenden son:

a) Describir y analizar qué estereotipos de problemas de matemáticas están presentes en el aula a la edad de 12-16 años.

b) Analizar la actitud manifestada y las acciones desarrolladas por los alumnos de 12-16 años ante situaciones que podríamos considerar no estereotipadas.

c) Diseñar estrategias que permitan un cambio cualitativo en las actitudes negativas y las acciones inadecuadas de estos alumnos.

En una primera aproximación cualitativa a estos objetivos se han detectado cuatro categorías de estereotipos que hacen referencia a:

1) los contextos "del entorno" en los que se mueven las situaciones planteadas (móviles, edades, mezclas, ...);

2) el campo matemático al que hacen referencia (habitualmente, resolución de ecuaciones, ...);

3) las características de la información contenida en el enunciado (habitualmente: exhaustividad de datos, no saturación de la información, información muy cuantificada, ausencia de ambigüedades, total coherencia interna, poca coherencia externa);

4) los propósitos planteados por los enunciados (casi de forma exclusiva se trata de calcular un único resultado, que a su vez acostumbra a ser numérico).

Asimismo se ha observado que aquellos alumnos que están "acostumbrados" a una resolución de problemas estereotipados desarrollan durante el proceso de resolución una actividad intelectual que podríamos calificar de lineal, algorítmica y descontextualizada. Estos mismos alumnos en el momento de enfrentarse ante situaciones "abiertas" (ejemplo "d" anterior) quedan "bloqueados".

REFERENCIA PARA EL DISEÑO DE ESTRATEGIAS

Para diseñar estrategias que puedan producir un cambio cualitativo en el alumno, se hace imprescindible adoptar una referencia teórica.

En primer lugar, se considerará que un problema es una "situación cuantitativa o no, que pide solución y para la cual los individuos implicados no conocen medios ni caminos evidentes para obtenerla" (Krulik y Rudnik, 1980, citados por Gil, 1988). En este marco no cabe dar al enunciado otro papel que el de introducirnos en la situación problemática.

Por otra parte, las acciones a desarrollar por el alumno en un proceso de resolución de un problema debieran ser (Mason, Burton y Stacey, 1989):

a) en la fase de abordaje, no tan solo asimilar el mensaje y organizar los datos, sino también organizar y ampliar la información, aclarar el propósito planteado, ...

b) en la fase de ataque, no tan solo aplicar un modelo adecuado, sino también reformular el problema, analizar, lanzar hipótesis, tomar decisiones, asociar, ...

c) en la fase de revisión, no tan solo verificar si la solución obtenida es la adecuada, sino también revisar el proceso, determinar la influencia de cada aspecto de la información en la respuesta final, generalizar a contextos más amplios, particularizar a algunos casos concretos interesantes, ...

Afrontando la cuestión de cómo convendría trabajar la resolución de problemas en el aula, podríamos proponer, sin pretensión alguna de maximalizar sobre el tema ni de dar una relación exhaustiva de sugerencias, que:

- los problemas no siempre estén perfectamente delimitados
- incluso a veces podrían ni tan siquiera estar explícitamente formulados
- no siempre tenga que razonarse en términos de certeza; pueden formularse hipótesis, conjeturas, analogías,...

- a veces tenga que buscarse los datos, ampliar la información, y que tenga que hacerse en función de las hipótesis, de la experiencia personal, de los hechos conocidos, ...

- se hagan continuas revisiones del trabajo desarrollado y de las conclusiones/soluciones obtenidas

~ ...

Con esta referencia se pretende que la finalidad de la enseñanza de resolución de problemas sea doble. Por una parte que los problemas jueguen un papel gratificador para los alumnos (motivar, abrir expectativas en un nuevo campo, profundizar de manera autónoma, contextualizar, ...). Por otra parte, activar y desarrollar determinadas capacidades intelectuales y personales.

BIBLIOGRAFIA

- GIL PEREZ, D. i ALTRES (1988): "La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación". Investigación en la escuela. n.6. Sevilla
- MASON, J.; BURTON, L. i STACEY, K. (1989): Pensar matemáticamente. Labor-MEC. Madrid
- N.C.T.M. (1991): Estándares Curriculares y de evaluación para la educación matemática. S.A.E.M. "Thales". Sevilla
- PUIG, L.; CERDAN, F. (1988): Problemas Aritméticos Escolares. Ed. Síntesis. Madrid.
- SCHOENFELD, A.H. (1985): Mathematical Problem Solving. Academic Press. New York

RESOLUCION DE SISTEMAS SIMETRICOS POR EL METODO DE LA RAIZ CUADRADA

Gloria Cabrera Gómez
Dpto. de Matemáticas Aplicadas
Universidad Complutense. Madrid

1. INTRODUCCION

Este es un método directo de resolución de sistemas lineales, semejante al método de Gauss, aunque válido sólo para sistemas simétricos con $a_{11} \neq 0$.

Para el caso $a_{11} = 0$ pueden alterarse el orden de las ecuaciones y las incógnitas para conseguir un coeficiente no nulo, por lo que es válido si la matriz de coeficientes es simétrica y algún elemento de la diagonal es no nulo.

2. METODO

Sea $A \cdot X = B$ tal que $A = A^t$ y $a_{11} \neq 0$

Suponemos en general $A \in M_n$, $X \in M_{n \times 1}$, $B \in M_{n \times 1}$

Calculemos una matriz triangular T tal que $T^t \cdot T = A$

Deberá verificarse que:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ 0 & 0 & t_{33} & \dots & t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Efectuando el producto y por igualdad de matrices, resulta:

(1) Para la primera fila de A:

$$t_{11}^2 = a_{11} \rightarrow t_{11} = \sqrt{a_{11}} \text{ (real o complejo)}$$

Si $j > 1$:

$$t_{11} \cdot t_{1j} = a_{1j} \rightarrow t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}$$

Es decir, la primera fila de T se obtiene del modo: el primer elemento es la raíz cuadrada del primero de A y los restantes se obtienen dividiéndolos por este mismo elemento. Es fácil darse cuenta que es indiferente tomar la raíz positiva o negativa.

(2) Para una fila cualquiera distinta de la primera, $i > 1$, se tiene:

$$\text{Si } j=i: \quad a_{ii} = \sum_{h=1}^n t_{hi}^2 = \sum_{h=1}^i t_{hi}^2 + \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}^2 \rightarrow t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}^2}$$

Si $j > i$:

$$a_{ij} = \sum_{h=1}^n t_{hi} \cdot t_{hj} = \sum_{h=1}^i t_{hi} \cdot t_{hj} + \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi} \cdot t_{hj} \rightarrow t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi} \cdot t_{hj}}{t_{ii}}$$

Los elementos de T se calculan en una sola etapa y por filas sucesivas.

Estas fórmulas pueden recordarse así: "A partir de la segunda fila, todo elemento diagonal es la raíz cuadrada de la diferencia entre el elemento a_{ii} correspondiente y la suma de los cuadrados de los elementos de la misma columna de la matriz triangular.

Todo elemento no diagonal t_{ij} es la diferencia entre a_{ij} y la suma de los productos, fila por fila, de los elementos de las columnas correspondientes, dividida por el elemento t_{ii} de la diagonal."

Una vez encontrada la matriz T, el sistema $A \cdot X = B$ queda $T^t \cdot T \cdot X = B$

y si llamamos $T \cdot X = K$ (*) queda $T^t \cdot K = B$

Hallando la matriz K mediante esta última fórmula, el sistema (*) es triangular, y puede discutirse y resolverse inmediatamente.

El cálculo de K es semejante al de T:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 & \dots & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\text{de donde } t_{11} \cdot k_1 = b_1 \rightarrow k_1 = \frac{b_1}{t_{11}}$$

$$\text{si } i > 1: \quad b_i = \sum_{h=1}^n t_{hi} \cdot k_h = \sum_{h=1}^i t_{hi} \cdot k_h + \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi} \cdot k_h \rightarrow k_i = \frac{b_i - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi} \cdot k_h}{t_{ii}}$$

Obtenidas T y K en una sola etapa, se resuelve el sistema triangular $T \cdot X = K$, que será compatible determinado si y sólo si $t_{ii} \neq 0 \quad \forall i=1, 2, \dots, n$.

3. COMENTARIO

El método es válido siempre que todos los t_{ii} que se van obteniendo sean no nulos. Si a lo largo del proceso se obtiene un $t_{ii} = 0$ el método no es aplicable incluso siendo el sistema compatible determinado, lo que supone una gran limitación. No obstante si la matriz es cuasidefinida, es decir

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \forall k=1, 2, \dots, n$$

entonces la descomposición $T^t \cdot T = A$ es posible, y el método es válido (ver [4]).

4. EJEMPLOS

$$t_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad j > 1 \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}} \quad k_1 = \frac{b_1}{t_{11}}$$

$$i > 1 \quad t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi}^2} \quad j > i \quad t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi} \cdot t_{hj}}{t_{ii}} \quad k_i = \frac{b_i - \sum_{h=1}^{i-1} t_{hi} \cdot k_h}{t_{ii}}$$

♦ Ejemplo 1 $\begin{cases} -x + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + y + 3z = 1 \end{cases} \quad A \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B$

$$A: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} :B$$

$$T: \begin{pmatrix} i & 0 & -i & -i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} :K$$

$$\text{Solución } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

◆ Ejemplo 2
$$\begin{cases} x+y = -1 \\ x+2y+z = 1 \\ y-z = 0 \end{cases} \quad A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B$$

A:	1	1	0	-1	:B
	1	2	1	1	
	0	1	-1	0	
T:	1	1	0	-1	:K
	0	1	1	2	
	0	0	$\sqrt{2}i$	$\sqrt{2}i$	

Solución $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. BIBLIOGRAFIA

1. Birkhoff-McLane. *Algebra moderna*. Ed. Vicens Vives. Barcelona 1970
2. Burgos. *Curso de Algebra y Topología*. Ed. Alhambra. Madrid 1977
3. Fraleigh-Beauregard. *Algebra Moderna*. Ed. Addison Wesley Iberoamericana. México 1977.
4. Gantmacher. *The Theory of Matrices*. Chelsea Publishing Company. New York 1974
5. Godement. *Algebra*. Ed. Tecnos. Madrid 1967
6. Hernández. *Algebra y Geometría*. Ed. U. Autónoma de Madrid 1987
7. Herstein-Winter. *Algebra Lineal y Teoría de Matrices*. Grupo Ed. Iberoamericana 1989
8. Lang. *Algebra Lineal*. Ed. Fondo Educativo Iberoamericano. México 1976
9. Pinilla. *Lecciones de Algebra Lineal*. Imp. Varicop. Madrid 1972
10. Queysanne. *Algebra Básica*. Ed. Vicens Vives. Barcelona 1971
11. Strang. *Algebra Lineal y sus Aplicaciones*. Fondo Educativo Interamericano 1982

CONCEPCIONES SOBRE LA CONVERGENCIA ESTOCASTICA Y HEURISTICA DE LA REPRESENTATIVIDAD EN UNA SITUACION DE SIMULACION

L. Serrano ; M.C. Batanero ; A. Vallecillos
Dpto. de Dca. de la Matemática. Universidad de Granada

INTRODUCCION

A partir de los trabajos de Kahneman y Tversky (1972), son muchos los investigadores que se han ocupado del estudio de la heurística de la representatividad, empleando, por lo general, problemas de enunciado verbal. Una persona que emplea esta heurística evalúa la probabilidad de un acontecimiento aleatorio o de una muestra por el grado en el cual sus propiedades esenciales se parecen a las de la población de la que han sido extraídos o bien refleja los rasgos más salientes del proceso por el cual ha generado. Aunque esta heurística es adecuada en numerosas ocasiones, se aplica también en otras en que no resulta pertinente, dando lugar a numerosos sesgos y errores en los juicios probabilísticos.

Como indica Wallsten (1983), la mayor parte de los trabajos sobre representatividad se han realizado utilizando problemas verbales, por lo que sugiere la necesidad de investigación sobre esta heurística empleando otro tipo de tareas, ya que es un hecho reconocido por diversos investigadores la influencia de la forma de presentación de las tareas sobre las respuestas a las mismas (Mayer, 1983).

Gardfield y Del Mas (1989) y Del Mas y Gardfield (1991) estudian los patrones de respuestas a parejas de ítems referidos a la heurística de la representatividad, que solo se diferencian en el contexto no matemático y diferente contexto. Concluyen que los alumnos no parecen emplear una estrategia consistente en los ítems con igual contenido matemático y diferente contexto. También estudian el efecto de la instrucción basada en la simulación con microordenador sobre la estabilidad de diversos sesgos asociados a la heurística de la representatividad. Encuentran cambios en las estrategias de respuesta a estos ítems antes y después de la instrucción, tanto en el paso de estrategias incorrectas a correctas como en sentido contrario, por lo que no obtienen conclusiones sobre la utilidad del logicial cara a la superación de estos sesgos.

En este trabajo, siguiendo la línea de investigación mencionada, escribimos los resultados de una experiencia en la que se combina la técnica de entrevista estructurada con respuesta libre y la realización de una experiencia de simulación relacionada con el problema clásico del hospital de Kahneman y Tversky (1972). Concluimos la posibilidad de modificación de esta heurística, en función del resultado de la simulación.

DESCRIPCION DE LA EXPERIENCIA

La experiencia fue efectuada individualmente a un total de 20 alumnos: 10 de ellos, estudiantes en el primer año de bachillerato, con 14 años de edad y otros 10 futuros profesores en el primer año de formación, con una edad de 19 años. Hemos designado figuradamente como P1, P2, ...P10 a los alumnos de bachillerato y como M1, M2,...M10 a los futuros profesores, utilizando estos códigos en el texto del trabajo, para referirnos a ellos. La sesión de trabajo con cada alumno consistió en la realización de una experiencia de simulación, combinada con una serie de preguntas sobre los resultados previstos y los obtenidos en las experiencias. Todas las entrevistas fueron registradas y el alumno cumplimentó asimismo un formulario con sus respuestas y los resultados de las simulaciones. Los ítemes fueron los siguientes:

Ítem 1

En la maternidad de la ciudad X están muy interesados en prever el número de recién nacidos que serán varones o hembras, con objeto de disponer de suficiente ropa según el sexo del recién nacido. Por este motivo han ideado el siguiente sistema de registro: (Se incluía un gráfico tomado de Holmes y cols. (1989))

¿Cual de estos casos te parece más probable?

A) Que entre los próximos 10 niños que nazcan, más de 8 sean varones

B) Que entre los próximos 100 niños que nazcan más de 80 sean varones.

C) Las dos cosas anteriores son igual de probables

Razona tu respuesta

Ítem 2

¿Qué te parece más probable para los próximos 10 nacimientos?

A) La fracción de chicos será mayor o igual a 7/19

B) La fracción de chicos será menor o igual a 3/10

C) La fracción de chicos estará comprendida entre 4/10 y 6/10

Razona tu respuesta

Realiza una simulación y rellena el gráfico con tus resultados.

Ítem 3

Fíjate en el gráfico que representa la variación de la fracción de varones, conforme aumenta el número de nacimientos. ¿En qué parte de este gráfico crees que será más probable que la proporción de varones está próxima a 0.5?

A) En los 10 primeros nacimientos

B) del 11 al 20

C) del 26 al 40

D) En todas partes por igual

Razona tu respuesta

RESULTADOS Y DISCUSION

Al estudiar las respuestas a los tres ítemes se han obtenido diferentes patrones de respuesta que se representan esquemáticamente en la Figura 1.

En la Figura 2 se presenta un esquema, en el que estudia la consistencia de la respuesta en el tercer ítem, en función del resultado obtenido en el experimento de simulación, para los alumnos que manifestaron sesgo de representatividad.

Clasificación de los alumnos según patrones de respuestas a los ítemes					
Respuestas a los ítemes			Nº de casos	Alumnos con esta respuesta	
1º	2º	3º			
A	C	A	1	P11	
A	C	B	1	P2	
A	D	C	1	P1	
B	B	C	1	M15	
B	C	A	1	P10	
C	A	A	1	M19	
C	A	C	1	M16	
C	B	C	1	P12	
C	B	D	1	M18	
C	C	A	3	P6 ; M7 ; M9	
C	C	C	5	P3 ; P4 ; P5 ; P13; M17	
C	C	D	2	M8 ; M20	
D	C	C	1	M14	

	ÍTEM 3 CONCUERDA CON LOS ÍTEMES 1 Y 2		ÍTEM 3 NO CONCUERDA CON LOS ÍTEMES 1 Y 2	
	Alumnos		Alumnos	
Resultado de simulación esperado	CCA	P6;M7;M9	CCD	M20
	CCD	M8	CBC	P12
	CAC	M16		
	BCA	P10		
Resultado de simulación no esperado	CCC	M17	CCC	P3;P4;P5;P13
	CAA	M19	CBD	M18
			BBC	M15

CONCLUSIONES

Las principales conclusiones obtenidas del estudio de los patrones de respuestas y argumentos de los alumnos fueron las siguientes:

1) Aunque la mayor parte de los alumnos emplearon aparentemente la heurística de la representatividad en el primer ítem, hemos hallado una gran variedad de matices de aplicación de la misma: comparación de porcentajes sin tener en cuenta el tamaño de la muestra, comparación de la magnitud

relativa de la proporción con el tamaño muestral, confianza en una continuación (en otros casos de una compensación) de la tendencia; estabilización rápida sin tener en cuenta la tendencia anterior o, por el contrario, estabilización a largo plazo.

2) Presencia en ciertos alumnos de una creencia en la mayor fiabilidad de las muestras pequeñas frente a las grandes, concibiendo el azar como un proceso que genera desorden y no confiando en la estabilización de las frecuencias.

3) Influencia notable del resultado obtenido en la simulación sobre la respuesta al último ítem. Como consecuencia, este resultado plantea de nuevo la necesidad de una mayor investigación sobre las implicaciones didácticas de la simulación para la enseñanza de la probabilidad.

REFERENCIAS

GARDFIELD, J. Y DEL MAS, R. (1991). Exploring the stability of student's conceptions of Probability. Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics. University of Dunedin. Otago.

DEL MAS, R. Y GARDFIELD, J. (1991). The use of multiple ítems to identify misconceptions in probabilistic reasoning. Proceedings of the III International Conference on Teaching Statistics. University of Dunedin. Otago.

HOLMES, P. y cols. (1989). Statistics in your world. Foulsham. London.

KAHNEMAN, D. y TVERSKY, A. (1972). Subjective probability: a judgment of representativeness. Cognitive Psychology, 3, 430-454.

WALLSTEN, T. S. (1983). The theoretical status of judgmental heuristic. En R. W. Scholz (Ed): Decision making under uncertainty. Elsevier, Amsterdam.

APROXIMACIONES Y ESTIMACIONES NUMERICAS EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS

Santos Serrano, Daniel

1. APROXIMACIONES NUMERICAS EN UN EJEMPLO CONCRETO

Recibimos desde todas las direcciones una cantidad enorme de información que contiene cifras, a través de los medios de información, en folletos explicativos de funcionamiento de aparatos, en ofertas de compra, en recibos de distintos servicios. Nos vemos en la obligación de trabajar con números "extensos".

Con el análisis puntual del recibo del consumo de energía eléctrica, ejemplificaremos con mayor claridad la necesidad de obtener la información que los números contienen. El importe del siguiente recibo de una compañía eléctrica es de 4.789 pts. Sigamos su obtención a partir de una única variable; el consumo (165 KWH)

ENTIDAD: IBERDROLA II S.A. (HIDROLA) NIF: A28805171		TITULAR:	
		MONTEJO ERRAZ, CARLOS	
BORRA, AVINGUDA 6 BA XERESA		* POTEN 3,3KW*2.00* (A)PTS 1667	
TIPO ESTIMADA IECT. ANT CONSUMO CAR ABO		* ENERG 115KWH* (B)PTS 7367	
ENERG 744 579 165		* *	
PER.: 260297 231791 BDT.150192		* EQUIPO MEDIDA (E 356) 209	
TARIFA : 20		* IVA 13% BASE 4738 551	
(A)= (57* 254 + 8*243)/65= 252,646		* *	
(B)= (57*14,37+ 8*13,93)/65= 14,316		* NFACT: 002043386/8	
IMPORTE		4.789,00	
TOTAL		4.789,00	
NUM. CUENTA		CI. CONCEPTO	
0587465		VALORACION	
		/1 10-0392	

Hay una parte fija -denominada "Término de Potencia (POTEN, en el recibo)- que resulta de multiplicar $3,3 * 2 * (A)$. El valor de (A) viene de una media ponderada cuyo cálculo se incluye en el recibo: $(A) = (57*254 + 8*243)/65 = 252,6461538$.

Hay también otra parte variable -llamada "Consumo de Energía" (ENERG, en el recibo)- calculada multiplicando el consumo por (B) que, a su vez, se calcula así: $(B) = (57*14,37 + 8*13,93)/65 = 14,31584615$.

Los valores de (A) y (B) no figuran exactos en el recibo. Respectivamente se ha escrito: (A)=252,646, (B)=14,316.

Para el cálculo de POTEN y ENERG, estos valores ya aproximados darían, respectivamente, 1.667,4636 pts. y 2.362,14 pts. En el recibo estos cuatro valores se han tomado aproximados con diferente criterios: con tres decimales exactos -los dos primeros- y con 0 cifras decimales -los dos últimos-.

En tan corto espacio, este ejemplo tan corriente nos introduce a la necesidad de la aproximación. A más abundancia, de nuevo se ha tomado aproximaciones en el cálculo del I.V.A. y en el cálculo del importe total. Con este ejemplo, contextualizamos un tema, ciertamente árido, a partir de la observación de la realidad más habitual.

Las aproximaciones utilizadas facilitan la interpretación de los datos en la resolución de problemas, liberando la mente de interferencias en el razonamiento básico.

Se persigue aquí uno de los objetivos básicos en Matemáticas: que el alumno confíe en sus posibilidades de cálculo aritmético y que controle en todo momento el proceso. Se trata, pues, de un objetivo, simultáneamente, actitudinal y procedimental.

2. ESTIMACIONES EN CALCULOS

Con frecuencia nos vemos sorprendidos por la facilidad que tiene el alumno, al resolver un problema, para aceptar como bueno un resultado incoherente con los datos del mismo, incluso aunque esta incoherencia llegue a chocar con el sentido común.

¿Qué circunstancias dominan en la mente del alumno que obtiene, por ejemplo, como peso de una persona 3.000 Kg. y no revisa "ipso facto" su resolución? Esta situación si chocante, no es, ni mucho menos, infrecuente. Entendemos que el alumno afronta la resolución de problemas con una actitud, cuando menos, pasiva: es una obligación de la que desea librarse cuanto antes. Esta actitud debe cambiarse y hay abundantes estudios en esa dirección.

Pero, aunque partamos con la mejor disposición, la resolución puede haber sido especialmente fatigosa y la posibilidad de error aumenta. Nosotros hemos insistido para que el alumno, ante un problema susceptible de respuesta numérica, estime previamente el resultado del problema. Para lograr nuestro objetivo, hemos pospuesto la resolución sistemática del problema y hemos incidido en los primeros procesos mentales del alumno ante el problema. A tal fin, hemos controlado el tiempo de respuesta del problema hasta límites que NO permiten una solución con garantías de exactitud. Es decir, hemos provocado la resolución aproximada.

Por ejemplo, hemos pedido un valor aproximado para el radio de una esfera de 300 l. de capacidad (tiempo: 30 s.) o para la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 62 y 89 cm. (tiempo: 30 s.)

Un ejemplo de tipo diferente, en el que el alumno ha de utilizar la aproximación en cálculos aritméticos tediosos es el que sigue. A partir de la tabla de los datos de extensión y población (en 1.986) de las comunidades autónomas de la cornisa cantábrica:

	Extensión (Km ²)	Población
Galicia	29.434	2.844.472
Asturias	10.585	1.112.186
Cantabria	5.289	522.664
País Vasco	7.261	2.136.100

Se desea obtener una estimación de la extensión, de la población y, en consecuencia, de la densidad del conjunto de las cuatro comunidades utilizando aproximaciones.

La estimación esperada para la extensión debería dar 52.000 Km² (tomando aproximaciones de millar) y para la población total, 6.500.000 h. (tomando las poblaciones parciales por centenas de millar). Para la densidad, el alumno debería efectuar una división más cómoda que la que implican estos números. Aceptando 50.000 Km² como divisor, la densidad sería, pues, de 130 h/ Km². El alumno debe confrontar estos valores con los valores exactos: 52.569 Km², 6.615.422 h y 126 h./Km².

Creemos que una destreza adecuada en el procedimiento estimativo lograría varios objetivos:

- Aumentaría la actitud positiva hacia la resolución de problemas ya que la distancia enunciado/resultado habría disminuido.
- Confirmaría o descartaría una vía de resolución, señalando los caminos mas fecundos, sin haber hecho un excesivo desgaste psíquico.
- Establecería un "control de calidad" sobre el trabajo, de cálculo "serio" de la solución, provocando el choque, caso de existir, entre esta y la solución previamente encontrada.
- Ejercitaría al alumno en destrezas a las que va a verse obligado a recurrir en la vida corriente, cuando no se dispone del tiempo ni las circunstancias apropiadas para dar una respuesta a situaciones perentorias.

3. EL JUEGO DEL GOLF

Bolt (1986) propone una original actividad que, básicamente, estimula el cálculo mental y la capacidad del alumno para estimar resultados. Hemos

adaptado este juego/actividad a los objetivos de nuestro currículum. La actividad puede realizarse individualmente, por grupos o con el conjunto de la clase. El material necesario se limita a una calculadora y unas tarjetas como las que siguen:

Hoyo 1/(PAR 4)
Halla un número, x , tal que
 $(2x+1)/(x-3)$
esté comprendido entre
8 y 9

Hoyo 2/(PAR 3)
Halla un número, p , tal que
 $p^2 + 2 \cdot p$
esté comprendido entre
40 y 45

El participante toma una tarjeta y debe proponer una solución al ejercicio planteado. Esta debe ser obtenida mediante cálculos no escritos y en un tiempo limitado. Para ese valor propuesto por el participante, el profesor hará el cálculo exacto. De estar comprendido el resultado en el intervalo citado en la tarjeta, el participante se anota un punto. Si no ocurre así, éste dispone de los intentos necesarios para lograrlo, anotándose tantos puntos como intentos precise. De la corrección de "ajuste" que se realiza cada vez que se falla, este juego se llama "golf" por la similitud que guarda con este deporte. La semejanza continúa al proponer en cada tarjeta/hoyo un número medio de intentos: el par de ese hoyo. El grado de complejidad de la expresión incluida en la tarjeta dependerá del nivel educativo en que se practique.

En nuestra experiencia, hemos conseguido con este juego predisponer positivamente al alumno para la realización de cálculos mentales.

4. APROXIMACIONES GEOMÉTRICAS A π

A la luz de las nuevas orientaciones para la enseñanza de las Matemáticas, queremos resaltar la posición central que tienen en la metodología de la clase los aspectos históricos de las mismas. Nótese, en convergencia con lo anterior, que los congresos de mayor relevancia internacional para el aprendizaje de nuestra ciencia, los I.C.M.E.'s, incluyen como uno de los grupos básicos de trabajo el de la relación entre la Historia y la Pedagogía matemáticas.

En este contexto, quisiéramos hacer una rápida revisión a las aproximaciones históricamente más notables del número π , número que goza de la ambigüedad histórica de su fácil concepción y de la dificultad de su cálculo. Muchas de ellas pueden proponerse como ejercicios de geometría a los alumnos de los diferentes niveles, incluido primaria.

Es sabido que los egipcios consideraban que un círculo de 9 unidades de diámetro, equivalía en área a un cuadrado de lado 8 unidades. Esto supone proponer para π un valor de: $256/81=3,1605...$ Se puede dar una interpretación geométrica sencilla: en la figura 1, EF es prácticamente igual a la circunferencia de diámetro AB.

Es también muy conocida la aproximación dada por Arquímedes a partir de un polígono regular de 96 lados: $22/7=3,1428...$

La suma de los lados de los dos primeros polígonos regulares inscritos en la circunferencia, triángulo equilátero y cuadrado, nos proporciona la aproximación

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = 3,1462...$$

En la figura 2, el rectángulo ABCD tiene aproximadamente la misma área que el círculo.

En las construcciones geométricas, se utilizan "rectificaciones" de la circunferencia ingeniosas y de fácil construcción. La de Konchansky (figura 3) consiste en construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es una aproximación rectilínea de la semicircunferencia. La aproximación obtenida es 3,14153 dada por:

$$\sqrt{(40-6\sqrt{3/3})}$$

Mas sorprendente, aunque menos exacta, es la rectificación de Mascheroni, matemático italiano que en su libro "La geometría del compás" (1797) se propuso hacer una geometría con uso exclusivo de ese instrumento. En la construcción se determinan los vértices A, B, C y D consecutivos de un exágono. Haciendo centro en A, con radio AC y centro en D, con el mismo radio, se determina E. Finalmente con centro en B y radio BE, se determina F. El segmento AF es la rectificación del cuadrante de circunferencia (Figura 4). La aproximación para π es 3,14239.... que es el valor de

$$\sqrt{10 - 2\sqrt{6} + 2\sqrt{-9+6\sqrt{6}}}$$

BIBLIOGRAFIA

- BOLT, B.: "Mas actividades matemáticas", Barcelona, Labor, 1984.
 BOYER, C.: "Historia de las Matemáticas", Madrid, Alianza Ed., 1981.
 MASON, J.; BURTON, L.; STACEY, K.: "Pensar matemáticamente", Madrid, MEC-Labor, 1989.
 WARUSFEL, A.: "Los números y sus misterios", Barcelona, Martínez Roca, 1977.

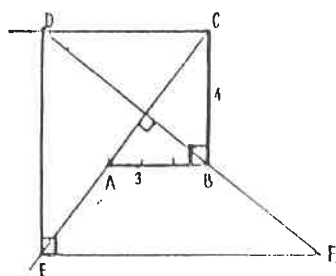


FIGURA 1

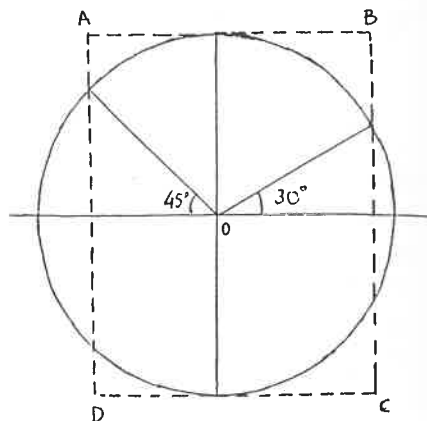


FIGURA 2

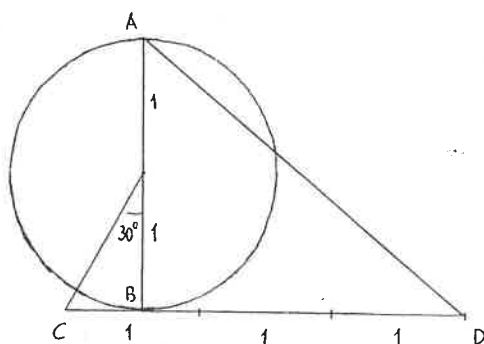


FIGURA 3

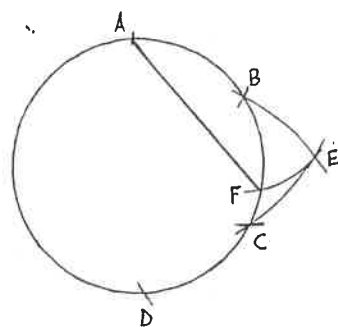


FIGURA 4

MESA 6: EVALUACION EN MATEMATICAS

BIBLIOGRAFIA DE INVESTIGACION SOBRE EVALUACION EN MATEMATICAS: BASE DE DATOS-BIEM.¹

Rico, L. ; Castro, E.; Castro, E.; Fernández, F.; Gil, F.; Moreno, M.F.; Olmo, M. A. del; Segovia, I.

PRESENTACION

La evaluación en Matemáticas se contempla como una institución permanente e importante del Sistema Educativo en todos sus niveles. Por las funciones que satisface interesa de manera prioritaria a alumnos y profesores de matemáticas, a padres y gestores educativos, a especialistas en educación matemática y a los políticos. Webb (1992) ha planteado la cuestión de su interés en los siguientes términos: "¿Es necesaria una teoría diferenciada de la evaluación en Matemáticas?"

Hay razones y motivos fundados en planteamientos de carácter teórico que justifican una respuesta afirmativa: Una teoría específica puede servir para describir, explicar y predecir algunos fenómenos y situaciones dentro del área de la evaluación en matemáticas. En segundo lugar, la investigación en cognición y aprendizaje ha tratado de distinguir entre el conocimiento de los dominios específicos y las destrezas cognitivas generales. En tercer término, la propia naturaleza de las matemáticas y los enfoques pedagógicos para su enseñanza permiten considerar técnicas de valoración específicas en el área de las matemáticas. La propia evolución histórica de la Evaluación en Matemáticas es una de las razones que explican su emergencia como campo diferenciado y avalan su situación actual singularizada.

Aunque la evaluación matemática no ha abandonado gran parte de los instrumentos, métodos y procedimientos que han surgido a lo largo de su evolución histórica, en los últimos años se ha dirigido a especificar el tipo de contenido matemático sobre el que se puede evaluar, profundizando en la comprensión de qué es lo que se entiende por conocer en matemáticas. La concepción de lo que son las matemáticas, junto con una teoría del aprendizaje de las matemáticas y unos propósitos para la evaluación, constituyen el núcleo de la reflexión realizada en los últimos años.

1. Este trabajo se realiza en el marco del Proyecto de Investigación "Evaluación de Conocimientos y Actitudes en Matemáticas". Aprobado y financiado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica de la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación de Educación y Ciencia (PB90 - 0849)

Los estudios internacionales sobre evaluación en matemáticas también han contribuido a consolidar la autonomía en este campo, emergiendo de este modo como un instrumento de análisis y reflexión para el estudio y comparación de los diferentes sistemas de educación matemática que tienen vigencia actualmente.

Finalmente, creemos que la práctica de valorar el conocimiento matemático de los escolares y emitir juicios sobre su calidad y extensión son también un potente argumento a favor de la entidad de la evaluación en matemáticas.

La adaptación de la evaluación en matemáticas a unas condiciones óptimas de objetividad, basada en la simplicidad de instrumentos y el predominio de métodos estadísticos, han proporcionado a la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas dos rasgos esenciales: respetabilidad y poder de decisión. De este modo se ha afianzado considerablemente la posición de las matemáticas en el sistema escolar.

LA BASE DE DATOS BIEM

Los argumentos desarrollados permiten entender la gran variedad y riqueza de estudios e investigaciones sobre evaluación en matemáticas de los últimos años, que no sólo han aumentado en número sino que también han mejorado considerablemente en calidad, de manera que han supuesto una profundización y un tratamiento más sistemático y extenso de los temas relacionados con la evaluación en matemáticas.

De hecho, hemos asistido en los últimos años a la aparición de una bibliografía especializada en este campo. Por ello, es de interés indudable disponer de un listado con los documentos y referencias disponibles sobre evaluación en matemáticas así como de su localización. También nos parece de interés prioritario disponer de criterios para diferenciar entre los diversos contenidos y orientaciones de estos documentos, así como de principios para organizar la variedad de bibliografía disponible. La necesidad de contar con una bibliografía organizada y actualizada sobre el tema nos llevó a diseñar y realizar la base de datos que presentamos en este documento que denominamos BIBLIOGRAFIA DE INVESTIGACION SOBRE EVALUACION EN MATEMATICAS, abreviatura BIEM.

En el plan de trabajo propuesto contemplamos la extensión y desarrollo recientes de la bibliografía sobre este campo y nos pareció importante conocer los estudios realizados en España sobre evaluación matemática.

Las fuentes documentales seleccionadas para consultar lo han sido de acuerdo con dos criterios: publicaciones recientes en este campo, aparecidas dentro de los libros y revistas dedicados al estudio, investigación y divulgación de la Educación Matemática, aproximadamente a partir del año 70, y

publicaciones realizadas en España durante los últimos cincuenta años.

En los documentos consultados hemos encontrado algunas dicotomías entre las que destacamos las siguientes: La dicotomía teoría/práctica. La segunda entre el análisis sistémico de la evaluación y su consideración instrumental. La tercera, la diferencia entre la evaluación como juicio y la valoración como análisis comprensivo, y una cuarta consideración dirigida a distinguir entre la multiplicidad de fuentes de información, necesarias para que la valoración y juicio sobre el conocimiento de los alumnos se haga sobre la mayor cantidad de datos y evidencia posible, y en el otro extremo los estándares de calidad establecidos para los instrumentos singulares de evaluación, como son la fiabilidad y validez.

Estas cuatro dicotomías no son absolutas, sino que expresan en cada caso los extremos de un continuo sobre el que podemos situar la bibliografía y documentación consultada. En base a estas distinciones, hemos seleccionado seis términos clave para BIEM, que son:

Teoría; Curricular; Métodos-Criterios; Instrumentos; Validez; Valoración.

Más adelante, aparece una descripción explícita de cada uno de los términos clave, pero nos parece importante destacar el marco del que proceden.

La base de datos BIEM la hemos organizado en quince campos:

Autor o autores del documento

Año de edición

Título del documento

Tipo de trabajo: libro, artículo, capítulo, etc.

Editores cuando son distintos de los autores

Libro, cuando el documento forma parte de un libro se incluye su título

Ciudad en la que está editado el libro

Editorial o institución que hace la edición.

Nombre Revista si el trabajo aparece en una revista

Volumen-Número que identifica la revista

Páginas: que ocupa el documento citado dentro del libro o revista del que se ha tomado

Palabras Clave señala cual o cuáles de los seis términos clave antes indicados son los que corresponden al documento en cuestión

Especificaciones aquí hemos incluido otros términos clave distintos de los generales, pero que también resultan adecuados para la descripción del documento. Entre las especificaciones aparece el idioma en el que está escrito el documento.

Localización, está dirigido a informar donde se puede localizar el documento, su ubicación.

Resumen expresa brevemente la información esencial obtenida por nosotros al consultar el documento en cuestión.

La elaboración de esta base nos ha permitido profundizar en cuáles son los problemas fundamentales en el campo de la evaluación en matemáticas, qué estudios e investigaciones y con qué métodos y técnicas se están abordando y cuál es el tratamiento teórico y el aparato conceptual con el que hoy día se está trabaja en su comprensión, resolución y sistematización.

TERMINOS CLAVE

Pasamos a glosar cada uno de los términos con el fin de explicitar el criterio o criterios utilizados para su asignación. La caracterización realizada mediante estos términos clave no supone una clasificación de los trabajos; un mismo documento puede caracterizarse por uno o varios términos. Al asignar a un documento un término concreto ponemos de manifiesto una orientación específica del trabajo considerado. Esa orientación es la que pasamos a explicitar.

1.- Teoría. Representación abstracta simplificada de un conjunto de fenómenos que logra una explicación coherente y plausible de los mismos.

Se incluyen aquellos trabajos que presentan de manera sistemática reflexiones e ideas de carácter general con las que se organiza el concepto de evaluación y otras nociones conexas tales como fines y funciones de la evaluación, modos y criterios de valoración, logros y creencias relativas a la evaluación; también estudian las relaciones entre estos conceptos. Las reflexiones se presentan de modo organizado.

2.- Curricular: *Hace referencia a algún aspecto del currículo, es decir, de la elaboración y puesta en práctica de un plan de formación.*

Aparecen bajo este término trabajos que hacen referencia a algún elemento del sistema de enseñanza o que analizan, proponen, y comparan innovaciones curriculares. Hay una serie de indicadores de este término; los más usuales son: logros de los alumnos; dificultades del aprendizaje; competencias de los profesores; inclusión de temas; diferentes tratamientos de temas; desarrollo y clasificación de items según una taxonomía; evaluación como elemento del currículo; estudios comparativos entre currículos; secuenciación de contenidos; competencias de los alumnos en un campo; actividades complementarias al trabajo en el aula.

3.- Métodos, Criterios. *Métodos: Manera sistemática de tratar una materia, problema o cuestión para alcanzar un objetivo. Criterio: Método para realizar evaluaciones y ajustarlas a un sistema de categorías establecido.*

Incluye aquellos trabajos en los que se aportan pautas teóricas o prácticas para la construcción de una prueba de evaluación, así como para realizar valoraciones relativas a las actuaciones de los alumnos ante tareas concretas.

4.- Instrumentos. *Instrumento: Dispositivo diseñado para llevar a cabo cualquier tipo de observación u operación.* (En el caso que nos ocupa, las

observaciones van encaminadas a emitir un juicio sobre la valía o mérito de una actuación o realización relativa al conocimiento matemático, así como a dotar del mayor grado de objetividad y precisión a los juicios emitidos).

Los trabajos incluidos en esta denominación aportan algún tipo de técnica o prueba para recoger información sobre la que hacer la valoración: describen una prueba, test, problemas u otros instrumentos usuales para evaluar en matemáticas; describen como se construye un instrumento; reflexionan sobre la utilidad de un instrumento; aquellos que incluyen total o parcialmente un instrumento; los que presentan baterías o colecciones de tests; aquellos otros que revisan o critican instrumentos ya elaborados; y los que incluyen bancos de items.

5.- Validez: *Se refiere a los criterios establecidos para controlar que las evaluaciones realizadas se ajustan a una o varias de las condiciones teóricas impuestas. El proceso que se sigue para llegar al convencimiento de que la valoración realizada responde a la valía real del objeto o actuación evaluados se denomina proceso de validación.*

Contiene los documentos que aportan una reflexión sobre la validez de un instrumento, por ejemplo: validez de la corrección realizada por los profesores; validez del instrumento; del proceso de evaluación; validez de instrumentos traducidos; validez de las jerarquías de aprendizaje mediante previsión de tareas; validez de la interpretación de los resultados, etc.

6.- Valoración. *Valorar: Emitir un juicio sobre la utilidad de un objeto o acción, relativa a su capacidad o disponibilidad probada para realizar alguna función que se le asigne.*

También por valorar se entiende la consideración comprensiva del funcionamiento de un grupo o individuo en matemáticas o en la aplicación de las matemáticas para hacer inferencias acerca del conocimiento que tienen con el fin de establecer su estado actual o bien guiar hacia aprendizajes posteriores.

Se incluyen en este término trabajos en los que se realizan juicios relativos a los logros o deficiencias de los alumnos en el aprendizaje de las matemáticas, los que hacen juicios sobre un instrumento, sobre los resultados de un estudio, sobre la formación o información recibidas y cómo se pone de manifiesto al aplicar un instrumento; también se incluyen aquí los juicios derivados por diferencias de carácter social. Además se incluyen los trabajos en los que se considera la actuación matemática de un individuo o grupo en una variedad de contextos.

BIBLIOGRAFIA:

Webb, N. L. (1992). "Assessment of students' knowledge of mathematics: steps toward a theory". En *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* Edt. por D.A. Grouws. N.C.T.M. Macmillan Publishing Company. New York.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1990) Vocabulario Científico y Técnico. Madrid: Espasa-Calpe.

CONSTRUCCION DE INSTRUMENTOS DE MEDIDA PARA EVALUAR LAS MATEMATICAS

J.F. Lukas; C. Santiago; I. Dendaluze y L. Joaristi.

1. INTRODUCCION

En el sistema educativo actual nadie pone en duda la importancia que tienen las matemáticas, tanto para el desarrollo de las habilidades propias del área, como para posteriores aprendizajes. Sin embargo en el Estado Español en general y en el País Vasco en particular, apenas existen instrumentos de medida normalizados para evaluar el rendimiento de los alumnos en matemáticas. En vista de esta situación en 1990 comenzamos con esta investigación con la que pretendemos cubrir una laguna existente. En la primera fase de la investigación nos hemos centrado en 6º de EGB, aunque la intención sea continuar con otros cursos. El objetivo general de la investigación ha sido construir dos instrumentos de medida (uno en euskara y otro en castellano) para evaluar el rendimiento en matemáticas. Junto a esto se han recogido datos acerca de algunos ítems para la construcción de un banco de ítems que pudiera ser utilizado por los profesores para construir sus propias pruebas.

El objetivo de esta comunicación es relatar el proceso seguido en la construcción de los instrumentos de medida y señalar los resultados obtenidos.

2. PROCESO DE CONSTRUCCION

2.1. Redacción de los ítems

Lógicamente el primer paso consistió en la redacción de ítems para poner en funcionamiento el comportamiento que pretendíamos evaluar. Se decidió que los ítems de elección múltiple de 4 opciones eran los más adecuados a la edad y contenidos que se iban a medir. Por lo tanto, basándonos en los Programas Renovados de la EGB editado por el M.E.C. y sobre todo en el libro Orientaciones para las Matemáticas del Ciclo Superior editado por el Gobierno Vasco se redactaron un total de 200 ítems (tanto en euskara, como en castellano) recogiendo todos los objetivos propuestos en los mencionados libros. De esta forma teníamos ítems pertenecientes a 4 bloques de contenido diferentes: conjuntos numéricos o aritmética, geometría, proporcionalidad y estadística. Obviamente, el número de ítems sobre cada contenido variaba en función de la importancia que se les ha otorgado desde el Gobierno.

Además de conocer el contenido al que pertenecía cada ítem y el objetivo que pretendía medir, nos interesaba concretar el tipo de proceso mental que

cada ítem medía. Por ello y siguiendo la taxonomía de Bloom (1971), distinguimos tres procesos mentales: cálculo-conocimiento, comprensión y aplicación. En los ítems de cálculo-conocimiento, el alumno tiene que, o bien, resolver alguna operación aritmética ("cuánto es $2/5 + 3/8$ ") o, señalar algún conocimiento que ha sido asimilado de memoria. En los ítems de comprensión se pide al alumno que demuestre que ha entendido algún aspecto que ha sido memorizado y aprendido. En el proceso mental de comprensión el alumno tiene que saber que es lo que se le está comunicando y es capaz de expresarlo de otra manera ("Si dividimos Y pesetas para cuatro personas en cuatro partes iguales, ¿cuántas pesetas recibirá cada persona?"). Por último, en el proceso mental de aplicación se le pide al alumno que utilice lo aprendido en una situación nueva. Se le pide algo más que la comprensión puesto que el comprender una abstracción no supone que será capaz de aplicarla en una situación nueva. En matemáticas los ítems típicos de aplicación serían los problemas matemáticos. Esta subdivisión por contenidos y procesos permite que en el test se puedan tener dos tipos de subtests.

2.2. Prueba piloto

El siguiente paso fue el aplicar la prueba piloto. Para ello, una vez redactadas las instrucciones pertinentes, entrenar a los aplicadores y seleccionar los ítems que entrarían en el test, se aplicó a dos muestras de 150 sujetos cada una (el test de euskera a alumnos escolarizados en euskera y el de castellano a alumnos escolarizados en castellano).

Realizamos el análisis de los tests en general y de los ítems en particular mediante el programa ITEMAN. A partir de aquí elegimos los 45 ítems que completarían la prueba. En esta selección el primer requisito era que su funcionamiento a nivel estadístico hubiera sido correcto. Posteriormente siguiendo criterios de importancia del contenido y proceso mental que medían se completaron los dos tests. Los ítems están distribuidos en el test de la siguiente manera.

P R O C E S O S	CONOCIMIENTOS						
		Aritmética	Estadística	Geometría	Proporción		
	Cálculo	11 ítems	0 ítems	2 ítems	0 ítems	13	29%
	Comprensión	13 ítems	0 ítems	2 ítems	2 ítems	17	38%
	Aplicación	1 ítems	2 ítems	5 ítems	7 ítems	15	33%
		25 56%	2 4%	9 20%	9 20%	45 ítem	

2.2. Aplicación definitiva

La aplicación definitiva se realizó en dos fases. En la primera, que se hizo en mayo de 1991, se aplicó el test MATEUS6 (la versión en euskera) a una muestra de 592 sujetos de 6º de EGB escolarizados en euskera pertenecientes a la Comunidad Autónoma Vasca. Para obtener la muestra se siguió el muestreo aleatorio proporcional estratificado. En total se aplicó el test en 48 aulas pertenecientes a 40 centros escolares. Pero sólo se aplicó el test al 50% de los alumnos de cada clase (elegidos al azar). A cada uno de los otros dos 25% restantes se les aplicó una muestra de ítems que no aparecían en el test para obtener datos e ir completando el banco de ítems.

La segunda fase se llevó a cabo en mayo de 1992. En ésta aplicamos la versión en castellano de la prueba (MATCAS6) también a una muestra aleatoria, elegida siguiendo un muestreo proporcional estratificado de alumnos de EGB escolarizados en castellano de la Comunidad Autónoma Vasca. En este caso la muestra la completaron 1076 alumnos.

Paralelamente a la recogida de datos, se pidió a los profesores de los alumnos que estaban siendo testados, la opinión que tenían del instrumento de medida. Para ello se les pasó un cuestionario siguiendo las prescripciones del Método de Ebel para el establecimiento del punto de corte de un test criterial. Antes de seguir adelante es conveniente aclarar que si bien en el test se establece un punto de corte, no ha sido el objetivo construir un test criterial. Quede bien claro pues, que se trata de un test normativo y que por ello la interpretación de las puntuaciones debe hacerse en función de las puntuaciones obtenidas por el grupo normativo. Sin embargo, lo interesante de la utilización del Método de Ebel reside en que podemos obtener información de los profesores acerca de la dificultad y relevancia que poseen los ítems utilizados en este instrumento. Para ello se aplicó un cuestionario donde se pedía que clasificaran los ítems en base a dos dimensiones diferentes. Por una parte el grado de dificultad (fácil, medio, difícil) que a su juicio tenía cada una de las preguntas del test. Y, por otra, el grado de relevancia (esencial, importante, aceptable o cuestionable) del contenido de la pregunta respecto a los objetivos de matemáticas de 6º de EGB.

3. RESULTADOS

3.1. Fiabilidad

La fiabilidad como consistencia de la medida es una de las características más importantes de un test. Expresa la precisión (consistencia o estabilidad) de las puntuaciones y nos señala hasta qué punto las medidas carecen de errores aleatorios.

Si bien, para calcular el Coeficiente de Fiabilidad existen diferentes métodos, en este test se ha elegido el Coeficiente Alfa de Cronbach,

utilizando la fórmula 20 de Kuder-Richardson (Coeficiente de Consistencia Interna). En la siguiente tabla se muestran los Coeficientes de Fiabilidad de los tests y de los diferentes subtests.

	COEFICIENTE DE FIABILIDAD	
	MATCAS 6	MATEUS 6
TOTAL	0,872	0,859
ARITMETICA	0,808	0,800
ESTADISTICA	0,099	0,099
PROPORCIONALIDAD	0,689	0,689
GEOMETRIA	0,598	0,570
CALCULO	0,722	0,697
COMPENSION	0,719	0,681
APLICACION	0,707	0,695

Mirando los diferentes índices de la tabla se puede comprobar como éstos varían de un subtest a otro y el usuario tendrá que tenerlos presentes cuando quiera interpretar las puntuaciones. Cuanto menor sea la Fiabilidad, menos garantías tendrán los juicios que se hagan sobre los sujetos.

3.2. Validez

La validez de un instrumento de medida no es más que la comprobación de hasta que punto cumple sus objetivos. Es decir, si realmente mide lo que pretende medir. Para probar la validez de un test se pueden seguir diferentes procedimientos a partir de los cuales se hablará de diferentes tipos de validez. En este test se han comprobado dos tipos de validez: validez de contenido y validez de criterio. En el primer tipo se trata de comprobar hasta que punto los contenidos del test recogen los objetivos que pretende medir. Este tipo de validez es muy importante en los tests de rendimiento. En este caso, por medio de un análisis cualitativo, se comprobó en qué medida los objetivos de matemáticas de 6º de EGB han sido recogidos por los items que contiene el test. También es importante señalar que entre las respuestas de los profesores al cuestionario acerca de la relevancia del contenido de la prueba, en la mayoría de los items más del 75% los consideró como esenciales o importantes y sólo dos items superaron el 10% como cuestionables.

Para calcular la validez de criterio se correlacionan las puntuaciones obtenidas del test con algún criterio externo, en este caso se correlacionaron con la calificación obtenida por los alumnos en matemáticas en 6º de EGB. En la siguiente tabla se presentan los diferentes valores obtenidos al correlacionar los tests y los diferentes subtests con el criterio externo.

RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

MATCAS 6 MATEUS 6

TOTAL	0,563**	0,538**
ARITMETICA	0,557**	0,471**
ESTADISTICA	0,183**	0,271**
GEOMETRIA	0,314**	0,315**
PROPORCIONALIDAD	0,465**	0,383**
CALCULO	0,521**	0,361**
COMPENSION	0,521**	0,528**
APLICACION	0,415**	0,497**

3.3. Baremación

Por último, para interpretar las puntuaciones del test se construyeron unas escalas normalizadas de dos tipos: puntuaciones centiles (que indican para cada puntuación directa el tanto por cien de sujetos que obtienen una puntuación inferior en la muestra utilizada) y eneatis (que es una escala de nueve unidades).

4. CONCLUSIONES

Nos parece que estos test pueden ser de utilidad, en general para las personas que trabajan en el mundo de la educación y en particular para los profesores de Matemáticas del Ciclo Superior ya que pueden ser utilizados con los siguientes objetivos:

- 1.- Probar el desarrollo de todo el grupo en general y el de cada alumno en particular al término de 6º de EGB.
- 2.- Mostrar quienes han sido los alumnos que han conseguido alcanzar los objetivos mínimos.
- 3.- Diagnosticar al comienzo de 7º de EGB los conocimientos del grupo y de cada alumno para en base a ellos poder diseñar problemas adecuados.
- 4.- Analizar y orientar a los alumnos con bajo rendimiento en matemáticas.
- 5.- Realizar investigaciones.

BIBLIOGRAFIA

- Arnal, J. y Arnal, N. (1987). *Estudio de los resultados cuantitativos de una evaluación*. Barcelona: PPU.
- Arnal, J. (1988). *Elaboración y validación de un test de instrucción*. Tomo I y II. Valencia: Promolibro.
- Bloom eta al (1971). *Taxonomía de los objetivos de la educación. Ambito del conocimiento*. Tomo I. Buenos Aires: Ateneo.
- Ebel, R. L. (1979). *Essentials of educacional measurement*. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall.
- Eusko Jaurlaritz (1984). *Goi zikloko matematikarako orientabideak*. Gasteiz: Eusko Jaurlaritzaren Argitalpen Zerbitzu Nagusia.
- Jornet, J. M. (1986). *Una aproximación teorico-empírica a los Métodos de Medición de Referencia Criterial*. Valencia: Tesis Doctoral sin publicar.
- Lukas, J.F., Santiago, C., Dendaluz, I. eta Joaristi, L. (1992). "Matematika-errendimendua 6. mailan. Zenbait aldagairen eragina". *Tantak*, 7. 71-86.
- Lukas, J.F., Santiago, C., Dendaluz, I. y Joaristi, L. (1993). *MATCAS6. Test para medir el rendimiento en matemáticas*. Universidad del País Vasco. En prensa.
- Lukas, J.F., Santiago, C., Dendaluz, I. eta Joaristi, L. (1993). *MATEUS6. Matematikako errendimendua neurtzeko testa*. Euskal Herriko Unibertsitatea. Prentsan.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1981). *Programas renovados de la Educación General Básica. Ciclo Superior*. Madrid: Escuela Española.
- Muñiz, J. (1992). *Teoría clásica de los tests*. Madrid: Pirámide.
- Santiago, C., Lukas, J.F., Dendaluz, I. y Joaristi, L. (1993). "La influencia de ciertas variables en el rendimiento en matemáticas en 6º de EGB". En prensa.

EVALUACION DEL APRENDIZAJE EN MATEMATICAS: INSTRUMENTOS DE EVALUACION Y CUESTIONES DE INVESTIGACION

Isolina Oliveira y Judith Silva Pereira

INTRODUCCION

El estudio presentado se realizó en el ámbito del Departamento de Evaluación Pedagógica (DAP) del Instituto de Inovação Educacional (IIE) en Lisboa.

La investigación fue dirigida por el Equipo de Proyectos de Instrumentos de Evaluación del Aprendizaje, y su primera fase transcurrió en el curso académico 1991-92.

Los nuevos programas de Matemáticas de enseñanza básica (1º, 2º y 3º ciclo) introducen cambios a nivel de contenidos y de enseñanza, apuntando como principales finalidades: el desarrollo de capacidades y actitudes, adquisición de conocimientos y técnicas para su aplicación.

Por otro lado, es manifiesto que la evaluación en Matemáticas debe dar información sobre:

- * El conocimiento y comprensión de los conceptos y métodos.
- * La capacidad de utilizar el lenguaje matemático para comunicar ideas.
- * La capacidad para aplicar conocimientos en la resolución de problemas cotidianos, de Matemáticas o de otras disciplinas.
- * La capacidad para racionalizar y analizar.
- * La actitud en relación a las Matemáticas, y en particular su confianza por hacer Matemáticas.
- * La perseverancia y el cuidado puesto en la realización de los trabajos.
- * La cooperación en los trabajos en grupo.

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Los objetivos de este estudio deben ser encuadrados en el desarrollo dado a los métodos de evaluación. De hecho, actualmente se considera necesario desarrollar diferentes instrumentos que contribuyan, de modo significativo, a la concienciación de profesores y alumnos sobre los progresos y dificultades de éstos y las consecuencias de las tomas de decisión.

En este sentido, se desarrolló un test de evaluación del aprendizaje con función de diagnóstico, dándole más importancia a los procesos de resolución de problemas y explorando varias técnicas para su análisis. Para ello había que construir un conjunto de ítems relativos a varios dominios con determinadas características de naturaleza pedagógica y psicométrica en el que hubiese consonancia entre el currículo, los métodos y la evaluación. Era también

objetivo de este estudio contribuir al análisis y la clasificación de los procesos de resolución de problemas. Con la aplicación de diferentes técnicas de evaluación se pretendía saber las posibilidades de aplicación de las mismas en el aula.

METODOLOGIA

Para la selección de la muestra contactamos con las delegadas de Matemáticas de dos escuelas C+S (una del medio rural, otra del medio urbano, siendo ambas de una dimensión medio) del área de Lisboa, ya que se pretendía un trabajo sistemático y de "feedback" regular con los profesores y alumnos.

La muestra estaba constituida por 100 alumnos y se hizo una ficha de características de los mismos, con el fin de facilitar a los futuros estudiosos del test un cuadro referencial relativo al grupo.

DESARROLLO DEL TEST

Para la concepción de los ítem se tomó como referencia el nuevo programa del 2º ciclo de Matemáticas, que se hallaba en el primer año experimental en 6º año de escolaridad.

Como era un test de referencia criterial con el que se pretendía evaluar el desarrollo de los alumnos, las propuestas para la elaboración de los ítems estuvieron en consonancia entre éstos y el currículo, en cada uno de los diferentes dominios: Números y Cálculo; Geometría, Estadística y Proporcionalidad y Resolución de Problemas, así como las actividades de enseñanza propuestas en el programa.

Después del análisis del programa, se realizó una consulta bibliográfica, particularmente de libros didácticos, que servirían de apoyo a los profesores durante la experiencia de los nuevos programas o de otros elaborados por ellos.

Los ítems confeccionados para este estudio pretendían evaluar la comprensión de conceptos matemáticos, las aptitudes relativas a la aplicación de las Matemáticas en varias situaciones, las aptitudes relativas a problemas que necesiten para su resolución diversas estrategias y capacidad de los alumnos para elaborar un plan de investigación matemática.

Hay que destacar que, particularmente en la resolución de problemas, no siempre es claro que se evalúe exactamente las mismas aptitudes de cada alumno. Para un mismo problema, alumnos con diferentes edades y diferentes experiencias de aprendizaje pueden ser comparados con criterios distintos. Un problema puede ser un ejercicio de rutina para un alumno y para otro puede ser un reto, necesitando creatividad para su resolución.

En la construcción de los ítems y la concepción del test estuvo subyacente una rejilla bi-dimensional de contenidos/procesos que fue elaborada en base al análisis del programa.

En la Tabla 1, se muestra la distribución de los ítems por los dominios y niveles de procesos cognitivos considerados. Como se puede observar se construyeron 50 ítems (un ítem puede contener más de un dominio y una variedad de procesos), en atención a los dominios considerados en el programa y los tres niveles de procesos ya referidos.

Tabla 1. Distribución de los ítems por Dominio y por Proceso Cognitivo.

	Número/Cálculo	Geometría	Estadística	Proporcionalidad	TOTAL
Comprensión conceptual	4	3	3	2	12
Conocimiento de los procedimientos	14	4	2	4	24
Resolución de problemas	5*	5	6*		16
TOTAL	23	12	11	6	50

* Hubo problemas que fueron incluidos simultáneamente en estos dominios.

Se consideró que la Comprensión de Conceptos requería la comprensión de hechos y conceptos matemáticos, el Conocimiento de Procedimientos, la aplicación de conocimientos y conceptos en la resolución de problemas y la Resolución de Problemas la aplicación de varias aptitudes a una situación problemática no rutinaria.

En la construcción de los ítems se utilizaron varios tipos de formatos: Ítems de respuesta estructurada, siempre que se pretendiera comprobar la comprensión de conceptos y el conocimiento de los procedimientos. Para evaluar las capacidades de comunicación y de resolución de situaciones problemáticas, se confeccionaron ítems de respuesta no estructurada.

En la aplicación de cada conjunto de ítems se pidió a los profesores, el cumplimiento de un cuestionario acompañado de una lista de objetivos, también mantuvimos un diálogo con los profesores y alumnos con el objetivo de hacer un análisis de los ítems desde el punto de vista pedagógico. Así mismo se realizó un análisis psicométrico de los ítems.

CLASIFICACION DE LOS ITEMS

La evaluación de la capacidad del alumno en la resolución de problemas no se puede limitar a comprobar si la respuesta está correcta o no. Se debe intentar evaluar los procesos y las aptitudes manifestadas a lo largo de la resolución, en el sentido de detectar lo que aún no está dominado y el por qué.

En el momento actual de la investigación, se sabe que hay un conjunto de técnicas inherentes al proceso de resolución de problemas que son susceptibles de ser enseñadas y aprendidas y que pueden contribuir a mejorar el cumplimiento de los alumnos (Fernandes, 1988).

Del conjunto de técnicas experimentadas se utilizaron las siguientes: técnica de evaluación analítica que consiste en identificar, en primer lugar, las posibles fases de los procesos utilizados en la resolución de problemas y posteriormente especificar un conjunto de posibles valores a atribuir a las citadas fases y la lógica utilizada, que testifica un modelo específico relativo al proceso de pensamiento desarrollado en la resolución de problemas; no se puntúa cada una de las fases pero se atribuye una cotización para la solución final. La escala de clasificación desarrollada por Charles y al (1987) y adaptada por Fernandes (1988) constituyó el modelo de base para la corrección de los procesos de resolución.

Respecto a realización de los tres conjuntos de items se adaptó al calendario del año lectivo y a la planificación efectuada por los profesores de los grupos constituyentes de la muestra.

RESULTADOS

Los resultados presentados se refieren a las características de los grupos, al análisis de los items y al cumplimiento de los alumnos.

Por no considerarlo oportuno no se presentan los datos relativos al análisis de las tareas.

Las características de los cuatro turnos que participaron en el estudio se manifiestan en la Tabla 2.

Tabla 2. Características de los turnos A, B, C y D

	A	B	C	D	f	% TOTAL
Nº de alumnos	22	27	26	25	100	100
Edad:						
– menos o igual de 12 años	15	22	23	22	82	82
– 13 y 14 años	7	5	3	3	18	18
Sexo:						
– masculino	14	12	16	16	58	58
– femenino	8	15	10	9	42	42
Alumnos repetidores:						
– 1 año	7	5	-	3	15	15
– 2 años o más	4	4	2	-	10	10
Alumnos con necesidades educativas especiales:	7	1	1	6	15	15
Capacidad de los encargados de educación:						
– 2º Ciclo o menos	17	13	10	5	45	45
– 3º Cido o Est. Secundarios	4	11	12	11	38	38
– Universidad	1	3	4	8	16	16
Profesión de los encargados de educación:						
– Trabajadores manuales	17	14	10	5	46	46
– Trabajadores en servicios	4	10	12	11	37	37
– Trabajadores intelectuales	1	3	4	8	16	16

En el análisis de la tabla se verifica que hay una gran heterogeneidad en relación a las variables edad, número de alumnos con necesidades educativas especiales, número de años que los alumnos han repetido y el estrato socio-económico de los mismos.

ANALISIS DE LOS ITEMS

El análisis de los items se basó en dos aspectos: uno de naturaleza pedagógica y otro de naturaleza psicométrica.

En relación al primero se pretende hacer un estudio de la adecuación, lenguaje y ambigüedad de los items. En este sentido, las sugerencias presentadas por los profesores en las sesiones de trabajo y en el cuestionario cumplimentado contribuyeron a la reformulación de los items. Se consideraron también los comentarios que los alumnos hicieron oralmente o

por escrito, así mismo se solicitó la orientación de un especialista en Educación Matemática.

En cuanto a la segunda, el perfeccionamiento de los items se hizo a través de un análisis cuantitativo, calculando el índice de dificultad y el índice de discriminación.

CUMPLIMIENTO DE LOS ALUMNOS

En el cumplimiento de los alumnos se consideraron los resultados medios relativos a cada items de los tres conjuntos: Números y Cálculo; Geometría, Estadística y Proporcionalidad y Resolución de Problemas.

En el dominio Números y Cálculo los resultados medios de los items nos dice respecto de la comprensión de conceptos que las tareas que resuelven en los problemas de rutina son francamente más elevadas que las referidas a los items categorizados como situaciones nuevas.

En el dominio Geometría, Estadística y Proporcionalidad se constata que los items referentes a conceptos geométricos presentan clasificaciones medias elevadas. En cuanto a los items que exigen un trazado de figuras geométricas las clasificaciones medias son mucho más bajas (10% y 20% respectivamente), principalmente porque las respuestas no presentan rigor y precisión en la construcción de las referidas figuras. Lo mismo ocurre en relación a los items que requieren una explicación de razonamiento por parte del alumno, ya en el dominio de Geometría ya en Estadística y Proporcionalidad.

El tercer conjunto de items, relativo a Resolución de Problemas, fue elaborado para evaluar las capacidades de los alumnos al utilizar heurísticas diversas y probar aptitudes complejas que requieren del alumno saberse organizar, integrar y sintetizar el conocimiento; en definitiva, usar información para resolver nuevas situaciones. La resolución de los dos últimos problemas consistía en varias sub-tareas abarcando diversos aspectos del conocimiento matemático y de su integración.

Los porcentajes medios obtenidos en los items 1, 2 y 3, referentes a problemas de proceso que necesitaban para su resolución la aplicación de una tabla, trabajar del final hacia adelante y reconocer un patrón, fueron respectivamente del 73%, 52% y 43%.

Para el item 4, cerca del 28% de los alumnos resolvieron el problema, seleccionando las estrategias adecuadas, formulando las hipótesis y justificando la solución.

El item 5 exigía la elaboración de un plano, lo que levantó muchas dudas; cerca del 60% de los alumnos no iniciaron ni una tentativa de respuesta.

DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Del total de items evaluados se seleccionaron ventiocho con los que se elaboró un test piloto constituido por dos secciones: Sección I, formada por veintidós items distribuidos por los cuatro dominios reflejando la importancia atribuida en el programa y con el que se pretende evaluar la adquisición de conceptos y procedimientos; la Sección II, con seis items, que intenta evaluar las capacidades de comunicación y de resolución de problemas.

En el momento actual el test-piloto está siendo aplicado en una muestra representativa de población inmersa en la experiencia de los nuevos programas.

En relación a las técnicas aplicadas en la evaluación de los procesos de Resolución de Problemas, la técnica analítica parece más eficaz cuando el profesor quiere hacer una apreciación del trabajo escrito de cada alumno, en el sentido de conocer mejor sus dificultades, en relación a los métodos heurísticos y a los "errores". La técnica holística parece más adecuada cuando el profesor pretende comparar los resultados de sus alumnos, una vez que el valor final atribuido corresponde a la misma fase en el proceso de resolución de problemas.

No parece posible hacer una evaluación crítica de los procesos sin que se asuma una técnica consistente y sistemática. De otra forma la evaluación será más subjetiva, dado que el evaluador usa siempre criterios, aunque sean implícitos.

A pesar de que en este momento, los resultados presentados no serán relativos al test-piloto, parece interesante discutirlos aquí.

Respecto de las capacidades evaluadas es que el peor resultado estuvo en la resolución de problemas. Parece que hay varios motivos para explicar estos resultados que son concordantes con los obtenidos en el proyecto International Assessment of Educational Progress (IAEP), en el que Portugal participó. Por su importancia se apuntaron dos razones: siendo la resolución de problemas uno de los aspectos innovadores del programa estos alumnos no tuvieron una enseñanza específica en este sentido durante el 1º ciclo; por otro lado, los profesores de los grupos de la muestra referían la poca insistencia en actividades de este tipo y las muchas dificultades que los alumnos tienen en justificar sus razonamientos y tomas de decisiones, principalmente cuando lo hacen por escrito.

Es importante referir, como dice Corte (1990), que el aprendizaje de la resolución de problemas es un proceso largo y gradual que requiere la adquisición integra y la aplicación de las tres categorías siguientes: la aplicación flexible de un conocimiento base bien organizado que incluya conceptos, reglas, principios, fórmulas y algoritmos; métodos heurísticos y capacidades metacognitivas.

Otro aspecto a destacar es el bajo rendimiento de los alumnos en las actividades que exigían comunicar razonamientos, verificar conjeturas y formular argumentos para justificar sus propias opiniones.

Es importante citar como los alumnos avanzan al mismo tiempo superficial y profundamente, pero con un desfase de tiempo, lo que hace difícil saber cuáles son los dominios de los que están seguros en un momento dado (Cardinet, 1986).

En el sentido de completar el estudio, está el proceder a la elaboración de instrumentos de evaluación que faciliten los registros de observación de actitudes en relación a la resolución de problemas, la selección de estrategias, la perseverancia y la colaboración en trabajos en grupos, principalmente el modo en que expresan sus razonamientos y el mayor o menor entusiasmo que tienen en la realización de las actividades.

Por otro lado, parece necesario continuar la investigación relativa a la evaluación de las actividades de resolución de problemas. El análisis del trabajo escrito de los alumnos exige una mayor profundización de las técnicas usadas. En la concepción de los instrumentos de evaluación hay que considerar la fidelidad, la validez, la fidelidad inter-clasificadores y también la ejecutabilidad en grupos en las aulas.

Pensamos que, en una perspectiva de desarrollo, el énfasis no debe estar tanto en la eficacia de la medida como en la descripción del nivel de funcionamiento cognitivo de un alumno.

Este análisis está en consonancia con los principios enunciados en el programa sobre evaluación. Así, éste asume que "la evaluación debe tener un carácter eminentemente formativo, favoreciendo la progresión del alumno. Una evaluación con estas características implica un cambio en la elección de técnicas e instrumentos de evaluación".

BIBLIOGRAFIA

ALLAL, L.; CARDINET, J. Y PERRENOUD, P. (1986). *A Avaliação Formativa num Ensino Diferenciado*. Coimbra: Livraria Almadina.

ANDERSON, J.R. (1990). "Cognitive Psychology and its Implications". New York: W.F. Freeman and Company.

BROWN, S. (1990). "Criterion-referenced assessment" en Entwistle N. (Ed.), *Handbook of Educational ideas and practices* (pp. 865-874). London: Routledge.

CHARLES, R.; LESTER, F. & O'DAFFER, P. (1987). *How to evaluate progress in problem solving*. Reston, VA: The National Council of teachers of Mathematics.

CHASE, C.I. (1978). *Measurement for Educational Evaluation*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

CORTE, E. (1990). "Toward powerful learning environments for the acquisition of problem solving skills". *European Journal of Psychology of Education*, vol. V, nº1, 5-19.

FERNANDES, D. (1988). *Comparison of the effects of two models of instruction on the problem-solving performance of preservice elementary school teachers and on their awareness of the problem-solving strategies they employ*. Tesis Doctoral no publicada. Texas A&M University, College Station. Texas.

LESH, R.; LANDAU, M. & HAMILTON, E. (1983). "Conceptual Models and Applied Mathematical Problem-Solving Research". En Lesh, R. & Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 264-343. New York: Academic Press.

LESTER, F.K. (1983). "Trends and issues in mathematical problem-solving research". En Lesh, R. & Landau, M. (Eds.) *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 229-261. New York: Academic Press.

MARSHALL, S.P. (1989). "Assessing Problem Solving: A Short-Term remedy and a Long-Term Solution". En Charles, R.F. & Silver, E.A. (Eds.) *The teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*, pp. 159-177. Laurence Erlbaum Associates.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia.

SCHOENFELD, A.H. (1982). "Measures of Problem-solving Performance and of Problem-Solving Instruction". *Journal for research in Mathematics Education*, vol.13, nº1, 13-49.

MESA 7: FORMACION DEL PROFESORADO DE MATEMATICAS

LA FORMACION BASICA PARA LA REFORMA DEL PROFESORADO DE MATEMATICAS EN CATALUNYA

J. Ignasi del Blanco i Barnusell

1. PRELIMINARES

El Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya ha elaborado un Plan de Formación Permanente del profesorado que se empezó a aplicar el mes de setiembre de 1989. En la formulación de sus objetivos específicos se hace constar que el Plan pretende: "Facilitar una formación básica en relación a los nuevos contenidos curriculares, estrategias metodológicas y recursos didácticos que permitan al profesorado mejorar su práctica, elaborar sus propias programaciones y participar en proyectos curriculares de centro, de acuerdo con las propuestas curriculares del Departament". El desarrollo de este objetivo lleva a estructurar a la Subdirecció General de Formació Permanent unos programas de formación específicos dirigidos al profesorado de los distintos niveles educativos. En el caso de la Secundaria, se vió claro que la formación se tenía que centrar estos primeros años en la etapa de Secundaria Obligatoria porque esta etapa tiene una aplicación más cercana en el tiempo que el Bachillerato o los Módulos Profesionales y, en segundo lugar, porque sin querer quitar importancia a ninguno de los otros niveles, es la etapa que presenta cambios más importantes al convertirse en obligatoria para todos los alumnos y alumnas.

A continuación se hizo una valoración para determinar si la formación se tenía que ofrecer únicamente de área o había que incluir también una formación general. En principio se vió que era la segunda opción la que debía tomarse, al considerar que uno de los ejes fundamentales en los que se centra esta reforma es en el carácter secundario de las áreas (instrumentos para conseguir unas capacidades generales de los alumnos). Desde este planteamiento, se tuvo en cuenta cuál era la situación actual y las perspectivas de esta reforma desde los institutos. Y todo ello siendo conscientes que la formación, en un momento de cambio del sistema educativo como el que se está empezando a aplicar, es absolutamente necesaria pero no es suficiente. La aplicación de la reforma requiere un esfuerzo considerable de las distintas administraciones educativas en formación, pero también en creación y mejora de centros educativos, aumento de dotaciones materiales, aumento del número de profesores y de profesoras dedicados a los servicios educativos de apoyo, etc.

2. ¿QUE MODELO DE FORMACION?

Planteada la necesidad y con unas limitaciones marcadas por un calendario de aplicación, se analizaron los contenidos que debería de tener esa formación y las modalidades en que se tenía que impartir. Respecto de los contenidos en seguida se vió que se debían de ofrecer unos contenidos básicos mínimos a todo el profesorado y dejar otros a la elección de cada profesor. Respecto de las modalidades se analizaron las ventajas y los inconvenientes de establecer un programa general de formación en centros. Entre las primeras hay que destacar la facilidad de conexión con la práctica docente y la mejora de la calidad educativa en el centro que ya se empieza a producir desde el principio de la formación. Entre los inconvenientes hay que señalar la posibilidad de ambientes cerrados, la cantidad de formadores necesaria y los problemas sobre las decisiones a tomar respecto de que centros se les ofrece en primer lugar y cuáles en último. Con todas estas consideraciones se tomó la decisión de ofrecer un modelo de formación modular, que permitiera diferentes itinerarios formativos personalmente y en grupo, estructurado en dos fases que, en síntesis, se explican a continuación.

FASE 1. Formación Básica para la Reforma. Consiste en un curso de 30 horas de duración, de carácter presencial, cuyo objetivo básico es dar una primera información de las innovaciones más significativas que aporta la reforma, tanto de carácter general como de cada una de las diferentes áreas curriculares de la etapa de secundaria obligatoria. De la planificación, programación y organización se encarga la Subdirecció General de Formació Permanent. La oferta de estas actividades se realiza los cursos 1991-92, 1992-93 y 93-94. Se ofrece en dos modalidades: una extensiva, durante diez miércoles seguidos (un trimestre), tres horas diarias; otra intensiva, durante una semana, a razón de seis horas diarias. La extensiva se ofrece a lo largo del curso académico y la intensiva a principio y a final de curso. Para facilitar la asistencia en la modalidad extensiva se comunicó a los centros en la Resolución de inicio de curso el día y el horario en el cual se impartiría esta formación.

FASE 2. Contempla diferentes posibilidades formativas.

Cursos de Profundización. Son cursos de duración variable entre 15 y 30 horas. Su objetivo fundamental es trabajar aspectos específicos de una área curricular, que en la formación básica ya se han apuntado. Las propuestas concretas de actividades formativas se enmarcan en el contexto de las exigencias que plantea la aplicación del nuevo currículum para la etapa de ESO en cada una de las áreas. Contemplan una fase presencial (de unas 20 horas) y la realización de un proyecto de aplicación al aula. Son organizados por los ICEs de las Universidades de Catalunya, por encargo de la Subdirecció

General de Formació Permanent. Se han empezado a realizar en enero de 1993. Como ejemplos de cursos ya programados para profesores de matemáticas se pueden citar: "La atención a la diversidad en el aula de matemáticas", "Recursos para el aula en geometría", "Recursos para estadística", etc.

Formación en centros. En este momento se encuentra en fase de experimentación. El objetivo de esta modalidad será proporcionar un apoyo a los centros educativos para elaborar el Proyecto Curricular de Centro. Se está trabajando en este momento en su preparación con la finalidad de disponer de los recursos humanos y materiales que van a ser necesarios. La extensión de esta modalidad ha de producirse de manera coherente con el calendario de implantación de la etapa de secundaria obligatoria.

Formación de equipos directivos. En este momento se encuentra en fase de planificación. A partir de una experiencia concreta, se ha definido el modelo de formación, estructurado en un curso presencial de unas 50 horas y unos seminarios de apoyo a la elaboración de proyectos específicos de centro. Los contenidos del curso se centran en temas generales sobre la función directiva y temas específicos de gestión pedagógica, enmarcados en las nuevas necesidades que plantea la nueva ordenación del sistema educativo.

Todas estas acciones se complementan además con las que se realizan a iniciativa de los propios docentes y de las instituciones colaboradoras y que se recogen en los planes de formación de zona.

3. LA FORMACION BASICA PARA LA REFORMA

Se estructura el curso en dos grandes apartados. En el primero, con una duración de 12 horas, se trabajan diferentes temas generales y comunes a todo el profesorado (con independencia del área curricular). En concreto, se analiza la nueva ordenación del sistema educativo, las bases psicopedagógicas que le sirven de base, el modelo curricular adoptado, el papel del profesor y unas ideas generales sobre evaluación, atención a la diversidad, acción tutorial y organización de centros.

En el segundo, de 18 horas, se trabaja por áreas curriculares a partir de un esquema común. En concreto, en el caso de las matemáticas, se realiza el siguiente trabajo.

a) Un análisis del primer nivel de concreción (nivel prescriptivo). Se explican las grandes opciones que han presidido la determinación de los objetivos generales de matemáticas y se justifica la selección de contenidos realizada, en función de los objetivos generales de la etapa. Se relacionan los diferentes bloques y tipos de contenidos con los objetivos terminales prescriptivos. Se intenta hacer una lectura comprensiva de los mismos comparándolos con los correspondientes de matemáticas en la etapa primaria.

b) Análisis de una propuesta de segundo nivel de concreción. En el modelo curricular adoptado por el Departament d'Ensenyament, el segundo nivel de concreción de cada área contiene dos elementos. En primer lugar, un desglose de cada uno de los bloques de contenidos (tanto los referidos a hechos, conceptos y sistemas conceptuales; como los referidos a procedimientos y a actitudes, valores y normas); y, en segundo, una propuesta de distribución de los diferentes contenidos a lo largo de los cuatro cursos de la etapa en ocho créditos (unidades temporales de 35 horas lectivas). Cada centro educativo, en el marco del PCC, tendrá que elaborar o adoptar segundos niveles de concreción de cada área. En el curso de formación básica, y contando con ejemplos de segundo nivel de carácter orientativo, elaborados por el propio Departament d'Ensenyament, se realizan ejercicios prácticos sobre el desglose de los contenidos y sobre su situación temporal.

c) La programación de aula. En esta tercera parte se intenta analizar qué elementos hay que tener presentes en el momento de realizar la programación. A partir de propuestas concretas (una unidad temática en un momento de la etapa), se analizan con detalle la selección de contenidos (de los tres tipos), los objetivos didácticos -subordinados a los terminales- que indicaran el tipo y grado de aprendizaje esperado, las actividades de aprendizaje que se realizaran y las actividades de evaluación. También en este caso en el curso se parte de ejemplos elaborados por el propio Departament d'Ensenyament.

d) Didáctica específica. Pero el curso no ha de quedar reducido a explicar y analizar únicamente estos aspectos curriculares. Es necesario hacer una aproximación al trabajo del aula. Por ello se dedican cuatro horas a aportar algunas ideas sobre didáctica de algunos contenidos en estas edades. Con este espacio temporal está claro que no se puede hacer un trabajo exhaustivo, pero esa no es la finalidad. Únicamente se pretende ver que se pueden seguir estrategias distintas de las habitualmente utilizadas. En el momento de seleccionar cuáles habían de ser los contenidos, quedó claro, a partir del currículum y de la tradición didáctica, que había que priorizar la geometría y la estadística, dos de los bloques que requieren un tratamiento más novedoso y en los cuales pueden ser más necesarios recursos didácticos para el profesorado.

e) La evaluación y la atención a la diversidad. Todo y que estos elementos se han trabajado con carácter general, es necesario particularizar su tratamiento para cada área. De la evaluación se analizan criterios generales y se estudian algunos instrumentos ejemplificadores de los diferentes tipos de evaluación (inicial, formativa y sumativa). En referencia a la diversidad se estudian las posibilidades y los límites que ofrece la opcionalidad en la estructura de créditos en que se organiza la etapa y se plantean algunos criterios generales para dar respuesta a la diversidad en el aula.

4. EL PROFESORADO FORMADOR DE LOS CURSOS DE FORMACION BASICA

La realización de la parte de estos cursos dedicada a matemáticas está a cargo de nueve profesores y profesoras, repartidos por toda Catalunya. Una vez seleccionados tuvieron una formación específica para la tarea encargada, estructurada en dos fases. La primera consistió en un curso de una duración de 60 horas; la segunda, en forma de seminario formado por el equipo de formadores, con una duración de unas 60 horas también, se dedicó específicamente a la elaboración del material de soporte del curso. De la coordinación de todo este trabajo se encargaron tres personas: dos profesores universitarios conocedores de las propuestas curriculares y una profesora, que actúa como formadora y con experiencia en un centro experimental de reforma.

El curso de preparación tuvo 20 horas de formación general (común a todo el profesorado formador) y 40 horas de formación específica de matemáticas. Esta estuvo centrada en los temas que conformaban el programa del curso de formación básica, analizados desde diferentes perspectivas.

Los movimientos de reforma en la Educación Matemáticas, pretenden dar lugar a situaciones que favorezcan la formación de una cultura escolar diferente de la que existe en la actualidad.

Los estudiantes para Profesores (EPs) de Primaria, cuando entran en los programas de formación, proceden de la cultura escolar que se pretende superar.

Para ello creemos que los EPs deben experimentar en sí mismos:

- Nuevas formas de aprender (procesos personal y social de construcción del conocimiento)
- Nuevos contextos en los que se da ese proceso de construcción ...)
- Una nueva "concepción" de la naturaleza del conocimiento matemático (por ejemplo las Matemáticas no son un conjunto de reglas y procedimientos a ser empleados en situaciones de aplicación sino una actividad ...)
- Etc.

En esta dirección se ha diseñado una intervención en los cursos de Matemáticas en la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB de la Universidad de Sevilla, con el objeto de facilitar la "traslación epistemológica": análisis, crítica, cambio de sus concepciones; así como ampliar su comprensión de las Matemáticas.

Una de las intervenciones gira alrededor del **concepto imagen** (estructura cognitiva total que está asociada al concepto, lo que incluye todas las representaciones mentales, propiedades y procesos asociados -Tall y Vinner, 1981, citada en Tall, 1992) de función. Dicha intervención se articula mediante un **módulo**, entendido éste como "distintos entornos de aprendizaje, es decir situaciones en las que la actividad, originada en el proceso de resolución, sea generadora de conocimiento vinculado a la misma y a la tarea propuesta (conocimiento contextualizado)".

Este módulo lo iniciamos pasando un test sobre la noción de función, para detectar algunas ideas que los EPs poseen y que han sido adquiridas en su paso por la escuela.

En esta comunicación presentamos el análisis de algunos de los resultados correspondientes a los dos primeros ítems de dicho test, haciendo una reflexión de los resultados de los demás ítems a la vista del análisis anterior.

II. TEST DE CONTENIDO MATEMATICO ESPECIFICO (FUNCIONES)

A.- OBJETIVOS:

Indagar sobre:

A.1.- Cuál es la definición del concepto de función que los EPs tienen al llegar a la Universidad después de haber finalizado sus estudios en la Enseñanza Secundaria.

A.2.- Cuáles son las principales imágenes y representaciones que usan los EPs de la noción de función, tanto para su identificación como para la resolución de tareas.

B.- METODO:

B.1.- MUESTREO

Se pasó a 250 alumnos de primero de la EU de Magisterio de la Universidad de Sevilla, de un total de 681 alumnos de primer curso. Las especialidades a las que pertenecen los alumnos son: Educación Especial, Educación Física y Preescolar, con un rango de edades comprendido entre 18 y 21 años, siendo el porcentaje de hombres de un 27'4 % y el de mujeres de un 72'6 %. En cuanto al tipo de estudios realizados con anterioridad el porcentaje se distribuyó de la siguiente forma: un 89'3 % han cursado B.U.P. (41'7 % Ciencias, 26'8 % Letras Puras y 20'8 % Opción Mixta), un 9'7 % han cursado F.P. y un 1 % han accedido a la Escuela superando la Prueba de Acceso para mayores de 25 años.

B.2.- CUESTIONARIO:

El cuestionario presentado consistía en siete ítems. Estos se agruparon alrededor de tres bloques: el primero constituido por los ítems 1 y 2, el segundo por los comprendidos entre el 3 y el 6, definiendo el ítem 7 el último de los bloques.

El primer ítem (**¿Qué es una función para ti?**) estaba diseñado para examinar las "definiciones" del concepto de función que tienen los EPs, éstas no tenían que ser necesariamente aquellas que ellos habían recibido a través del profesor o del libro de texto, a lo largo de sus años en la escuela. Las respuestas podían reflejar o bien este recuerdo o sus imágenes mentales basadas en sus experiencias personales con ejemplos o contraejemplos del concepto de función.

El ítem 2 (Pon **cinco ejemplos de funciones**) estaba pensado para distinguir las representaciones mentales que los alumnos llevan unido al concepto de función.

Las restantes cuestiones se pensaron para examinar algunos aspectos del concepto imagen de función que se pudieran deducir de las respuestas. En particular en el ítem 3 al pedir " ... si es posible usar una o más funciones que la describan..." se intentaba llevar a los EPs a activar más de un "aspecto" discreto identificado con los sistemas de categorías utilizados en 1 y 2, lo que

nos debería llevar a la realización de un segundo análisis más integrado del concepto imagen como describiremos a continuación. Por lo tanto el formato del ítem sólo mostraba un aspecto de los considerados en el sistema de categorías (correspondencia, gráfica, ecuación, fórmula, experiencia,...).

Los ítems 4,5,6 están redactados de manera que se presenta una correspondencia con un "formato literal". El término "asigna" en la redacción de estos ítems permite explicitar esa correspondencia/relación de dependencia entre dos subconjuntos numéricos.

Finalmente en el ítem 7 pretendíamos ver la capacidad de los alumnos para interpretar gráficas y relacionarlas con situaciones reales, es decir en la redacción del ítem explícitamente se indicaba la relación situación + gráfica: "Redacta una situación que pueda ser representada por la gráfica..."

B.3.- PROCEDIMIENTO DE ANALISIS:

El cuestionario fue pasado a los estudiantes en su clase. Se pidió que los rellenaran individual y anónimamente, se les dio un tiempo de una hora para su realización y se advirtió además que no tenía ninguna influencia académica.

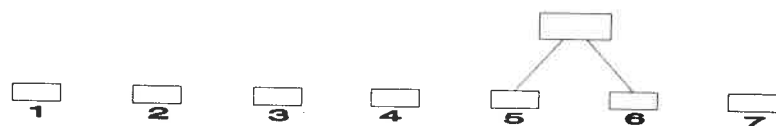
Se realizó un primer análisis de los resultados obtenidos, que consistía en asignar las respuestas a distintas categorías que se detallarán en el apartado siguiente. Algunos casos dudosos fueron discutidos conjuntamente por los autores del trabajo.

En el proceso de análisis seguido algunas respuestas fueron categorizadas en dos apartados, debido a que recogían características correspondientes a dos categorías. Por ejemplo, la respuesta "Una función es una expresión algebraica que podemos representar gráficamente" recoge dos apartados:

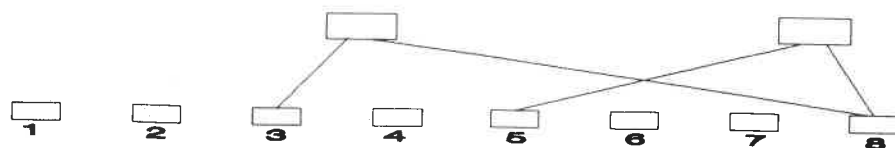
- función como expresión algebraica y
 - que esa expresión algebraica se puede representar gráficamente
- esta respuesta es categorizada en
- fórmula: expresión algebraica o ecuación, y en
 - representación.

Un segundo nivel de análisis permite considerar la combinación entre categorías puesta de manifiesto en la respuestas producidas. De esta manera, apoyados en el "carácter discreto" que proporciona el sistema de categorías utilizado y su combinación posterior, fruto del segundo nivel de análisis realizado, se puede llegar a "describir gráficamente" el concepto imagen de la población encuestada.

DEFINICION:



EJEMPLOS:



C.- CATEGORIAS:

El sistema de categorías utilizado se eligió de la literatura existente sobre el tema, después de una revisión de la misma.

Se utilizaron dos sistemas de categorías. Uno extraído del trabajo de Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989) para el ítem 1 y otro utilizado por Breidenbach, D. y otros (1992) para el ítem 2. Optamos por esta elección ya que las mismas coinciden en gran parte con nuestras ideas que sobre el tema se han ido originando, a partir de la experiencia adquirida en la práctica en el aula.

C.1.- CATEGORIAS DE LAS DEFINICIONES (Vinner, S. y Dreyfus, T. 1989)

El sistema de categorías utilizado para el análisis de las respuestas al ítem 1 es el siguiente:

1.- CORRESPONDENCIA: una función es una correspondencia entre dos conjuntos que asigna a todo elemento del primer conjunto exactamente un elemento del segundo conjunto (definición de Dirichlet-Bourbaki).

(Ejemplo: "Una correspondencia entre dos conjuntos de elementos").

2.- RELACION DE DEPENDENCIA: una función es una relación de dependencia entre dos variables.

(Ejemplos: "Un factor depende de otro".

"Una dependencia entre dos variables").

3.- REGLA: Una función es una regla. De una regla se espera regularidad mientras que una correspondencia puede ser "arbitraria". El dominio y el rango eran mencionados en la primera mientras que en esta, usualmente, no es así.

(Ejemplos: "Algo que conecta el valor de x con el de y ".

"El resultado de cierta regla aplicada a un número que varía").

4.- OPERACION: Una función es una operación o una manipulación (una acción sobre un número dado, generalmente es una operación algebraica que se hace para conseguir la imagen del mismo).

(Ejemplos: "Una operación hecha sobre algunos valores de x que le asigna a los valores de x , un valor de $y=f(x)$ ".

"Una operación").

5.- FORMULA: Una función es una fórmula, una expresión algebraica o una ecuación.

(Ejemplos: "Es una **ecuación** que da una relación entre dos cosas".

"Una **expresión matemática** que da una relación entre dos factores").

6.- REPRESENTACION: La función es identificada con sus representaciones gráfica o simbólica.

(Ejemplos: " $y = f(x)$ ".

"Una colección de números que pueden ser expresados en una gráfica").

7.- OTRAS.

C.2.- CATEGORIAS DE LOS EJEMPLOS (Breidenbach, D. y otros, 1992).

El sistema de categorías utilizado para el análisis del ítem 2 estaba formado por:

1.- Algo que realmente no puede ser interpretado como una función.

2.- No contesta.

3.- Una ecuación con dos o más variables.

4.- Un gráfico.

5.- $F(x)$ = alguna expresión algebraica o trigonométrica.

6.- Expresión algebraica o trigonométrica.

7.- Una experiencia que describa un proceso.

8.- y = alguna expresión algebraica o trigonométrica.

D.- RESULTADOS Y DISCUSION

Presentamos a continuación los resultados (ver ANEXO: "GRAFICAS ESTADISTICAS") y el análisis de los dos primeros ítems, con la intención de hacer un perfil o radiografía de la muestra en relación a la parte del concepto imagen, vinculado a la noción de función, a través de las definiciones y los ejemplos propuestos por los alumnos. Posteriormente aplicaremos estos "perfiles" obtenidos para analizar y comentar los demás resultados obtenidos.

En relación al ítem 1, el aspecto más mencionado de la definición fue la representación gráfica (34%) (no se dió otro tipo de representación) seguido por una fórmula (20%). Es decir, para la muestra de EPs que contestaron el

cuestionario la parte del concepto imagen que se articulaba para contestar a la cuestión relativa a la definición de función fue la identificación con una expresión algebraica y/o el dibujo de una gráfica cartesiana.

Las demás categorías consideradas en el instrumento analítico utilizado mantuvieron el mismo nivel de respuesta, entre el 5'9% y 11'3%. La idea de función como una operación (**acción** sobre un número dado, generalmente es una operación algebraica que se hace para conseguir la imagen de dicho número) fue la menos considerada, sólo el 5'9 % de las respuestas recogían de alguna manera este aspecto del concepto imagen de función.

El que los EPs consideraran en la definición de función el aspecto de fórmula/representación frente a la categoría operación puede indicar una concepción de la noción de función vinculada a su aspecto de **objeto** (significado estático). En este sentido hay que contextualizar estos resultados, y por consiguiente las posibles inferencias, en la forma en que la cultura matemática escolar ha considerado tradicionalmente las expresiones algebraicas vinculadas a las situaciones de enseñanza de las funciones.

Con respecto a los ejemplos de funciones que corresponden a las respuestas del ítem 2, podemos observar que las expresiones algebraicas/trigonómicas, tanto del tipo

$f(x) = \text{expr. algebraica o trigonométrica}$ (con un 39'86 %)
 como $y = \text{expr. algebraica o trigonométrica}$ (con un 23'13 %)

fueron los ejemplos más propuestos, destacando como expresiones algebraicas más frecuentes las polinómicas.

En contraste con el ítem 1, donde la representación gráfica era la de mayor porcentaje, aquí sólo el 4'98 % de los alumnos recurren a ella cuando se trata de poner ejemplos.

El porcentaje más pequeño corresponde a la descripción verbal, que sólo fue utilizada en un 1% de los casos.

A la vista de estos primeros resultados habría que preguntarse el efecto que produce el ítem propuesto sobre la parte del concepto imagen articulada para responderlo. Es decir, ¿por qué al preguntar por la definición las respuestas producidas son mayoritariamente fórmula y representación gráfica y, al preguntar por ejemplos las respuestas más frecuentes son de carácter algebraico? ¿qué relación existe entre lo que pide el ítem y la naturaleza de la respuesta?

Teniendo en cuenta estas preguntas realizamos el análisis de las respuestas producidas en los ítems restantes, los cuales subrayaban la parte del concepto imagen que se ponía en acción al identificar, caracterizar y construir funciones.

En relación a este segundo apartado podemos señalar de una manera muy esquemática que:

A pesar de la formación matemática recibida, en la que el concepto de función suele presentarse ligado a la definición de Dirichlet-Bourbaki, como hemos podido constatar en el estudio realizado por nosotros en los libros de texto correspondientes a los niveles de 7º, 8º de EGB, 1º y 2º de BUP de diferentes editoriales, ésta definición no la usan para resolver los ítems propuestos ni en las definiciones expresadas.

Las funciones discretas no son consideradas funciones.

Una descripción verbal de una situación sólo es considerada función cuando puede ser expresada o representada mediante un gráfico continuo.

Si la representación gráfica es continua la misma se acepta como función, aunque realmente no lo sea. Así por ejemplo, en los ítems 3c4 y 3h, los pocos alumnos que los etiquetan como funciones hacen la representación gráfica uniendo los puntos de manera lineal; mientras que hay un alto porcentaje (77'4 %) de alumnos que admiten el ítem 3c3 como función.

Como muestran los primeros diagramas obtenidos y, su utilización en el análisis de las respuestas del segundo bloque del cuestionario, el conocimiento de los EPs tiene un carácter discreto cuando por el contrario, en su futura labor como planificadores y organizadores del conocimiento de sus alumnos, necesitan un conocimiento integrado, conectado, flexible e interrelacionado. Por ello pensamos que las intervenciones actuales y futuras con EPs deberían potenciar la adquisición de estas características.

REFERENCIAS

- BREIDENBACH, D. y otros (1992): "Development of the process conception of function". *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.
- JANVIER, C. (1987): "Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example". En Janvier, C. (Ed.) *Problems of Representation in The Teaching and Learning of Mathematics*. LEA: Hillsdale, N.J..
- LLINARES, S. (1991): *La Formación de Profesores de Matemáticas*. GID: Sevilla.
- LLINARES, S. (1992): *Aprender a enseñar Matemáticas. Conocimiento de Contenido Pedagógico y entornos de aprendizaje*. Conferencia pronunciada en el Congreso Internacional "Las didácticas específicas en la formación del profesorado". Santiago de Compostela.
- SFARD, A. (1987): *Two conceptions of mathematical notions: operational and structural*. Proceedings of the annual meeting "Psychology of Mathematics Education". Montreal.

SFARD, A. (1991): "On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin". *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

TALL, D. (1992): "The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity, and proof". En Grouws (Ed.) *Handbook of research on teaching and learning mathematics*. McMillan: New York.

VINNER, S. y DREYFUS, T. (1989): "Images and definitions for the concept of function". *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366.

PROFESORES DE PRIMARIA EN FORMACION: ALGUNAS CONCEPCIONES SOBRE LA MAGNITUD AREA

Moreno, M.F. ; Gil, F. ; Olmo, M.A.

INTERES DE LA INVESTIGACION SOBRE LAS CONCEPCIONES

El enfoque de la psicología cognitiva y la teoría del aprendizaje significativo inciden de una manera especial en partir de las habilidades y estrategias básicas que el alumno domina y de los modelos conceptuales que posee. El término "misconception" tiende a ser reemplazado por expresiones como "concepciones del estudiante" o "concepto imagen" y se acepta que existe un conocimiento del estudiante y su posible distancia de un conocimiento de referencia dado. Aparecen, entre otros, términos como "concepto definición" y "concepto imagen" o "concepto" y "concepción".

Por otra parte, existe una corriente de investigación relativa a las concepciones del profesor sobre las matemáticas y cómo estas ejercen influjo sobre su labor docente. (Puede verse una síntesis de las investigaciones sobre creencias y concepciones de los profesores en Thompson, A. (1992) y Fennema, E. y otro (1992)).

En los alumnos de Magisterio coinciden dos circunstancias:

1. Son alumnos, y como tales resulta orientador conocer sus concepciones de área para desarrollar con mayor provecho el trabajo en las asignaturas de Matemáticas.

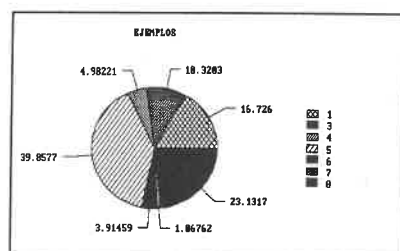
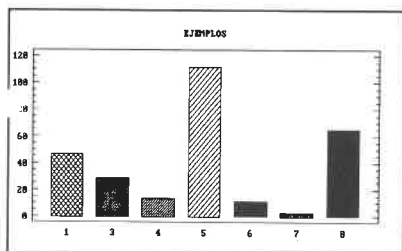
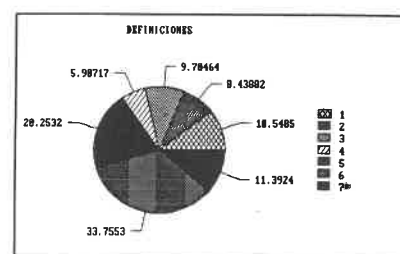
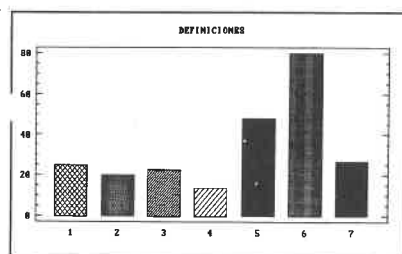
2. Como futuros profesores, puesto que sus creencias y concepciones influirán en su labor docente.

En Balacheff (1990, pág.138) se afirma que "la naturaleza de las concepciones de los estudiantes pueden trazarse no sólo de lo que aprenden explícitamente sino también de la forma en la que lo usan y de la clase de problemas que esas concepciones permiten resolver". Una idea análoga aparece en Vergnaud (1990): "un concepto no puede reducirse a su definición... Es a través de situaciones y de problemas a resolver cuando el concepto adquiere sentido para el niño".

De ahí que en nuestra exploración hemos intentado plantear al estudiante situaciones, alguna de ellas, incluso, poco cercanas al tipo de trabajo con la magnitud área en la escuela.

ANÁLISIS PREVIO SOBRE EL AREA

Para observar análisis de tipo matemático se puede usar, entre otros, Freudenthal (1983), que aporta, además una visión fenomenológica, o Olmo et al. (1989).



En el tratamiento, desde el punto de vista práctico, de la magnitud creemos que tiene especial relevancia la comparación y la medida quedando completada con la estimación (este último proceso no será tratado en este trabajo).

Asimismo, podemos sintetizar las situaciones de la vida real donde se presenta el área en los siguientes contextos:

- contextos en los que el área representa la extensión de un cuerpo
- contextos en los que el área representa un hueco o espacio vacío,
- contextos que tratan de la marca o huella que deja un móvil al desplazarse.

	extensión de un cuerpo	hueco/espacio vacío	huella de un móvil al desplazarse
comparación			
medida			

COMPARACION

El área de dos objetos o figuras se puede comparar a través de los términos relacionales "más que", "menos que" y "tanto como". Esto permite trabajar con la relación de orden y, lo que es más importante desde el punto de vista práctico, introducir la idea de cantidad de área al tratar con una relación de equivalencia (uso del término relacional "tanto como"). La comparación del área es más complicada que por ejemplo, la de la longitud (Freudenthal 1983, pág.373).

Se pueden comparar áreas:

- directamente (por inclusión)
- indirectamente:
 - a) mediante pavimentado,
 - b) por medida,
 - c) mediante transformaciones:
 - c1) romper y rehacer,
 - c2) traslaciones, giros, simetrías, y
 - c3) quitar cortando (Principio de Cavalieri)

COMPARACION	más que	menos que	tanto como
inclusión			
pavimentación			
transformaciones			
medida			

MEDIDA

Proponemos comenzar con el uso de una unidad no estándar, para mostrar el proceso mediante el que se le asigna un número a una cantidad de área y pasar, posteriormente, a las unidades convencionales.

Este proceso de medida se puede conseguir mediante:

- pavimentando (exhausción con unidades, que a su vez se pueden subdividir)
- rejillas (aproximaciones interiores y exteriores de la figura)
- transformaciones de romper y rehacer.
- fórmulas.

Destacar que en unos casos se considera la medida del área tomando como unidad una cantidad de área (carácter unidimensional) y en otros, en los que se destacan fundamentalmente las dimensiones, se considera el carácter bidimensional.

MEDIDA	unidad no estándar	unidad convencional
pavimentado		
rejillas		
transformaciones de romper y rehacer		
fórmulas		

RELACION DEL AREA CON OTRAS MAGNITUDES

Para la constitución de la magnitud como objeto mental también se necesita que se confronte con otras. Es bien conocido el error de confundir el área con el perímetro; es el predominio de las dimensiones lineales para juzgar sobre la extensión que encierran. También en el caso de situaciones reales creemos que puede ser confundida con el volumen y con la masa.

CUESTIONARIO

A la vista de este análisis previo y dada la complejidad del concepto, se diseñó un cuestionario donde se formulaban preguntas escritas relacionadas con las casillas que aparecen punteadas.

La prueba se pasó a 20 alumnos de 2º de Magisterio (especialidad de Ciencias) a mediados del curso 1991-92 y no se había facilitado información sobre este tema.

Podemos establecer los siguientes bloques en las 22 preguntas que componen el cuestionario:

I.- 2, 3, 4, 5 y 14. Uso del término área en general. Figuras y cuerpos geométricos y de la vida real que tienen (o no) área. Explicitación del área.

II.- 1, 7, 8, 20 y 6, 9, 10. Comparación de áreas. Las cuatro primeras son casos de figuras planas y con dibujos esquemáticos aportados en el ítem y las tres siguientes son comparaciones de objetos.

III.- 18, 19. Conocimiento y uso de unidades de medida no convencionales.

IV.- 15, 16, 17. Utilización de distintas estrategias para medir áreas en situaciones "raras" no frecuentes en el ámbito escolar.

V.- 11, 12, 13 y 21 y 22. Las tres primeras relacionan el área con el perímetro; las otras dos, con la masa y volumen respectivamente.

ALGUNOS RESULTADOS OBTENIDOS

Ante la imposibilidad de describir el cuestionario completo y el análisis de las respuestas dadas a los ítems, nos centraremos, en el bloque IV.

15. ¿Cómo calcularías el área de la palma de tu mano?

16. ¿Cómo calcularías el área de una lata de coca cola?

17. ¿Cómo calcularías el área de la piel de una manzana?

Son situaciones donde hay que calcular la medida del área de objetos y no son propias, en general, del ámbito escolar. En el análisis de las respuestas, se pueden considerar las siguientes estrategias:

e1. Pavimentado. Se actúa sobre la propia figura o cuerpo a medir. Se "rellena" la figura con unidades todas iguales o con varios tipos de unidades. Se pueden agregar o quitar. En algunos casos, toman la figura lo más parecida posible a la que tienen y "rellenan" o "rellenan y quitan".

e2. Rejillas, usar papel milimetrado o cuadrado y contar cuadrados.

e3. Transformaciones de romper y rehacer. Reproducen la figura, dibujan la mano en papel, rajan la lata y la ponen plana, pelan la manzana; después forman figuras geométricas para calcular su área.

e4. Aproximación mediante fórmulas. Se hace referencia explícita al uso de fórmulas. Aproximan el área en cuestión mediante la fórmula de la figura o cuerpo geométrico más parecido.

0. No contesta

?. Equívocos.

Los resultados de la codificación quedan reflejados en el siguiente cuadro:

	ítem 15	ítem 16	ítem 17	Totales
e1	6	0	0	6
e2	6	0	3	9
e3	4	11	11	26
e4	3	8	3	14
?	1	1	2	4
0	0	0	1	1

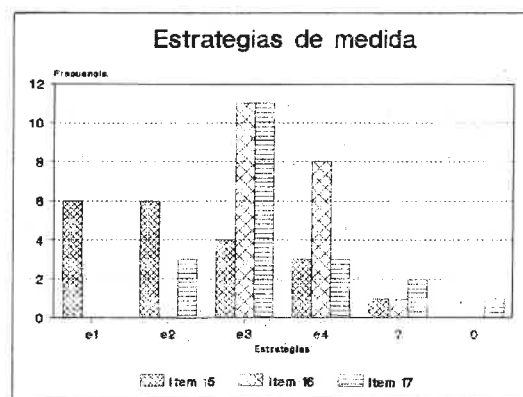
CONCLUSIONES

– Como ya aparece descrito en la literatura, cuando se enfrenta al estudiante ante situaciones "raras", no se utilizan los conocimientos escolares habituales (el uso de fórmulas), sino que se recurre a procedimientos, como por ej. transformaciones.

– las estrategias se entremezclan; pocas son aisladas. Se ha intentado codificar el aspecto que ha parecido más revelante. Por ejemplo, es bastante frecuente que después de **e3** se utilice el "rellenar" con distintas figuras, es decir, una especie de pavimentado.

– En el ítem 17, todos, excepto los que aproximan con el área de la esfera, pelan la manzana o la cortan formando cuadrados, es decir, previamente a la estrategia señalada en el cuadro, estaría la **e3**, pero por simplificar, no se incluye. El área se asocia a "algo plano" y se realiza el desarrollo plano del cuerpo a medir. Este hecho aparece en las contestaciones a los ítems del grupo I cuando se dan más nombres de figuras geométricas que tengan área que nombres de cuerpos. También se citan más objetos de la vida real

predominantemente "planos" (puertas, pizarras, terrenos para edificar, pared, etc.). También cuando se explicita el área (item 14) aparecen mayoritariamente los términos superficie y dos dimensiones.



Esta primera exploración nos ha llevado a la necesidad de profundizar sobre las concepciones de los estudiantes para maestro en un grupo concreto mediante una entrevista donde se les enfrente a la resolución de tareas con el uso de materiales reales.

BIBLIOGRAFIA

BALACHEFF, N. (1990). Future Perspectives for Research in the Psychology of Mathematics Education en *Mathematics and Cognition* Edt. por P. NESHER y J. KILPATRICK. Cambridge University Press.

FENNEMA, E.; FRANKE, M.L. (1992). Teachers' Knowledge and Its Impact. en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* Edt. por D. A. GROUWS. N.C.T.M. Macmillan Publishing Company. New York.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. D. Reidel, P. C. Dordrecht.

OLMO, M.A. et al. (1989). *Superficie y volumen. ¿algo más que el trabajo con fórmulas?*. Síntesis. Madrid.

THOMPSON, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* Edt. por D.A. GROUWS. N.C.T.M. Macmillan Publishing Company. New York.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels en *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, nº 23, pp. 133-170.

LA EVALUACION FORMATIVA EN MATEMATICAS COMO FACTOR DE EFICACIA DOCENTE: FIABILIDAD DE UNA PRUEBA DE CONOCIMIENTOS BASICOS

Abraira Fernández, C.F. ;Alvarez Esteban, R.;González Rodríguez, M.F.
y Mures Quintana, Mª J.

1. INTRODUCCION

Es generalmente y cada vez más aceptado que los procedimientos de evaluación determinan, en gran medida, no sólo la materia que los alumnos estudian y aprenden significativamente, sino también las estrategias que generan y utilizan para hacerlo. La *evaluación formativa* se caracteriza por su propósito de perfeccionamiento y mejora del objeto evaluado -el aprendizaje de los alumnos en nuestro papel de profesores-, con una disposición por parte de éstos de servicio y ayuda a aquellos. Esto exige la consideración de la evaluación como un componente más -sino el más importante- del proceso de enseñanza/aprendizaje, lo que conduce a la obligada incardinación del sistema de evaluación en cualquier programa que pretenda merecer el calificativo de educativo.

Factor de eficacia docente es cualquier actuación del profesor que consiga reducir la distancia desde objetivos y metas propuestas a productos educativos, caracterizando éstos por los resultados alcanzados por sus alumnos, tanto en el ámbito cognitivo como en el afectivo o social.

Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio que tiene por objeto contrastar la hipótesis de que **la evaluación formativa en Matemáticas es un factor de eficacia docente**, o en otras palabras, que este tipo de evaluación es más eficaz que la tradicional -*evaluación sumativa*- para mejorar los resultados de los alumnos. El citado proyecto, en esencia, consiste en el diseño, ejecución y evaluación de dos programas educativos -basados en la enseñanza personalizada y el trabajo en grupo- destinados, en particular, a alumnos de la asignatura Matemáticas I de primer curso de la Diplomatura de Profesorado de EGB de la Universidad de León. Estos programas son idénticos salvo en el componente *sistema de evaluación*, puesto que uno -denominado Programa Experimental (PE)- incluye el uso de la evaluación formativa mientras que el otro -denominado Programa de Control (PC)- no lo hace, contemplando ambos la evaluación sumativa.

Para la evaluación de los programas, es decir, para la investigación, hacemos uso del diseño cuasiexperimental denominado de *grupo de control no equivalente*, que complementamos con planteamientos cualitativos, ya que como es sabido, en el ámbito educativo cuando los laboratorios son las aulas, es casi imposible la investigación experimental pura. Se representa mediante el diagrama:

GRUPO EXPERIMENTAL	O ₁	X _{PE}	O ₂
.....			
GRUPO CONTROL	O ₃	X _{PC}	O ₄

El Grupo Experimental es el que sigue el programa PE y el Control el que sigue PC.

O1 y O3 representan el *pretest*, es decir, respectivamente, las condiciones de entrada a los programas PE y PC. El *posttest*, representado por O2 y O4, los resultados obtenidos por los alumnos como consecuencia de dichos programas.

Supuesta la igualdad inicial de los grupos, es decir, O1=O3, y que los programas se aplican en condiciones idénticas, la diferencia entre O2 y O4 se deberá exclusivamente al uso de la evaluación formativa en el grupo experimental. Es decir, la hipótesis quedará validada si O2>O4.

Es sabido que la calidad de una investigación no puede ser superior a la de los instrumentos que se utilicen para efectuarla. Pues bien, el trabajo que presentamos consiste en la determinación de la *fiabilidad* de uno de los instrumentos utilizados como pretest para medir las condiciones de entrada a los programas y averiguar la equivalencia inicial de los grupos. La entendemos aquí como *consistencia interna*, y que es requisito imprescindible para garantizar una calidad mínima a la investigación. Esta equivalencia inicial (O1=O3) es obligada si pretendemos justificar que O2>O4 es debido únicamente al uso de la evaluación formativa.

La utilización como pretest de este instrumento, que hemos denominado *Prueba de conocimientos básicos*, y la de dos que lo complementan para medir madurez para el razonamiento matemático y estado *opinático/actitudinal* sobre/hacia las matemáticas, se justifica por el hecho de que las variables *conocimientos básicos*, *motivación* y *técnicas de trabajo intelectual* se han demostrado poderosamente influyentes en los resultados de los alumnos.

2. METODOLOGIA

Una adecuada determinación de la fiabilidad, como objetivo del trabajo presentado, requiere la utilización de instrumentos estadísticos que se reflejan en los *coeficientes de fiabilidad*.

Entendiendo la fiabilidad de una prueba como la estabilidad de los resultados que proporciona como instrumento de medida, los coeficientes de fiabilidad se consideran medidas que analizan la correlación de variables estadísticas medidas en escala ordinal.

Desde el punto de vista estadístico, la correlación se entiende como el grado de relación entre variables, ya sean cualitativas o cuantitativas. Si alguna de las variables no ha sido medida en escala de intervalo o razón estamos ante una situación de correlación no paramétrica. Para medir el grado de relación en estos casos se dispone de múltiples coeficientes cuya expresión depende del tipo de variable considerada (continua, ordinal, categórica, dicotómica, dicotomizada).

Dentro de la investigación educativa y para el estudio concreto de la fiabilidad se utilizan los coeficientes de *Kuder-Richardson* y *alfa de Cronbach* para el análisis de la consistencia interna especialmente. El primero de ellos permite estimar la fiabilidad de tests con variables dicotómicas, es decir, aquellas que se pueden categorizar como acierto-error y codificar como 1-0.

El coeficiente alfa de Cronbach se aplica cuando los items o variables toman dos o más categorías. Viene dado por la siguiente expresión:

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k S_i^2}{S_t^2} \right)$$

siendo "k" el número de items, S_i^2 la varianza de cada uno de ellos y S_t^2 la varianza de la suma de todos los items.

Cuando el índice de dificultad varíe de un item a otro (distintas medias), o bien, cuando el índice de discriminación de cada uno sea diferente (distintas varianzas), es conveniente estimar la fiabilidad mediante el coeficiente alfa estandarizado, que viene dado por:

$$\alpha_s = \frac{k \bar{r}}{1 + (k-1) \bar{r}}$$

siendola media de las correlaciones entre todos los ítems.

La interpretación de ambos es análoga a la de un coeficiente de correlación, de manera que la fiabilidad será mejor cuanto mayor sea el coeficiente. De una forma orientativa, cuando el coeficiente sea mayor que 0,75 se puede interpretar como una *buena fiabilidad*, siendo deseables valores superiores a 0,90 cuando se trate de pruebas de rendimiento.

3. ANALISIS DE DATOS Y RESULTADOS

Los datos sobre los que se ha realizado el estudio han sido obtenidos mediante una prueba constituida por 33 items, que trata de medir de forma general el factor conocimientos matemáticos básicos, que engloba *conocimiento numérico, destreza operativa, resolución de ecuaciones y resolución de problemas de ecuaciones*.

Se aplicó a 137 alumnos de la asignatura *Matemáticas I* de Primer Curso de la Diplomatura del Profesorado de EGB, de la Universidad de León.

En relación con la validez de la prueba, hemos optado por el *método de acuerdo entre jueces expertos*. La consideramos desde los enfoques *validez de contenido y validez aparente*.

En cuanto al estudio de la fiabilidad, objeto del trabajo presentado, hemos analizado:

a) Consistencia interna de 6 items (iniciales) mediante la determinación del paralelismo real con otros 6 items (de control) introducidos al efecto (Método de formas paralelas no estrictas).

Las correlaciones obtenidas entre los pares son muy altas, tal como se pone de manifiesto a continuación:

El valor del coeficiente alfa de Cronbach obtenido para los 6 items de la forma A es $\alpha=0,8450$ y el valor estandarizado $\alpha_s=0,8472$.

Para los items de la forma B los resultados son: $\alpha=0,842$ y $\alpha_s=0,8435$.

TABLA 1

Formas	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	A ₆
B ₁	0,9559	0,4311	0,4376	0,4278	0,5016	0,3543
B ₂	0,3846	0,9298	0,4302	0,4497	0,6304	0,5938
B ₃	0,4632	0,4836	0,9453	0,3998	0,4899	0,4724
B ₄	0,3869	0,5361	0,3968	0,9207	0,5115	0,5456
B ₅	0,4689	0,5577	0,4173	0,4733	0,8731	0,5765
B ₆	0,4142	0,5664	0,5063	0,4832	0,5456	0,9199

El valor del coeficiente alfa de Cronbach obtenido para los 6 items de la forma

A es $\alpha=0,8450$ y el valor estandarizado $\alpha_s=0,8472$

Para los items de la forma B los resultados son $\alpha=0,842$ y $\alpha_s=0,8435$.

TABLA 2

	α	α_s
Forma A	0,8450	0,8472
Forma B	0,842	0,8435
Forma A+B	0,9272	0,9280

b) Incremento de la fiabilidad al aumentar el número de items, para lo cual se consideraron los restantes items de la prueba (21).

Los resultados obtenidos son $\alpha=0,9613$ y $\alpha_s=0,9632$.

4. CONCLUSIONES

- La alta correlación entre los pares considerados (Tabla 1) muestra la acertada elección de los items de control y la consistencia en las respuestas a estos pares.

- De la Tabla 2 se deduce asimismo una adecuada consistencia interna entre los 6 items de la forma A y de la forma B aisladamente considerados.

- Por otro lado, al tratar conjuntamente las formas A y B existe un incremento de la fiabilidad hasta 0,9280, lo cual no se puede interpretar como incremento debido únicamente al mayor número de items.

- Al considerar los 27 items (6 iniciales y 21 restantes) de la prueba, se observa que la fiabilidad tiene un incremento de 0,8472 a 0,9632.

- Se concluye señalando que el mayor incremento de la fiabilidad se obtiene al considerar correlaciones medias constantes, aumentando el número de items; por otra parte, la fiabilidad se mantiene, e incluso puede disminuir, al utilizar correlaciones medias entre todos los items (iniciales y nuevos introducidos).

- Se resumen estas conclusiones señalando que al introducir un item de baja correlación con respecto a los iniciales, se reduce drásticamente el coeficiente de fiabilidad (especialmente cuando el número de items es pequeño). De aquí, la conveniencia de considerar el α que se obtendría si se eliminara un determinado item.

- Finalmente, señalar que no siempre mayor fiabilidad supone más información sobre el alumno. Por esto, es prioritario garantizar la validez del contenido.

5. BIBLIOGRAFIA

- BISQUERRA ALZINA, R. (1987): *Introducción a la Estadística aplicada a la investigación educativa*. PPU, Barcelona.
- BISQUERRA ALZINA, R. (1989): *Introducción conceptual al Análisis Multivariable*. Vol I, PPU, Barcelona.
- CAMPBELL, D. y STANLEY, J. (1982): *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*. Amorrortu Editores, Buenos Aires.
- CARMINES, E.G. y ZELLER, R.A. (1979): *Reliability and Validity. Assessment*. Sage Publications, London.
- FERNANDEZ DIAZ, M.J. et al. (1990): *Resolución de problemas de Estadística Aplicada a las Ciencias Sociales*. Síntesis, Madrid.
- GARCIA HOZ, V. (1986): *Educación Personalizada*. 7ª ed. Rialp, Madrid.
- GARCIA HOZ, V. y PEREZ JUSTE, R. (1984): *La investigación del profesor en el aula*. Escuela Española, Madrid.
- GARCIA LLAMAS, J.L.; PEREZ JUSTE, R.; DEL RIO SADORNIL, D. (1992): *Problemas y Diseños de Investigación resueltos*. Dykinson, S.L., Madrid.
- NORUSIS, M.J. (1988): *SPSS/PC+ Advanced Statistics V2.0* SPSS Inc., Chicago.
- PEREZ JUSTE, R. (1984): *Pedagogía experimental*. Adaptación, UNED, Madrid.
- PETERSON, P. y WALBERG, M.J. (1979): *Research on Teaching*. McCutchan, Berkeley.

MESA 8: ASPECTOS SINGULARES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMATICAS

EDUCACION BILINGÜE Y RENDIMIENTO EN MATEMATICAS

J.F. Lukas ; C. Santiago ; I. Dendaluze y L. Joaristi

1. INTRODUCCION

En la Comunidad Autónoma Vasca la enseñanza obligatoria puede realizarse siguiendo uno de los tres modelos lingüísticos planteados hace ya unos años por el Gobierno Vasco. Estos modelos son los siguientes:

MODELO A: Todas las asignaturas, excepto el euskara, se trabajan en castellano. Está pensado para alumnos cuya primera lengua es el castellano.

MODELO B: Algunas asignaturas se trabajan en euskara y otras en castellano en una proporción más o menos igual. De todas formas entre las que se trabajan en castellano están el aprendizaje de la lecto-escritura y las matemáticas. Si bien este modelo está pensado para alumnos castellano-parlantes, se pretende que al final de la E.G.B. éstos sean capaces de estudiar cualquier asignatura tanto en euskara como en castellano.

MODELO D: Todas las asignaturas, excepto la lengua española, se trabajan en euskara. Está pensado para alumnos cuya primera lengua es el euskara.

En un sistema de educación bilingüe, tal y como ocurre en la Comunidad Autónoma Vasca, los objetivos lingüísticos tienen gran importancia. Pero no debemos olvidar tal y como señalan SIGUAN y MACKEY (1986) y GENESEE (1987); que un sistema de educación bilingüe es sobre todo un sistema de educación. Por ello sus objetivos deben ser los mismos que tiene un sistema de educación monolingüe, teniendo que probar su eficacia en este sentido. Son fáciles de citar las virtudes de un sistema de educación bilingüe: mejor conocimiento de las lenguas y dominio de más lenguas. Pero se puede pensar que estas ventajas pueden conllevar un rendimiento académico más bajo. Se puede suponer, por ejemplo, que el tiempo dedicado a los aprendizajes lingüísticos reducirá el tiempo dedicado a otros aprendizajes. O, que el aprendizaje de las matemáticas en una lengua diferente a la materna supondrá un menor rendimiento. Siguiendo a SIGUAN y MACKEY (1986) hay que tener en cuenta que un sistema de educación bilingüe se establece en un lugar donde existe un conflicto lingüístico. Por ello la actitud de la población frente al sistema establecido variará: algunos estarán de acuerdo, pero otros no. Estos últimos culparán al bilingüismo el fracaso de sus hijos.

Teniendo en cuenta lo expuesto, es necesario que un sistema de educación bilingüe pruebe que sus resultados académicos no son más bajos que los de un sistema monolingüe. Ante esta situación son varias las investigaciones que debían realizarse. En nuestro caso nos hemos centrado en la asignatura de matemáticas. La primera investigación llevada a cabo en este sentido fue entre 1988 y 1991. El objetivo principal de la investigación era comprobar, por una parte si los alumnos del modelo B tenían un rendimiento en matemáticas más bajo cuando eran testados en castellano y por otra, ver si al final de 8º de E.G.B. eran capaces de estudiar en educación secundaria las matemáticas en euskara.

No nos vamos a extender en esa investigación puesto que existen diferentes publicaciones en las cuales se han mostrado los resultados obtenidos (ver LUKAS, 1991, 1992a y 1992b). No obstante vamos a resaltar las tres conclusiones más importantes obtenidas:

1) Los alumnos del modelo B no sufren ningún tipo de retraso en el rendimiento en matemáticas si tenemos en cuenta que en las diferentes pruebas de matemáticas cuando fueron testados en castellano obtuvieron puntuaciones tan buenas o mejores que los alumnos escolarizados en el modelo A.

2) Los alumnos del modelo B tienen dificultades para expresar en la segunda lengua (euskara) lo aprendido en la primera (castellano). Esta dificultad varía en función de las exigencias de habilidad de las tareas a las que se tiene que enfrentar. En este caso no se puede hablar de una influencia negativa del bilingüismo, sino que el nivel de euskara alcanzado por estos alumnos no es el suficiente como para poder continuar sus estudios en esta lengua con unas garantías mínimas de éxito, por lo menos en lo que a las matemáticas se refiere.

3) Las clases del modelo B en las cuales en la enseñanza de las matemáticas se ha introducido también el euskara como vehículo de comunicación, han sido las que han obtenido puntuaciones más altas en el rendimiento en matemáticas medido en euskara. (LUKAS, 1992a y 1992b).

Con esa investigación terminamos una etapa, pero quedan otros aspectos que deben ser probados. Por ejemplo, uno importante y que preocupa sobre todo a las personas que están implicadas en el modelo D (todas las asignaturas se enseñan en euskara) es si los alumnos serían capaces de estudiar las matemáticas en castellano después de haberlas estudiado siempre en euskara. Para comprobar este aspecto se llevó a cabo la siguiente investigación.

2. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACION

2.1. Hipótesis

Nuestra hipótesis principal era que los alumnos del modelo D al finalizar la escolaridad primaria (6º de E.G.B.) serían tan capaces como los alumnos del modelo A de responder a una prueba de matemáticas cuando eran testados en castellano. Para ello nos basábamos en las hipótesis de interdependencia lingüística y umbral mínimo de CUMMINS (1983, 1984).

2.2. Muestra

Puesto que se pretendía que los resultados de esta investigación fueran extrapolables a toda la población de la Comunidad Autónoma Vasca se eligió una muestra aleatoria representativa de toda la población. Se siguió un muestreo proporcional estratificado. Al final se contó con una muestra de 1316 sujetos de 6º de E.G.B., de los cuales 1076 correspondían al modelo A y el resto, 240 al modelo D.

2.3. Variables

Aunque esta investigación no sea experimental, hablaremos de variables dependientes, independientes y extrañas. La variable dependiente sería el rendimiento en matemáticas. Dentro de ella, siguiendo la taxonomía de BLOOM (9171), hemos distinguido tres procesos mentales: cálculo, comprensión y aplicación, y también cuatro contenidos: aritmética, geometría, proporcionalidad y estadística.

La variable independiente sería el modelo lingüístico (D o A).

Las variables extrañas que se han controlado han sido el tipo de centro, la inteligencia y el nivel socioeconómico de la familia.

2.4. Medición de las variables

Para la medición de la variable más importante (rendimiento en matemáticas) se utilizó el test MATCAS6. Este test de construcción "Ad Hoc" pretende medir el rendimiento de los alumnos en matemáticas en 6º de E.G.B.. Esta prueba cumple todos los requisitos para ser considerada como un instrumento de medida fiable y válido (ver LUKAS, SANTIAGO, DENDALUZE y JOARISTI, 1993a y 1993b y SANTIAGO, LUKAS, DENDALUZE y JOARISTI, 1993). Esta prueba recoge los cuatro contenidos más importantes de 6º de E.G.B. (conjuntos numéricos o aritmética, proporcionalidad, geometría y estadística) y los procesos mentales de cálculo, comprensión y aplicación.

3. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

En la siguiente tabla se muestran las medias aritméticas y las desviaciones típicas en las diferentes variables:

		MODELO D	MODELO A	Nº de Items
MATCAS6	X St	23,84 6,93	24,77 8,05	45
ARITMETICA	X St	15,24 4,39	15,62 4,93	25
GEOMETRIA	X St	2,55 1,59	3,05 1,85	9
PROPORCION	X St	4,89 2,33	4,89 2,28	9
ESTADISTICA	X St	1,15 0,74	1,20 0,71	2
CALCULO	X St	7,74 2,66	7,80 2,92	13
COMPRESION	X St	9,95 2,96	10,56 3,37	17
APLICACION	X St	6,15 2,87	6,42 2,99	15

Tal y como puede comprobarse en la tabla, los alumnos del modelo lingüístico A obtienen en todos los casos medias superiores a los alumnos del modelo lingüístico D, si bien estas diferencias son mínimas.

Se realizaron también análisis de covarianza siendo el factor el modelo lingüístico y actuando como covariantes la inteligencia y el nivel socioeconómico. Se quería comprobar si estas diferencias eran significativas controlando el nivel socioeconómico y la inteligencia. En ninguno de los casos apareció que las diferencias entre los modelos lingüísticos fueran significativas estadísticamente. En la siguiente tabla se muestran los valores de F y su significatividad para cada una de las variables según el modelo lingüístico:

	F	Signif. de F
MATCAS6	0,511	0,475
ARITMETICA	0,332	0,565
GEOMETRIA	0,017	0,895
PROPORCIONALIDAD	0,993	0,319
ESTADISTICA	0,068	0,795
CALCULO	0,105	0,745
COMPRESION	1,338	0,248
APLICACION	0,285	0,594

Estos resultados nos vuelven a confirmar la hipótesis de interdependencia de CUMMINS según la cual lo aprendido en una lengua se traspa a la otra lengua, aunque en este caso estemos hablando de contenidos matemáticos. Por otra parte, atendiendo a los resultados obtenidos por los alumnos del modelo lingüístico D, aunque sean mayoritariamente de lengua materna vasca y hayan estudiado siempre las matemáticas en euskara, no tienen problemas para expresar sus aprendizajes en castellano. Esto se debe a que han conseguido un umbral mínimo en castellano suficiente como para poder hacerlo. Si bien esperábamos que quizá en los procesos mentales de comprensión y sobre todo en el de aplicación (resolución de problemas) en los cuales el conocimiento de la lengua iba a condicionar más las respuestas, las diferencias entre los modelos iban a ser mayores, los resultados demuestran que no hay diferencias entre ellos.

Por lo tanto podemos concluir diciendo que nuestra hipótesis de partida se cumple y que por lo tanto, en lo que se refiere a las matemáticas, los alumnos escolarizados en el modelo lingüístico D no tienen problemas para expresar en castellano lo aprendido en euskara, matemáticas.

BIBLIOGRAFIA

- Austin, J.L. & Howson, A.G. (1979). "Language and mathematical education". **Educational studies in mathematics**, 10, 161-197.
- Bloom, B.S. et al. (1971). **Taxonomía de los objetivos de la educación. Ambito del conocimiento. Tomo I**. Buenos Aires: Ateneo.
- Cummins, J. (1983). "Interdependencia lingüística y desarrollo educativo de los niños bilingües". **Infancia y Aprendizaje**, 21, 37-62.
- Cummins, J. (1984). "Bilingualism and cognitive functioning". In Shapson, S. & D'Oyley, V. (Eds.): **Bilingual and multicultural education: Canadian perspectives** (pp. 55-67). Clevedon: Multilingual Matters.
- Genesee, F. (1987). **Learnin through two languages**. Cambridge: Newbury.
- Lovett, C.J. (1980). "Bilingual education: What role for mathematics teaching?". **Arithmetic teacher**, 27(8), 14-17.
- Lukas, J.F. (1990). **Trebetasun eta errendimendu matematikoa testuinguru elebidunean**. Argitaratu Gabeko Tesi Doktorala. Euskal Herriko Unibertsitatea.
- Lukas, J.F. (1991). "Trebetasun eta errendimendu matematikoa testuinguru elebidunean: ikerketa baten emaitzak". **Tantak**, 5, 51-68.
- Lukas, J.F. (1992a). "Enseñanza de las matemáticas en un contexto bilingüe". **Bordon**, 44(2), 203-211.
- Lukas, J.F. (1992b). "Educación bilingüe y rendimiento en matemáticas". **Revista de Investigación Educativa**, 19, 7-18.
- Lukas, J.F., Santiago, C., Dendaluze, I. & Joaristi, L. (1992c). "Matematika-errendimendua 6. mailan. Zenbait aldagairen eragina". **Tantak**, 7, 71-85.
- Lukas, J.F., Santiago, C., Dendaluze, I. & Joaristi, L. (1993a). **MATEUS 6. Matematikako errendimendua neurtzeko testa**. Euskal Herriko Unibertsitatea. Prentsan.
- Lukas, J.F., Santiago, C., Dendaluze, I. & Joaristi, L. (1993b). **MATCAS 6. Test para medir el rendimiento en matemáticas**. Universidad del País Vasco. En prensa.
- Macnamara, J. (1966). **Bilingualism and primary education**. Edimburgo: University of Edimburgo Press.
- Santiago, C., Lukas, J.F., Dendaluze, I. & Joaristi, L. (1993). "La influencia de ciertas variables en el rendimiento en matemáticas en 6º de EGB". En prensa.
- Siguan, M. & Mackey, W. (1986). **Educación y bilingüismo**. Madrid: Santillana/Unesco. Aula XXI.

LISTA DE ASISTENTES A LAS VI J.A.E.M.

Abraira Fernández, Concepción
 Aguade Bruix, Claudio
 Aguilera Jiménez, Antonio
 Alcaide Guindo, Fernando
 Alcala Hernández, Manuel
 Alcape Amuriza, Eurne
 Aldama iménez, Carmen
 Alvarez Alonso, Isabel Amanda
 Alvarez Escudero, Francisco Javier
 Alvarez Esteban, Ramón
 Alvarez Puente, Diego
 Amaral e Sousa, Elisabete
 Amo Arias, Francisca del
 Andrés Gimeno, Mª Elena
 Antonio Bravo, José Mª
 Antonio Esteban, Miguel
 Aranda Plata, Antonio
 Arenas Oropesa, Antonio
 Arenos Casalta, Yolanda
 Arese Oliva, Mª del Carmen
 Arias Carrasco, F. Lourdes
 Arranz Muñoz, Francisco
 Arribas Loriga, Mª Jesús
 Arriero Villacorta, Carmen
 Artime Prado, José Aurelio
 Azcarate Giménez, Carmen
 Bachiller Burgos, Mª de la Montaña
 Baez Aradilla, José Gabriel
 Bagazgoitia González, J. Alberto
 Bagazgoitia González, Fernando
 Bagazgoitia González, Javier
 Balbuena Castellano, Luís
 Bando Casado, Trinidad
 Bas Sánchez, Miguel Angel
 Barbero Sampedro, Carmen
 Barrantes López, Manuel
 Barros Fachal, Fco. Javier
 Bartivas Cerezo, Sonia
 Bayarri Lozano, David

Bejarano Bueno, Gracia M^a
 Bello Rodríguez, Luís
 Benedicto Juste, M^a Dolores
 Benedicto Juste, Carmen
 Benítez Benítez, Manuel
 Berenguel Soria, Isabel
 Bermejo Solera, Concepción
 Berral Yerón, M^a Joaquina
 Blanco Alonso, Miguel
 Blanco Barnusell, Ignasi
 Blanco Nieto, Lorenzo
 Blazquez Paz, M^a Eva
 Borondo Rodríguez, Paloma
 Borregos Campos, M^a Carmen
 Bras Do Rosario, M^a Edite
 Bravo Sánchez, Pedro
 Buendía Castiñeira, M^a Guadalupe
 Brihuega, Javier
 Bueno Becerra, José M^a
 Bueno Merino, M^a Jesús
 Cabalgante Perera, M^a Victoria
 Cabello Pérez, M^a Teresa
 Cabello Sánchez, Félix
 Cabezas Corchero, Justo
 Cabezas Labrador, Antonio
 Cabrera Gómez, Gloria
 Calabuig i Serra, M^a Teresa
 Calderón Calderón, Manuela
 Calderón Trujillo, Manuel A.
 Calvo Calabuig, Roland
 Calvo Penades, Consuelo M^a
 Calzado Almodovar, Zacarías
 Callejo de la Vega, M^a de la Luz
 Callejo Olmos, Isabel
 Campos Nuñez, Antonio
 Canals Tolosa, M^a Antonia
 Caro Gámez, Concepción
 Cantalejo Martín, Pilar
 Cantero Tomas, Angel
 Cañada Gallardo, Monica
 Cañibano Rodríguez, M^a Isabel
 Capdevila Vidal, Fátima

Carapeto Rivera, Ramona
 Carballal López, Beatriz
 Carballo Trinidad, José
 Carcedo Alarcia, M^a Carmen
 Carmona Soto, Virginia
 Carpente Sardiña, José Antonio
 Carrión Aguilera, Angel
 Casado Caceres, Fernando
 Casas garcía, Luís M^a
 Casañas Xuriach, Pau
 Castaño Quintans, Teresa
 Castrejon Araya, Ascensión
 Cerda Frances, Angel B.
 Ciudad Sánchez, Juana
 Cobo López, M^a Fatima
 Cobos Bueno, José
 Conde Collado, M^a Isabel
 Corchete González, Abilio
 Corcho Sánchez, Pedro
 Còrcobado Cartes, Teresa
 Cordero Cid, Victorino
 Cortés Palma, Julia
 Costa Cabral, Alda
 Cruces Carmona, Juan
 Cruz Cancho, M^a del carmen
 Culla Torrens, Merce
 Cuquerella Guillén, M^a Dolores
 Chacón Fernández, M^a Casimira
 Chamorro Plaza, Carmen
 D'Ambrosio, Ubiratan
 Díaz Martínez, Fernando Javier
 Díaz Rastrollo, M^a José
 Diez Lupeña, M^a Luisa
 Domínguez Fandiño, Esperanza
 Domínguez González de Rivera, M^a del Prado
 Domínguez Leon, M^a Del Carmen
 Domínguez Rodríguez, M^a Luisa
 Domínguez Rubio, M^a Isabel
 Donoso Bravo, Manuel
 Duran Sánchez, Nicasio
 Eraso Erro, M^a Dolores
 Escariz García, M^a Concepción

Escudero Pérez, Isabel
 Escutia Basart, Pilar
 Espinel Febles, M^a Candelaria
 Esteban Arias, Francisco L.
 Esteban Fau, Rosa
 Estrada Sánchez, José Antonio
 Fabra Cuenca, Ricardo
 Feijoo Díaz, Mercedes
 Fernandes Soares, Natercia M^a
 Fernández Becerra, I. Manuela
 Fernández Caballero, Juan M.
 Fernández del Campo, José E.
 Fernández Díaz, Rosa M^a
 Fernández Flores, Paula
 Fernández Gallardo, M^a Teresa
 Fernández García, Gabriel
 Fernández Gascón, Antonio
 Fernández Gómez, Emilia
 Fernández Morales, José
 Fernández Muñoz, M^a Salud
 Fernández Reyes, Manuel
 Fernández Sánchez, Jesus
 Fort Hernández, Manuel
 Fortuny Aymerich José M^a
 Fresneda Montano, Juan
 Frías Ruiz, Vicenta
 Fuentes Frías, M^a Guadalupe
 Fuentes Gil, Inmaculada
 Gairín Gallán, José M^a
 Galarraga González, M^a Esperanza
 Galindo Bago, Francisca
 Gallardo Calderón, Juan
 Gallego Eraso, Julia
 García Alegre, José Antonio
 García Azcarate, Ana
 García Blanco, M^a Mercedes
 García Calleja, M^a Dolores
 García Cardenas, M^a José
 García Cruz, Juan A.
 García Deniz, Manuel
 García Dozagarat, Juan Manuel
 García Fernández, Luís

García Fernández, M^a Teresa
 García Freire, Pilar
 García Galavis, Julio
 García González, Ricardo
 García Gorostiaga, Francisco Javier
 García Gudiña, M^a Luisa
 García Jiménez, Enrique
 García López, M^a Mercedes
 García Losada, M^a De Los Angeles
 García Prieto, M^a Esperanza
 García Rodenas, Ricardo
 García Severón, Concepción
 García-Longoria Serrano, Mario
 García-Prieto Manzanares, Francisca
 García-Risco Sánchez, Segundo
 Garrote Romero, Magdalena
 Garrote Sánchez, Manuel
 Gelado Rodríguez, Pilar
 Gil Cuadra, Francisco
 Giménez Rodríguez, Joaquin
 Girondo Pérez, Luisa
 Gómez Albarran, Concepción
 Gómez Fernández, Yolanda
 Gómez Rodríguez, Venancio
 Gómez Suárez, Manuel Alberto
 González Alvarez, Nieves
 González Asensio, Javier
 González Bravo, Teodoro.
 González Fernández, M^a Carmen
 González García, Lorenzo
 González García, M^a Fatima
 González García, Miguel Angel
 González León, Antonio Angel
 González Rodríguez, Manuel Fernando
 González Ruano, M^a José
 González Sanz, M^a Pilar
 González Troncoso, Alejandro J.
 Gordillo Bardón, Manuel
 Gorostiza Murcia, M^a Eugenia
 Gracioso Veloso, María
 Gragera Hernando, Ana de los Milagros
 Gros Ezquerria, M^a José

Guenes Alzaga, M^a Belén
 Guerrero García, Carlos
 Guerrero Hidalgo, Salvador
 Guiberteau Maya, M^a Visitación
 Guillen Delgado, Josefa
 Guisado Corrales, Aguasantas
 Gusano Rodríguez, M^a Teresa
 Gutierrez Díaz, M^a Del Carmen
 Gutierrez López, Inmaculada
 Guzmán, Miguel de
 Henriques David, M^a do Ceu
 Heras González, Pilar de las
 Hernández García, M^a Angeles
 Hernández González, Ana Rosa
 Herrera Alvarez, Antonio
 Holguin Miguel, Isabel
 Huelin Martín, Lucía
 Huerga Alonso, José
 Iglesias Salas, M^a
 Iglesias Sánchez, M^a del Encinar
 Illan Gómez, Inmaculada
 Izquierdo Hidalgo, Inés
 Jaen Zorita, M. Carmen
 Jerez Rodríguez, Bartolome
 Jiménez Alexandre, M^a Eugenia
 Jiménez Canelada, Fernando
 Jiménez Zuasti, Camino
 Jociles Calleja, Agustín
 Jurado Cabezas, Inmaculada
 Laja Franco, Natividad
 Lalinde Mayoral, Rafael
 Lancho Guirado, M^a Milagros
 Lavado Martínez, Francisco
 Leal Leal, Rafael
 León Velasco, M^a Inmaculada
 Lezcano Lascuevas, José Miguel
 López Alcón, Inés M^a
 López Cáceres, Eugenia
 López de Lerma Entonado, Francisco Javier
 López García, M^a Luz
 López Guerrero, Miguel Angel
 López Lozano, Manuel

López Muñoz, M^a De Las Mercedes
 López Ortiz, Manuel
 López Pereira, M^a Del Carmen
 López Romero, M^a José
 Losada Liste, Rafael
 Luengo González, Ricardo
 Lucas Vicente, Teresa
 Lukas Mujika, José Francisco
 Llinares Giscar, Salvador
 Llerena Meneses, Obdulia
 Macías Martín, José
 Mandly Manso, Arturo
 Manuel Monne, Leonci de
 Manzano Marroquin, Joaquin
 Maqueda Gil, Eladio
 Marcos Mateos, Pedro Francisco
 Mariano, M^a Teresa
 Marijuan López, Javier
 Marín Rodríguez, Margarita
 Marqués Guimaraes, M^a Zaida
 Martín del Ama, M^a Victoria
 Martín Gopar, Auxiliadora
 Martín Habernau, M^a José
 Martín Hernández, M^a Felicitas
 Martín Jiménez, Pedro
 Martín Manso, M^a Angeles
 Martín Martín, Delia
 Martín Ortiz, Luisa
 Martín Santiago, Pilar
 Martín Yagüez, M^a del Carmen
 Martínez Brey, Daniel
 Martínez Delgado, Alberto
 Martínez González, Consuelo
 Martínez López, M^a Pilar
 Martínez Pedreño, Agustín
 Martínez Sánchez, Carlos
 Mata García, M^a De Los Angeles
 Matador Pérez, Justo
 Mateos Corchero, M^a Jesus
 Mateos Masa, M^a de la Cruz
 Mayo Sánchez, José Ignacio
 Mayordomo Acevedo, Sara

Maza Gómez, Carlos
 Meavilla Segui, Vicente
 Mellado Jiménez, Vicente
 Méndez Contreras, José Angel
 Méndez Contreras, Adelaida
 Méndez Gutierrez, M^a Jesus
 Miguel Pérez, Miguel Angel de
 Millán Alcalde, M^a Teresa
 Millán Valero, Rocio
 Molano Romero, Antonio
 Molina Pérez, M^a Rosa
 Montaña Benitez, Rosa
 Montes Somoza, Mercedes
 Mora Sánchez, José Antonio
 Morales García, Salvador
 Morales Morales, Purificacion
 Morales Rufo, Lucía
 Morales Santana, Marcos Eloy
 Moreno Balconero, M^a Lourdes
 Moreno Carretero, M^a Francisca
 Moreno Chamorro, M^a del Carmen
 Moron García-Abad, M^a Teresa
 Motta Perruca, M^a José
 Moya Molina, Gabriel
 Moya Pino, Alfredo
 Muñoz Fonseca, Julio Fernando
 Muñoz Pinilla, Purificacion
 Muñoz San Miguel, Jesus
 Muñoz Sánchez, María A.
 Muñoz Santonja, José
 Mures Quintana, M^a Jesús
 Muriel Durán, Francisco Javier
 Muriel Rodríguez, Raquel
 Navarro de Tuero, M^a del Carmen
 Navarro González-Lafont, José M^a
 Navarro Longo, Ricardo
 Navarro Otero, M^a Jesus
 Navarro Otero, Paula
 Navarro Peinado, Ladislao
 Nevado López, Angel M.
 Nieto Bernad, Félix
 Nieto Velázquez, M^a Victoria

Nuñez Uría, Jacobo
 Oliveira González, M^a José
 Olmo Rodríguez, Bernardo
 Olmo Romero, M^a De Los Angeles del
 Ordiales Andrada, José Antonio
 Orihuela Salcedo, M^a del Carmen
 Orrego Contreras, Miguel
 Ortega del Rincon, Tomas
 Ortiz Capilla, M^a Angeles
 Ortiz Osorio, Juan José
 Ortiz Vallejo, María
 Padilla Vázquez, Francisco
 Pardo Romero, Eugenio
 Parejo Sosa, Vicente
 Pascual Izquierdo, Santiago
 Pedreira Mengotti, Alícia
 Peñalver Rios, José
 Pereira de Oliveira, Isolina
 Pérez Cuenca, Pascual
 Pérez del Alamo, Francisco José
 Pérez Gallardo, Miguel Luis
 Pérez González, Antonio Juan
 Pérez Jiménez, antonio
 Pérez Rodríguez, M^a Paz
 Peris Dolz, José Luís
 Pesado Rubio, Eva M^a
 Piedras Martos, M^a Angustias
 Pintor Gemio, M^a Luciana
 Piñeiro Sarille, Flavio J.
 Pizarro Galán, Juan Luís
 Plata Ceballos, José Luís
 Plata Ceballos, Rosa M^a
 Polo Baixauli, Ramón José
 Polo Serrano, Dolores C.
 Porras Ruiz, Agueda
 Portales Escrig, Berta
 Pozo Domínguez, M^a Del Mar
 Pozo Frías, Félix
 Prieto Cendan, M^a Luisa
 Quintero Durán, M^a Manuela
 Rajo Pérez, José
 Ramos Calle, Higinio

Ramos Cantariño, José M^a
 Ramos Fernández , Amalia
 Redondo Muñoz, M^a del Carmen.
 Revilla Martínez, Domingo
 Rico Romero, Luís
 Risco Moreno, Santiago
 Riviere Gómez, Vicente
 Robustillo Pérez, Francisco Javier
 Rodrigo Cienfuegos, Olga
 Rodrigo Rupérez, Ana Isabel
 Rodríguez Benito, Eva
 Rodríguez Caro, M^a Carmen
 Rodríguez Conde, M^a José
 Rodríguez Chamizo, Ana
 Rodríguez Duran, Angelines
 Rodríguez Fernández, Domingo
 Rodríguez Fernández, María
 Rodríguez Fortuna, Antonia
 Rodríguez Fueyo, José Ramón
 Rodríguez González, Luís Javier
 Rodríguez Mendez, Miguel A.
 Rodríguez Parcerro, Cristina
 Rodríguez Peña, Pedro J.
 Rodríguez Sánchez, Juan Francisco
 Rodríguez Valladares, Ana Isabel
 Rodríguez Vela, M^a Inés
 Rodríguez-Moldes Rey, Covadonga
 Romero Cordero, Valerico
 Romero Martínez, M^a Isabel
 Romero Moreno, Andrés
 Romero Rodríguez, José Miguel
 Romero Ruano, Carmen
 Romero Sánchez, José
 Rosa Muñoz, Fernando
 Rubio González, M^a Angeles
 Rufo Bazaga, M^a Jesús
 Ruiz Campins, María
 Ruiz de Elvira Albandea, Andrés
 Ruiz Garrido, Ceferino
 Ruiz López , M^a Pilar
 Ruiz Macías, Constantino
 Ruiz Montes, Inés

Saez Abuin, Luís Mateo
 Saez Gil, M^a Carmen
 Saez Nieto, Juana M^a
 Saldaña Saga, David
 Salinas Portugal, M^a Jesús
 Salvador Alcaide, Adela
 Sampayo Ruiz, Marcelino
 Sánchez, M^a Victoria
 Sánchez Albala, Julian
 Sánchez Alvarez, Claudio
 Sánchez Amado, M^a Teresa
 Sánchez Barriga, Manuel Damian
 Sánchez Benitez, Rafaela
 Sánchez Cerrato, Luis
 Sánchez González, Enrique Fernando
 Sánchez Guillén, José A.
 Sánchez Pesquero, Cipriano
 Sánchez Porras, M^a Teresa
 Sánchez Ruiz, Manuel
 Sánchez Sánchez, M^a Jesús
 Sánchez Sánchez, Marina
 Sánchez Sánchez, José Luís
 Sánchez Vázquez, Gonzalo
 Sánchez Vázquez, Manuel
 Sanchís Mahiques, Rafael
 Sandoval Sierra, Pilar
 Santana Triano, José
 Santiago Etxeberria, Carlos M^a
 Santos Serrano, Daniel
 Santos Vega, Fco. Javier
 Sanz Alonso, José Antonio
 Sanz Lerma, Inés
 Senso García, Prudencia
 Seoane Carreira, Juan Francisco
 Serrano Martín, Julia
 Serrano Romero, Luís
 Servan Thomas, M^a Jesús
 Sieiro Verdura, M^a Concepción
 Silva Pereira, Judith
 Simon Caballero, M^a Luisa de
 Sintes Marco, Bartolome
 Soriano Ayala, Encarnación

Soriano Puche, Dolores
 Soto Luque, Manuel
 Soto Serrano, María
 Souto Aller, Pedro
 Souto Salorio, M^a José
 Suarez Rodríguez, Olga M^a
 Sudón Aguilar, M^a Soledad
 Tamarit Capella, Giovanna
 Tinao Renedo, Eloisa
 Todo González, M^a Isabel
 Toledo Pulido, M^a José
 Torres Moliner, M^a Isabel
 Ugalde Laucirica, Aurora
 Urdiales Alaiz, Carmen
 Valcarce Gómez, José Luís
 Valderrama Ramos, Joaquín
 Vallecillos Jiménez, Angustias
 Varela Pérez, M^a José
 Vázquez Cadahia, Pilar
 Vázquez Vazquez, José Miguel
 Vega Guillén, Jerónimo
 Veguin Casas, M^a Victoria
 Veiga Fernández, Carmen, Da
 Velázquez, Fidela
 Ventura Martín, Manuel
 Verastegui Rayo, Doroteo
 Vila Corts, Antoni
 Vila Vilariño, Juan Carlos
 Vila Vilariño, Antonio
 Villa, Agustín de la
 Villanueva Cueva, M^a del Carmen
 Villar Liñan, M^a Trinidad
 Villard Martín, Juan Cristobal
 Villarrubia Gahete, Fernando
 Vipond García, José Miguel
 Vizmanos Bueta, José Ramón
 Xifre I Arroyo, Angel
 Yagüez Castrillo, Jaime
 Zurbano Fernández, Eduardo

ENTIDADES COLABORADORAS

Presidencia de la Junta de Extremadura
 .Consejería de Educación y Cultura de la Junta de Extremadura
 Rectorado de la Universidad de Extremadura
 Consejo Social de la Universidad de Extremadura
 Excma. Diputación Provincial de Badajoz
 Excma. Diputación Provincial de Cáceres
 Excmo. Ayuntamiento de Badajoz
 Excmo. Ayuntamiento de Cáceres
 Dirección Provincial del Ministerio de Educación y Ciencia de Badajoz
 Dirección Provincial del Ministerio de Educación y Ciencia de Cáceres
 Vicerectorado de Extensión Universitaria de la UNEX.
 Escuela de Magisterio de Badajoz de la Universidad de Extremadura
 Ofic. de Transferencia de Investigación (O.T.R.I.) de la Univ. de Extremadura
 Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Extremadura
 Dpto. de Matemáticas de la Universidad de Extremadura
 Centro de Profesores de Badajoz
 Centro de Profesores de Extremadura
 ONCE
 Caja de Extremadura
 Texas Instrumens
 MUTUAMUR, (Mutua de Accidentes de Trabajo y Enfermedades Profesionales de la Seguridad Social nº 244)
 Grupo Tres
 Nivel 7 Informática / 3M (Distribuidor)
 Mekanorba
 Maconsa
 Badajoz Patronato 2000
 Oficina Enclave 92