



Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas



Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 10

“NÚCLEO TEMÁTICO LIBRE”

COMUNICACIONES

APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA BORROSA A LA GESTIÓN DEPORTIVA	867
ZIPI Y ZAPE, LOS TRENES Y LAS MATEMÁTICAS.....	873
LA COMPRENSIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN ESTUDIANTES DE PRIMEROS CURSOS UNIVERSITARIOS: UN ESTUDIO PRELIMINAR.....	879
INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN LA ESO.....	885
DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR: INVESTIGACIÓN - ACCIÓN EN UN GRUPO DE TRABAJO.....	893
¿HAY UN PITAGORICO DETRÁS DE LAS TAULAS DE MENORCA?	899
GRABADOS RUPESTRES GEOMÉTRICOS EN MENORCA.	905

APLICACIÓN DE LA MATEMÁTICA BORROSA A LA GESTIÓN DEPORTIVA

Alfredo Juan Grau Grau
algrau@postal.uv.es

1. INTRODUCCIÓN

En estas últimas décadas la gestión de las actividades relacionadas con el deporte ha tomado un papel relevante para las instituciones deportivas del nuevo milenio; dado el creciente interés mostrado por la sociedad en general (sobre el fichaje de sus deportistas) y los medios de comunicación en particular. En muchos casos las cantidades pagadas pueden producir verdaderos escalofríos, los cuales pueden llegar a agudizarse al pensar que quizás el candidato elegido no dará el rendimiento suficiente para compensar los costes asociados a su contratación. A la luz de este razonamiento, la matemática borrosa, aporta un conjunto de algoritmos que permiten establecer en gran medida la idoneidad del deportista, el cual ha de reunir ciertas cualidades que lo hagan adecuado para la posición o posiciones que debe ocupar en un determinado equipo.

2. METODOLOGÍA

El procedimiento que se propone es sencillo, y permite ser aplicado de manera inmediata en infinidad de situaciones. Este método se sustenta en cuatro fases:

- 1) Establecer el “perfil idóneo” de cada posición en el equipo.
- 2) Buscar para cada una de estas posiciones los deportistas susceptibles de ocuparlas.
- 3) Realizar las pruebas convenientes para obtener el perfil concreto de cada deportista.
- 4) Determinar el grado de cercanía entre los perfiles idóneos y los de cada candidato.

Aquel jugador que más se acerque al ideal buscado para cada posición será el mejor considerado para desempeñar sus habilidades en el futuro equipo. Los descriptores de las cualidades que permiten decidir la adquisición de los servicios de un deportista por parte de un Club Deportivo, entre otras, podrían ser:

- Psico-sociales: actitud ganadora, nivel de disciplina, capacidad de liderazgo...
- Físicos: resistencia al dolor, velocidad media, potencia muscular...
- Técnicos: posiciones atacantes, posiciones defensivas y posiciones mixtas.

Seguidamente resulta imperante el establecimiento del “perfil idóneo” de un deportista, y para ello se recurre a la teoría de los subconjuntos borrosos. El número de cualidades exigidas es igual a n (número finito), las cuales formarán un conjunto llamado E :

$$E = \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \quad [1]$$

Cuando se tienen establecidas las cualidades inherentes a la actividad a desarrollar por el deportista se solicita la opinión de varios expertos, para que indiquen el nivel óptimo¹ que debería poseer el “deportista idóneo”. Así pues, para las cualidades $E_1, E_2, \dots, E_n$, se establecen unos niveles $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ respectivamente, es decir $\mu_i \in [0,1]$, $i = 1, 2, \dots, n$. De manera que, el descriptor del deportista idóneo puede ser representado mediante el subconjunto borroso D , y disponiendo sobre la mesa del conjunto de m candidatos en posesión de la cualidades requeridas se inicia una de las tareas clave para el éxito del proceso que consiste en asignar a cada uno de ellos los niveles para cada una de las cualidades; designado por P_j . A estos efectos, los expertos han de tener amplio conocimiento de las aptitudes del deportista objeto de análisis obteniéndose así un subconjunto borroso con tales características. La matriz de cualidades sería:

	E_1	E_2	E_3	$\dots$	E_{n-1}	E_n
$\tilde{D} =$	μ_1	μ_2	μ_3	$\dots$	μ_{n-1}	μ_n
$\tilde{P}_j =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	$\mu_3^{(j)}$	$\dots$	$\mu_{n-1}^{(j)}$	$\mu_n^{(j)}$

en donde $\mu_i^{(j)} \in [0, 1]$ representa el nivel de la cualidad i , $i = 1, 2, \dots, n$, poseída por el deportista candidato j , $j = 1, 2, \dots, m$.

2.1. La distancia de Hamming

El siguiente paso va a permitir una primera aproximación al proceso óptimo de decisión. Ahora se determina un orden de prelación entre los deportistas candidatos; desde el más idóneo hasta el menos deseable. Esto será posible gracias al concepto de “distancia” o grado de “alejamiento” existente entre el perfil idóneo y el que describe a cada uno de los deportistas susceptibles de ocupar un puesto. Esta idea que gira en torno al concepto de distancia se puede cuantificar según las aportaciones de Kaufmann y Gil Aluja (82,87,93) mediante la “distancia relativa de Hamming”; la cual penaliza tanto al jugador que no llega al nivel exigido como al que posee niveles superiores a los demandados, y cuya expresión analítica propone:

$$\delta(\tilde{D}, \tilde{P}_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\mu_i - \mu_i^{(j)}| \quad [2]$$

Si consideramos los jugadores A, B, C, D y E una vez halladas las distancias entre el perfil idóneo y los perfiles de cada uno nos encontramos en disposición de establecer un orden. Aquél que exprese un grado de alejamiento “menor” con respecto al “idóneo” será el candidato más cercano al óptimo. Así se optaría por conseguir los servicios del jugador B ; de no poder ser, los de D , y así sucesivamente, a saber:

$$\delta(\tilde{D}_Z, \tilde{B}) < \delta(\tilde{D}_Z, \tilde{D}) < \delta(\tilde{D}_Z, \tilde{A}) < \delta(\tilde{D}_Z, \tilde{E}) < \delta(\tilde{D}_Z, \tilde{C}) \quad [3]$$

Dado que las cualidades pueden tener una importancia relativa distinta, cabe introducir la posibilidad de asignarles unos pesos distintos a cada una de ellas, dentro del intervalo

¹ El grado o nivel de cada cualidad se cuantificará según la escala semántica endecadaria aplicada en los trabajos de los profesores Kaufmann y Gil Aluja, desarrollados en el campo de la matemática borrosa; especificándose de la siguiente forma: [1] perfecto, [0.9] muy bueno, [0.8] bueno, [0.7] bastante bueno, [0.6] más bien bueno, [0.5] regular, [0.4] más bien malo, [0.3] bastante malo, [0.2] malo, [0.1] muy malo, [0] pésimo.

[0,1]. Estos coeficientes vienen determinados por ω_i , $i = 1, 2, \dots, n$, y será el equipo técnico quien valorará esos pesos, siendo: $v_1 = \omega_1 / \sum \omega_i$, $v_2 = \omega_2 / \sum \omega_i$, ..., $v_n = \omega_n / \sum \omega_i$. La distancia de Hamming, será sustituida por la nueva expresión:

$$\pi(D_Z, P_j) = \sum_{i=1}^n v_i |\mu_i - \mu_i^{(j)}| \quad [4]$$

donde $j = 1, 2, \dots, m$, y además se volvería a acometer la operación descrita en [3].

2.2. Aportaciones del coeficiente de adecuación

Hasta ahora subyace el razonamiento que implica sancionar de la misma manera no llegar al nivel exigido en cada cualidad, como sobrepasarla. En contraposición, en muchos casos si es conveniente penalizar cuando para una cualidad no se alcanza el nivel requerido (no recompensando ni castigando cuando se supera). Con el afán de poder acercarse a este último postulado surge el llamado “coeficiente de adecuación”. Se construye para cualquier deportista P_j , $j = 1, 2, \dots, m$, a un puesto del equipo D , cuando se exigen la características E_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Se representa por $\mu_i^{(d)}$ y formula los siguientes supuestos:

$$\begin{array}{ll} \text{Si: } \mu_i^{(j)} \geq \mu_i^{(d)}, & i = E_1, E_2, \dots, E_n \\ & j = P_1, P_2, \dots, P_n \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Si: } \mu_i^{(j)} < \mu_i^{(d)}, & i = E_1, E_2, \dots, E_n \\ & j = P_1, P_2, \dots, P_n \end{array} \quad [5]$$

entonces se hará: $k_i(j \rightarrow d) = 1$ se asumirá que: $k_i(j \rightarrow d) = 1 - \mu_i^{(d)} + \mu_i^{(j)}$

Se describe el coeficiente de adecuación $k(j \rightarrow d)$ referente a un deportista P_j , como:

$$k(j \rightarrow d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_i(j \rightarrow d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [1 \wedge (1 - \mu_i^{(d)} + \mu_i^{(j)})] \quad [6]$$

cabe recordar que $j = P_1, P_2, \dots, P_m$, y que la jerarquía de prelación es contraria con la expuesta en [3], es decir ahora de mayor a menor.

2.3. Índice de máximas facultades. Índice de máximo y mínimo nivel

Existe paralelamente a estas conjeturas otra concepción distinta que penaliza progresivamente el alejamiento de la posición de “máximas facultades” en todas y cada una de las cualidades. Esto implica considerar que el perfil idóneo fuera el de un deportista superdotado que posee todas las propiedades del nivel más alto. El nuevo subconjunto borroso y distancia de Hamming, vendrá dados respectivamente por:

$$D = \begin{array}{ccccc} & E_1 & E_2 & E_3 & \dots & E_{n-1} & E_n \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{array}$$

$$\eta(D_Z, P_j) = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n (1 - \mu_i^{(j)}) \right] \quad [7]$$

Por otra parte, no siempre los expertos aceptan que, para todas las cualidades, el excedente de capacidad del deportista sobre el nivel exigido deba ser castigado (tesis de

Hamming). Por ello, resulta imperante considerar tan bueno si se llega a dicho nivel como si se sobrepasa, pudiendo utilizar el coeficiente de adecuación sin reservas añadidas. Esto introduce la consideración no solo del máximo nivel, sino también de un mínimo nivel. Tomando nuevamente las cualidades E_i , $i = 1, 2, \dots, m$, y considerando un grupo de I aspirantes, y recabadas las informaciones sobre el descriptor del “jugador idóneo”, el subconjunto borroso será el que a continuación se describe:

	E_1	E_2	E_3	$\dots$	E_{m-1}	E_m
$\tilde{I} =$	$\mu_I(E_1)$	$\mu_I(E_2)$	$\mu_I(E_3)$	$\dots$	$\mu_I(E_{m-1})$	$\mu_I(E_m)$
$\tilde{D} =$	$\mu_{Pr}(E_1)$	$\mu_{Pr}(E_2)$	$\mu_{Pr}(E_3)$	$\dots$	$\mu_{Pr}(E_{m-1})$	$\mu_{Pr}(E_m)$

así $r = 1, 2, \dots, m$, y además se supone que las m cualidades, $u = a, b, \dots, p$, precisan estos requisitos. Intuitivamente $(a, b, \dots, p) \in [0,1]$. Para el resto de cualidades $v = c, d, \dots, s$ (Cual. $u +$ Cual. $v = m$), así cuando un deportista no llega al nivel exigido en el perfil idóneo es penalizado. En cambio, cuando sobrepasa dicho nivel no sufre penalización alguna, pero tampoco es primado. Obtendremos de esta forma dos expresiones, una primera cercana a aquellas características más descriptivas de las cualidades deseadas aplicando así la distancia relativa de Hamming y el segundo grupo que se identifica con un índice de alejamiento del perfil idóneo. Tendremos así las siguientes ecuaciones:

$$\varphi(\tilde{I}, \tilde{P}_r) = \frac{1}{\text{Cual. } u} \sum_{u=a}^p |\mu_I(E_u) - \mu_{Pr}(E_u)| \quad [8.a]$$

$$\zeta(\tilde{I}, \tilde{P}_r) = \frac{1}{\text{Cual. } v} \sum_{v=c}^s \{0 \vee [\mu_I(E_v) - \mu_{Pr}(E_v)]\} \quad [8.b]$$

Cabe destacar que integrando estas dos expresiones en una, se obtiene el “índice de máximo y mínimo nivel”, y tomaremos el mismo orden que en [3]:

$$\sigma(\tilde{I}, \tilde{P}_r) = \frac{[\varphi(\tilde{I}, \tilde{P}_r) + \zeta(\tilde{I}, \tilde{P}_r)]}{\text{Cual. } u + \text{Cual. } v}, \quad \text{donde Cual. } u + \text{Cual. } v = m. \quad [9]$$

3. SUPUESTO PRÁCTICO: FICHAJE DE UN EXTREMO IZQUIERA (EI)

Apliquemos un caso práctico que paulatinamente irá realizando los cálculos matemáticos descritos. Supóngase que se trata de cubrir la posición de “extremo izquierda” en un equipo de fútbol. Según los expertos, este puesto ha de cubrir seis cualidades ($a, b, \dots, f$), cuyo conjunto borroso se determina con la siguiente matriz:

	a	b	c	d	e	f	perfiles
$\tilde{D}_{EI} =$	$\mu_a = .5$	$\mu_b = 1$	$\mu_c = .8$	$\mu_d = 1$	$\mu_e = .3$	$\mu_f = 1$	dep. idóneo
$\tilde{A} =$	$\mu_a^{(A)} = .7$	$\mu_b^{(A)} = .8$	$\mu_c^{(A)} = .4$	$\mu_d^{(A)} = .9$	$\mu_e^{(A)} = .8$	$\mu_f^{(A)} = .5$	candidato A
$\tilde{B} =$	$\mu_a^{(B)} = .4$	$\mu_b^{(B)} = .9$	$\mu_c^{(B)} = .6$	$\mu_d^{(B)} = .7$	$\mu_e^{(B)} = .2$	$\mu_f^{(B)} = .9$	candidato B
$\tilde{C} =$	$\mu_a^{(C)} = .8$	$\mu_b^{(C)} = 1$	$\mu_c^{(C)} = .9$	$\mu_d^{(C)} = .6$	$\mu_e^{(C)} = .9$	$\mu_f^{(C)} = .7$	candidato C

Notación: a=buena complexión física, b=depurada técnica, c=juego de cabeza, d=buen regate, e=dureza en el juego y f=visión conjunta del juego. $\underline{D}_{EI}$ =perfil idóneo y $\underline{A}$, $\underline{B}$ y $\underline{C}$, los perfiles propios de los tres jugadores.

Aplicando la distancia de Hamming propuesta en [4], y suponiendo los pesos: $\omega_a=0.2$, $\omega_b=1$, $\omega_c=.6$, $\omega_d=.9$, $\omega_e=.3$ y $\omega_f=.8$ ($\sum \omega_i=3.8$); las puntuaciones para los deportistas A, B y C, considerando $v_a=.05$, $v_b=.26$, $v_c=.15$, $v_d=.24$, $v_e=.8$ y $v_f=.21$, serían:

$\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{A}) = .05 | .5-.7 | + .26 | 1-.8 | + .15 | .8-.4 | + .24 | 1-.9 | + .08 | .3-.8 | + .21 | 1-.5 | = 0.29$. Para abreviar se facilita que $\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{B}) = 0.16$ y $\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) = 0.22$, con lo cual, $\pi(\underline{D}_{EI}, \underline{B}) < \pi(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) < \pi(\underline{D}_{EI}, \underline{A})$, conduce a decantarse por el jugador B, ya que es el más cercano al “perfil idóneo”. En este caso se castiga igualmente al jugador que no llega al citado perfil, como al que lo sobrepasa.

Aprovechando el recurso del coeficiente de adecuación, que permite sancionar no alcanzar el nivel deseado pero ni se premia ni se castiga el sobrepasarlo, y utilizando las relaciones [5] y [6], se obtendrán los siguientes resultados: $k_a(A \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 1 \wedge (1-.5+.7) = 1$, $k_b(A \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 1 \wedge (1-1+.8) = .8$, $k_c(A \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 1 \wedge (1-.8+.4) = .6$, $k_d(A \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 1 \wedge (1-.5+.7) = .9$, $k_e(A \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 1 \wedge (1-.5+.7) = 1$ y $k_f(A \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 1 \wedge (1-.5+.7) = .5$; de igual modo, se calculan estos previos para los jugadores B y C, y prosiguiendo se tendrá: $k(A \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 1/6(1+.8+.6+.9+1+.5) = 0.48$; así $k(B \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 0.51$, y $k(C \rightarrow \underline{D}_{EI}) = 0.53$. Bajo este criterio es el jugador C el que resultaría más interesante. Recuérdesse que adicionalmente se propuso otro supuesto de exigencia de máximas facultades, que penalizaba, recuérdesse, el alejamiento de la posición de máximas cualidades, con respecto a la unidad. Realizando nuevamente los cálculos pertinentes en base a la ecuación [7], se tendría que: $\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{A}) = 1/6(|1-.7| + |1-.8| + |1-.4| + |1-.9| + |1-.8| + |1-.5|) = 0.32$, y equivalentemente: $\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{B}) = 0.38$ y $\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) = 0.18$. Así pues, según el orden: $\eta(\underline{D}_{EI}, \underline{C}) < \eta(\underline{D}_{EI}, \underline{A}) < \eta(\underline{D}_{EI}, \underline{B})$, de nuevo el jugador idóneo es el C.

Se complementan estos resultados calculando también los índices de máximo y mínimo nivel, respectivamente. La ecuación [8.a], agrupa las tres primeras cualidades (Cual. u = buena complexión física, depurada técnica y juego de cabeza) y no conviene sobrepasar el nivel óptimo, por el contrario la ecuación [8.b], indica que es indiferente que el jugador sobrepase los niveles exigidos, para las restantes cualidades (Cual. v = buen regate, dureza en el juego y visión conjunta del juego). Llevando todo esto a la práctica, se analiza para el jugador A que: $\varphi_a(\underline{D}_{EI}, A) = |.5-.7| = .2$, $\varphi_b(\underline{D}_{EI}, A) = |1-.8| = .2$ y $\varphi_c(\underline{D}_{EI}, A) = |.8-.4| = .4$, se corresponden con la cualidades del primer grupo y $\zeta_d(\underline{D}_{EI}, A) = 0 \vee (1-.9) = .1$, $\zeta_e(\underline{D}_{EI}, A) = 0 \vee (.3-.8) = 0$ y $\zeta_f(\underline{D}_{EI}, A) = 0 \vee |1-.5| = .5$, con las del segundo. Idénticamente esto se repite para los jugadores B y C; y sustituyendo sus valores en [9] se obtiene el índice de máximo y mínimo nivel, es decir: $\sigma(\underline{D}_{EI}, A) = 1/6(.2+.2+.4+.1+0+.5) = 0.23$; para $\sigma(\underline{D}_{EI}, B) = 0.15$ y $\sigma(\underline{D}_{EI}, C) = 0.18$. Estos valores numéricos conducen a opinar que el jugador idóneo es el B.

4. CONCLUSIONES FINALES

A modo de conclusión, se puede afirmar que de una forma sencilla se ha abierto un camino para dar solución a un problema de candente interés que la práctica del deporte

reclama insistentemente. Aunque no se trata de la panacea, sí puede proporcionar una eficaz ayuda en la toma de decisiones sobre el fichaje de un deportista; y dada la flexibilidad de estos instrumentos se pueden cubrir infinidad de necesidades.

5. BIBLIOGRAFÍA

- Kaufmann, A.: Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos. CECSA. 1982.
- Kaufmann, A. y Gil Aluja, J.: Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre. Ed. Hispano Europea. 1987.
- Kaufmann, A. y Gil Aluja, J.: Técnicas especiales para la gestión de expertos. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela, 1993.
- Gil Aluja, J.: Investment in uncertainty. Kluwer Academic Publishers. Boston, Dordrecht, London 1998.

ZIPI Y ZAPE, LOS TRENES Y LAS MATEMÁTICAS

Eduardo Zurbano Fernández

Resumen

Se presenta el desarrollo de una historieta de Zipi y Zape, dedicada por entero a un clásico problema de trenes. Pero el enunciado aporta dificultades adicionales, que plantean diversas e interesantes posibilidades de interpretación. Curiosamente, la solución dada por los personajes, y que les supone Matrícula de Honor, no parece revelarse como correcta. Esto puede utilizarse en nuestras aulas, y de hecho ha sido ya aprovechado por el autor del trabajo, para provocar una estimulante búsqueda de enunciados posibles que se puedan llegar a adaptar a la solución propuesta.

De todos los personajes de los tebeos que tuvimos ocasión de leer quienes pertenecemos a una determinada generación, posiblemente sean Zipi y Zape los que presenten más posibilidades de aprovechamiento didáctico en nuestras aulas de matemáticas. Al fin y al cabo, eran niños a los que, como a los de ahora, no les quedaba más remedio que ir a la escuela, y en ella la matemática era una disciplina problemática, compleja y difícil. Exactamente igual que ahora y, nos atrevemos a pronosticar, exactamente igual que será en el futuro.

En este sentido, una ocasión excepcional de utilizar esa revista infantil para nuestros propósitos de formación nos la puede brindar una historieta, dedicada por entero a un problema de matemáticas, que el azar quiso poner en nuestras manos. El enunciado en cuestión es:



Ciertamente, hay problemas de móviles más sencillos, pero el caso es que nuestros pequeños personajes se las tuvieron que ver precisamente con el que acabamos de

enunciar. Se trata de un problema que, si bien analizamos aquí desde un enfoque matemático, podría pertenecer también al campo de la dinámica.

Las estrategias utilizadas por los personajes para hacer frente a la situación planteada son muy variadas:

Inicialmente, intentan una resolución algebraica, mediante la utilización de sus supuestos que escasos conocimientos matemáticos, pero fracasan, por lo que buscan la ayuda paterna, que no se revela precisamente como muy fructífera, y que acaba sumiendo a don Pantuflo en la desesperación:



Intentan modelizar la situación, en la línea de plantear un problema más sencillo, para lo cual sustituyen los 600 Km. por 6 Km., y las locomotoras por patinetes. Llegan a una solución totalmente descabellada, de lo que afortunadamente se percatan:



Buscan asesoramiento de expertos, recurriendo a un empleado de los Ferrocarriles, quien no les resuelve exactamente el problema, sino que les proporciona el proceso para que ellos lleguen a la solución. Pero lamentablemente, cuando intentan analizar dicho proceso, son incapaces de entenderlo, con lo que otra vez la solución se les escapa.



Se les ocurre acudir a una adivina de feria, de las de la bola, lo cual nos proporciona la oportunidad de ver a Zipi y Zape, disfrazados de magos, realizar un interesante juego de magia matemática, ...pero el problema sigue sin ser resuelto.



Se encuentran con un anciano y pobre profesor de matemáticas, que se dedica a robar palomas en los parques para poder comer, y que, hábilmente chantajeado, les proporciona la respuesta, pero tienen la mala suerte de perderla.

Por último, no se plantean ya construir un modelo de la realidad, sino que sencillamente construyen esa realidad: se montan en dos locomotoras y reproducen exactamente las condiciones del problema, llegando a la solución de una manera evidentemente práctica y, como es lógico en una historieta como la que estamos comentando, chocando las locomotoras y acabando con nuestros amigos en el hospital:



Las posibilidades de aprovechamiento didáctico de la historia nos conducen a una serie de consideraciones:

Escobar, el autor, denomina problema a la situación que plantea. Desde nuestro enfoque actual, en el que se tiende a diferenciar entre problema y ejercicio, entendemos que Zipi y Zape se encuentran efectivamente ante una tarea cuyos términos y propósito son globalmente comprensibles para ellos, pero que no saben en principio cómo abordar. Estamos, pues, ante un problema.

Nuestros héroes, como hemos señalado ya, intentan una y otra vez llegar a la solución, para lo cual ponen en juego distintos tipos de estrategias heurísticas, más ortodoxas unas que otras. Pero lo que es a nuestro juicio más destacable es el entusiasmo y tesón que demuestran, pues nunca se dan por vencidos, aunque ciertamente en algunas ocasiones lleguen a vulnerar claramente la legalidad. La componente actitudinal es clara, pues hay una gran curiosidad e interés por investigar y resolver el problema, hay también una gran creatividad en la búsqueda de estrategias diversas, y una evidente autonomía intelectual para enfrentarse a esa situación con todas las armas posibles.

Y precisamente por las razones anteriores acaban obteniendo matrícula de honor en matemáticas, cuando en realidad para resolver el problema no han hecho uso de las matemáticas, aunque sí que han planificado y elaborado meticulosamente una experiencia que las matemáticas podrían modelizar. En la concepción actual del Currículo de Matemáticas, en la que el énfasis ha de ser puesto en el proceso más que en el resultado, en el camino más que en la meta, esto podría llegar a resultar un tanto disonante.

En una de las estrategias que intentan consiguen alcanzar una solución, que analizan, y que finalmente deshechan por no ser admisible. En nuestra opinión, es destacable esta aplicación de la fase 4ª del proceso, ya clásico, de Polya para la resolución de problemas, y que se olvida con cierta frecuencia.

Respecto de la posible solución, hay también varios comentarios que hacer, referidos a la condición de que a los 200 km un imprevisto reduce la marcha, ya que tal condición admite varias interpretaciones:

Se puede entender, y suele ser lo más habitual, que cada una de las locomotoras recorre 200 Km. antes de reducir la velocidad.

Se puede interpretar que cada una recorre 100 km, con lo cual son 200 km en total.

O se puede suponer que el cambio se produce cuando conjuntamente hayan recorrido esos 200 km, y que justo en ese momento, el mismo para las dos, disminuyen las velocidades.

Con ninguna de ellas se llega a la solución del tebeo. Una buena pregunta podría ser el buscar, a partir de la solución citada, algún enunciado coherente con ella, o demostrar que esa solución es imposible, en los términos básicos de dicho enunciado.

Otros aspectos que aparecen implícitos en la historia, y que nos parece interesante destacar, apuntan hacia la consideración social que reciben quienes son capaces de resolver correctamente problemas matemáticos. Ello conecta con lo que, comúnmente admitido, recoge por ejemplo el Informe Cockcroft, en el sentido de que las matemáticas se ven, de algún modo, como especialmente importantes.

Queremos señalar finalmente que, propuesto el problema a un grupo de estudiantes para maestros de Educación Primaria, el interés por encontrar la respuesta fue excepcionalmente intenso. En nuestra opinión, ello puede indicar que la procedencia del mismo ejerció posiblemente un papel especialmente motivador, de manera que nuestros alumnos mostraron una intención de ayudar a Zipi y Zape que desbordó absolutamente nuestras creencias a priori.

En este sentido, si bien estamos muy satisfechos de la participación, no podemos decir lo mismo de los resultados concretos en cuanto a las soluciones que nos aportaron esos alumnos. Podemos comentar, por ejemplo, que una alumna llegó a una solución errónea de la misma naturaleza que aquella a la que llegaron Zipi y Zape (los trenes se cruzaban a unas distancias de Madrid y Barcelona que sumaban más de 600 Km), pero no se percató del error. Otro alumno, trabajando sobre los tiempos, llegaba a la conclusión de que el cruce era a las 13 horas y 20 minutos de haber salido la de Madrid, y a las 10 horas y 13 minutos de haber salido la de Barcelona (!). En términos porcentuales, un 40% de los alumnos plantearon y desarrollaron correctamente el proceso de resolución del problema, aunque no todos ellos llegaron a la solución “verdadera” correspondiente.

Bibliografía.

- Ediciones B (1990): Zipi y Zape, colección Olé, nº 380, Barcelona.
- Cockcroft, Comisión (1985): Las matemáticas sí cuentan, MEC, Madrid.
- Polya, G (1965): Cómo plantear y resolver problemas, Trillas, México D. F.
- Principado de Asturias (2002): Decreto 69/2002 de 23 de Mayo, BOPA 149 de 28 de Junio de 2002 (Currículum Autonómico de Matemáticas para la ESO).

LA COMPRENSIÓN DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS EN ESTUDIANTES DE PRIMEROS CURSOS UNIVERSITARIOS: UN ESTUDIO PRELIMINAR

Matías Camacho Machín
Universidad de La Laguna
mcamacho@ull.es

Josefa Perdomo Díaz ^{*}
Universidad de La Laguna
joperdom@fmat.ull.es

Introducción

El trabajo que aquí presentamos forma parte de un estudio más amplio cuyo objetivo general es el de diseñar una secuencia de enseñanza para la introducción de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's) independientemente de los ámbitos en los que se desarrolle. Se pondrá un énfasis especial en los aspectos de visualización que serán potenciados utilizando Computer Algebra Systems (CAS) tales como calculadoras simbólicas (Voyage 2000) y software de cálculo simbólico (DERIVE, MAPLE). Con el fin de garantizar la validez de la secuencia en diversos ámbitos de enseñanza, trabajaremos con alumnos de diferentes licenciaturas en las que, tradicionalmente, se enseñan las EDO's desde distintos puntos de vista. Las licenciaturas elegidas para la investigación son las de Matemáticas, Física y Química, aunque en este artículo nos centraremos en un estudio preliminar con alumnos de la Licenciatura de Matemáticas.

Se desarrollará un análisis preliminar detallado de las concepciones de los estudiantes, las dificultades con que se encuentran y los errores más frecuentes que cometen cuando resuelven tareas sencillas para las que se requiere una comprensión del concepto basada en el uso coordinado de diferentes sistemas de representación (Duval, 1998). En este caso nos centraremos en el análisis de ciertas concepciones de los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas y de algunos errores que emergen con cierta frecuencia en la resolución de una serie de problemas no rutinarios diseñados a tal efecto.

Examinaremos cómo actúan los alumnos frente a una serie de cuestiones que consideramos básicas relacionadas con las EDO's, al objeto de establecer más adelante qué significa comprender el concepto de ecuación diferencial ordinaria y cómo podemos ayudar a que el estudiante construya este concepto. Para realizar este análisis nos hemos planteado unas preguntas generales que nos ayudarán a hacernos una idea de cómo entienden los estudiantes las EDO's, analizando su actuación cuando resuelven las tareas. Esas cuestiones son las siguientes:

PG 1: ¿Los alumnos utilizan los conocimientos que poseen, anteriores al estudio de las EDO's, para resolver cuestiones sencillas?

PG 2: ¿Qué uso hacen de los distintos registros de representación?

PG 3: ¿Qué influencia tiene el contexto de la pregunta en el modo de actuación de los estudiantes?

PG 4: ¿Cómo actúan frente a problemas con un contexto real?

Con el fin de responder a estas preguntas generales se diseñó un cuestionario con siete problemas sobre EDO's, en su mayoría de primer orden, dirigido a alumnos con una

^{*} Autor que presenta la comunicación.

formación básica en ecuaciones diferenciales y en él se plantea una serie de problemas no rutinarios que los estudiantes deben resolver haciendo uso de los registros gráfico, algebraico y verbal.

Antecedentes

Existen en la literatura algunos trabajos acerca de la enseñanza y aprendizaje de las EDO's que se desarrollan desde diferentes puntos de vista. Los trabajos más antiguos que hemos estudiado sobre el tratamiento geométrico de las EDO's son las propuestas de enseñanza dadas por Brodetsky (1919-1920) y Artigue y Gautheron (1983).

Trabajos más recientes han conjugado aspectos tanto algebraicos, como gráficos y numéricos a la vez que se ha apostado por el uso de la tecnología para la enseñanza y aprendizaje de las EDO's (Hernández, 1995, 1999). En el primero se propone una secuencia de enseñanza y, basándose en los resultados expuestos en este trabajo, en el segundo se hace uso de la calculadora simbólica TI-92 para la enseñanza de las EDO's.

Por otro lado existe una serie de investigaciones centradas en el estudio de las normas sociales y socio-matemáticas que surgen en el aula (Rasmussen y Yackel, 1999 ; Yackel, Rasmussen y King, 2000; Stephan y Rasmussen, 2002) y la influencia de la tecnología en las mismas (King, 1999).

Desde un punto de vista más individual con respecto al alumno, nos encontramos con trabajos en los que se analizan aspectos concretos de las EDO's. Zandieh y McDonald (1999) estudian la comprensión, por parte de los estudiantes, del concepto de solución de equilibrio de una EDO basándose en el trabajo de Rasmussen (1998). Habre (2000) hace referencia al uso de los campos de direcciones, teniendo en cuenta si los consideran como una forma de resolver EDO's y si saben obtener toda la información posible de los mismos.

Por último, Donovan, J. (2004) y Trigueros, M. (2004) utilizan el constructivismo y la teoría APOS, respectivamente, como guía de investigación. El primero describe el esquema, en el sentido de Skemp, de EDO's de primer orden que construye un alumno. Mientras que Trigueros analiza las respuestas de los estudiantes a cuestiones relacionadas con los sistemas de ecuaciones diferenciales.

Metodología y análisis de los datos

Para desarrollar nuestra investigación se diseñó un cuestionario con siete problemas no rutinarios algunos de las cuáles fueron tomadas de libros de textos relacionados con el aprendizaje de las EDO's (Hughes-Hallet et al., 2002) y otros fueron diseñados por los investigadores. Se pidió a los alumnos que estudian por primera vez ecuaciones diferenciales (3º de Matemáticas) que resolvieran el cuestionario empleando únicamente lápiz y papel. Presentamos a continuación algunas de las preguntas del cuestionario que nos ayudarán a responder a las cuestiones generales formuladas en la introducción.

PC 1: Representa gráficamente algunas soluciones de las siguientes ecuaciones.

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = 0 ; x \in [0,2] \quad \text{b) } \frac{dy}{dx} = \cos x \quad \text{c) } \frac{dy}{dx} = y ; x \geq 0 \quad \text{d) } y'(t) = y^2$$

Tres de las ecuaciones planteadas en este problema son de resolución inmediata en el sentido de que no se necesita conocer ningún método específico de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias para encontrar las soluciones. Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta será fundamental para establecer en qué medida los alumnos utilizan los conocimientos que han adquirido a lo largo de su trayectoria universitaria para resolver cuestiones sencillas.

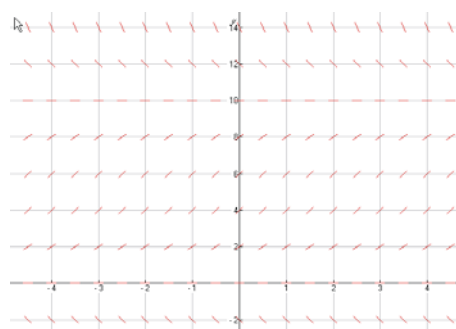
PC 2: Resuelve la ecuación diferencial $y'(t)=1/t$. Dibuja el campo de direcciones asociado a esta ecuación y una solución correspondiente a $t=-1$.

En este problema se conjugan los registros algebraico y gráfico lo que nos permitirá analizar la actuación de los estudiantes en distintos registros de representación y la medida en que cada uno de ellos es tenido en cuenta cuando se les presentan de forma conjunta.

PC 3: Se sabe que la población de una ciudad crece a medida que pasa el tiempo, verificando la ecuación diferencial $\frac{dP}{dt} = K$, $K > 0$. Si la población se ha doblado en 3 años, y en 5 años ha alcanzado la cifra de 40.000 habitantes, ¿cuántas personas vivían en la ciudad al comienzo de ese período de cinco años?

Además de analizar el uso que hacen los estudiantes de los registros verbal y algebraico y el paso de uno al otro, con este problema podremos analizar cómo actúan los alumnos ante un problema situado en un contexto real y si la presentación del enunciado en este contexto influye en la manera de resolver el problema.

PC 4: Consideremos el campo de direcciones asociado a la ecuación $\frac{dP}{dt} = 0.1P(10 - P)$



Representa las soluciones que cumplen que $P(0)=0$ y $P(-2)=12$. ¿Para qué valores positivos de P las soluciones son crecientes? ¿y decrecientes? ¿Cuál es el límite de P cuando t tiende a infinito?

Si la ecuación dada modeliza una población determinada de individuos, ¿cómo interpretarías los resultados que acabas de obtener?

Ésta es la única pregunta del cuestionario en la que se presentan de forma conjunta el campo de direcciones asociado a una EDO y la contextualización del problema en un entorno real para el alumno. Nos será de gran ayuda para observar si los estudiantes actúan de igual forma ante problemas planteados en diferentes contextos y para analizar en qué registro de representación se sienten más cómodos y si son capaces de elegir el registro que más convenga a sus necesidades.

Las respuestas dadas por los alumnos a la pregunta **PC 1** reflejan que la mayoría de ellos necesita hacer uso del registro algebraico antes de representar gráficamente las soluciones pedidas, lo que nos hace pensar que no tienen en cuenta propiedades elementales de las funciones y las derivadas, estudiadas con anterioridad. Por otro lado, los estudiantes no siempre actúan de la misma forma, observándose que hay un mayor número de alumnos que no hacen uso del registro algebraico para dibujar las soluciones de la ecuación diferencial $y'(x) = 0$ frente a los que sí lo utilizan antes de representar gráficamente las soluciones de las ecuaciones $y'(x) = \cos x$ e $y'(x) = y$, como refleja la siguiente tabla.

	$\frac{dy}{dx} = 0 ; x \in [0,2]$	$\frac{dy}{dx} = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = y ; x \geq 0$	$y'(t) = y^2$
RG	8	4	3	0
RA	2	5	6	7

Se observa que pueden existir problemas a la hora de representar traslaciones de funciones ya que se pide, en esta pregunta, que representen algunas soluciones de las ecuaciones diferenciales dadas y hay alumnos que, sobre todo en el último apartado, dibujan únicamente una solución. Esta manera de actuar de los estudiantes nos hace pensar que no hacen uso de conocimientos adquiridos con anterioridad, tal vez porque no los recuerden o porque no crean que pueden utilizarlos en el contexto de las EDO's. Hemos observado en las respuestas al problema **PC 1** que, en general, al utilizar el registro algebraico para resolver las ecuaciones diferenciales, la mayoría no hace uso de la constante de integración. Concretamente cuatro alumnos, de los diez que contestan a esta pregunta, no ponen dicha constante al resolver las ecuaciones diferenciales y emplean métodos propios para la resolución de las mismas.

El número de personas que cometen este error aumenta en **PC 2**, donde la resolución de la EDO nos conduce a un logaritmo. En esta misma pregunta los alumnos no ponen el valor absoluto al argumento del logaritmo cuando resuelven esta ecuación, un error frecuente en el cálculo de integrales y que creemos que no es directamente atribuible al hecho de estar trabajando con ecuaciones diferenciales.

Es importante destacar el comportamiento de los alumnos cuando se les plantean cuestiones relacionadas con el campo de direcciones asociado a una EDO. En la pregunta **PC 2** se observa que únicamente tres alumnos dibujan el campo de direcciones y sólo uno de ellos lo utiliza para comprobar que la solución de la ecuación diferencial dada con anterioridad es correcta. Además se tiene que, aunque sólo tres estudiantes fueron capaces de dibujar el campo de direcciones en esta pregunta, fueron más los alumnos que resolvieron el problema en el que se les proporcionaba el campo de direcciones y sólo tenían que interpretarlo. Conjeturamos, a partir de esto, que los alumnos no saben dibujar un campo de direcciones pero sí saben qué es y para qué sirve.

Especial mención merece la actuación de los estudiantes frente a los problemas situados en un contexto real (**PC 3**). Existe un descenso considerable en el número de respuestas suministradas por los alumnos (tres de los diez alumnos no contestan a ninguna de las preguntas de este tipo) y, en general, no interpretan correctamente los resultados obtenidos dentro del contexto en que se les da el problema. Más llamativo resulta observar que hay bastantes alumnos que, al enfrentarse a este tipo de problemas empleando el registro algebraico, no resuelven de forma correcta la ecuación diferencial (inmediata), puesto que no ponen la constante de integración correspondiente cuando en

ejercicios anteriores algunos no han cometido ese error. En general se nota un cambio en la forma de actuar a la hora de resolver el problema.

Sólo cinco alumnos contestaron a la pregunta **PC 4**. Dos de ellos dejan de lado el campo de direcciones e intentan resolver el problema empleando únicamente el registro algebraico. Esta forma de actuar se puede observar también en otro compañero a la hora de estudiar el crecimiento y decrecimiento de las soluciones. En general podemos decir que, de los pocos alumnos que resuelven este problema, casi ninguno es capaz de obtener toda la información posible de un campo de direcciones. La mayoría de ellos necesitan, nuevamente, pasar por el registro algebraico para dar respuesta a las cuestiones planteadas.

Conclusiones

Pese a las limitaciones propias que conlleva un trabajo de esta índole, podemos avanzar algunas respuestas parciales a las preguntas que lo motivan.

En general, los alumnos no hacen uso de conocimientos adquiridos previamente al estudio de las EDO's pero habría que analizar cuál es la verdadera razón para que ésto suceda. Puede que los alumnos no hayan aprendido correctamente determinados conceptos o tal vez no consideren que sean de aplicación en otro contexto distinto de aquél en el lo estudiaron.

En cuanto al manejo de los distintos registros de representación, observamos que ningún alumno hace uso del registro gráfico, en general, y del campo de direcciones, en particular, si no se les pide explícitamente. Resulta significativo que cuatro de los diez alumnos que resolvieron las tareas no hayan trabajado ninguna de las preguntas relacionadas con el campo de direcciones. Podemos afirmar que, tal y como sucede en otros ámbitos de investigación (González-Martín y Camacho, 2004), los alumnos prefieren trabajar en el registro algebraico si se les da la opción. En cualquier caso, se observa también que los estudiantes, en general, no intentan abordar los problemas en otro registro cuando ven que el que intentan emplear no les aporta la información que necesitan.

Por último, podemos afirmar que los alumnos no actúan de la misma forma frente a contextos diferentes. Los métodos empleados para resolver una EDO no coinciden si se les presenta como una ecuación que tienen que resolver (**PC 1**) o si se trata de un problema con un contexto real (**PC 4**).

Bibliografía

- Artigue, M. y Gautheron, V. (1983). *Systèmes différentiels. Étude graphique*. Ed. CEDIC.
- Asiala, M. , Brown, A., Devries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education*, vol. 6, 1-32.
- Brodetsky, S. (1919). The graphical treatment of differential equations (I). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 377-382, Ed. Greenstreet, W. J.
- Brodetsky, S. (1920). The graphical treatment of differential equations (II). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 3-8, Ed. Greenstreet, W. J.
- Brodetsky, S. (1920). The graphical treatment of differential equations (III). *The Mathematical Gazette*, vol. IX, pp. 35-38, Ed. Greenstreet, W. J.
- Brodetsky, S. (1920). The graphical treatment of differential equations (IV). *The Mathematical Gazette*, vol. X, pp. 49-59, Ed. Greenstreet, W. J.

- Donovan, J. (2004). A first order differential equations schema. *Proceedings of the PME-NA XXVI*, pp. 111-118.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. F. Hitt (ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, pp. 173-201, Grupo Editorial Iberoamérica.
- González-Martín, A. y Camacho M. (2004). Legitization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28 PME*, vol 2, pp. 479-486.
- Habre, S. (2000). Exploring Students' Strategies to Solve Ordinary Differential Equations in a Reformed Setting. *Journal of Mathematical Behavior*, vol 18 (4), pp.. 455-472.
- Hernández, A. (1995). *Obstáculos en la articulación de los marcos numérico, gráfico y algebraico en relación con las EDO's*. Tesis Doctoral sin publicar. CINVESTAV. México.
- Hernández, A. (1999). A didactic engineering research performed within a course on ordinary differential equations where students use the TI-92 calculator. *Proceedings of the PME-NA XXI*, pp.. 213-217.
- King, K. (1999). The influence of technology on socio-mathematical norms in a differential equations course. *Proceedings of the PME-NA XXI*, pp. 219-224.
- Rasmussen, C. , Yackel, E. (1999). Normative understandings regarding explanation: a study of one differential equations classroom community. *Proceedings of the PME-NA XXI*, pp. 239-244.
- Stephan, M., Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, vol 21, pp. 459-490.
- Trigueros, M. (2004). Understanding the meaning and representation of straight line solutions of systems of differential equations. *Proceedings of the PME-NA XXVI*, pp. 127-134.
- Yackel, E., Rasmussen, C., King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. *Journal of Mathematical Behavior*, vol 19, pp. 275-287.
- Zandieh, M. , McDonald, M. (1999). Student understanding of equilibrium solution in differential equations. *Proceedings of the PME-NA XXI*, pp. 253-258.

INVESTIGACIONES MATEMÁTICAS EN LA ESO

Pedro Cobo, Jordi Comellas, Joaquim Giménez,
Jaume Serra, Manel Sol, Xavier Vilella

Grup Vilatzara - ICE UAB

Normalmente en clase proponemos problemas orientados a la adquisición de conceptos matemáticos o bien al aprendizaje de técnicas heurísticas. Sin embargo es importante introducir otro tipo de actividades como proyectos e investigaciones. En los proyectos se pretende generalmente que los alumnos estudien una situación de su entorno y muestren como las matemáticas son útiles para comprenderla. En las investigaciones el objetivo principal es que experimenten qué son las matemáticas, cómo surgen los resultados matemáticos y cómo estos resultados se verifican y demuestran.

Diversos autores han insistido en la importancia de incorporar pequeñas investigaciones en nuestras clases de matemáticas [Brocardo (2004), Bishop (1999)]. Esta comunicación explica cómo se han llevado a cabo estas actividades en un instituto de las cercanías de Barcelona.

En la primera parte daremos los detalles prácticos de qué son las actividades de investigación y cómo se llevan a cabo en clase. En la segunda parte analizaremos algunas producciones de alumnos de la tercera de las investigación llevada a cabo por alumnos de 3º de la ESO, la mayoría de los cuales no habían tenido experiencia previa con este tipo de actividades en clase de matemáticas.

Desarrollo de una investigación

Normalmente organizamos las investigaciones en cinco o seis turnos a lo largo del curso. En cada ocasión destinamos generalmente dos sesiones consecutivas de clase, aunque en las primeras investigaciones suele ser necesario dedicar alguna sesión adicional. Después de estas sesiones la investigación continúa como trabajo individual a realizar en casa.

El profesor plantea al iniciarse la primera sesión dedicada a una investigación un problema sencillo. Ése es el punto de partida. Los alumnos se organizan en pequeños grupos y empiezan a estudiar la situación. Generalmente el punto de partida se resuelve con facilidad, pero su resolución permite al alumno entender la situación y ponerse a trabajar en el problema más amplio.

En el ejemplo que estudiaremos se les plantea que encuentren cuantas regiones del plano quedan delimitadas por tres rectas. En concreto, se les proporciona por escrito el redactado siguiente.

Dividimos terrenos

Cuando se conquistó el «far-west» se dividieron grandes superficies de pastoreo. El modo más fácil de hacerlo es marcando líneas rectas sobre el terreno. Estudia qué particiones del terreno son posibles. ¿Cual es el número mínimo de parcelas que se pueden formar con tres rectas? ¿Y el número máximo?

Investiga qué pasa con diferentes números de rectas. ¿Qué pasaría si en lugar de rectas divides el terreno con circunferencias?

Resolver la situación con tres rectas es muy fácil y así lo entienden los alumnos. Descubren rápidamente que existen cuatro posibles configuraciones: 3 rectas paralelas (4 parcelas), 2 rectas paralelas y una que las corta (6 parcelas), 3 rectas coincidentes (6 parcelas) y las tres rectas formando un triángulo (7 parcelas).

Es en este momento cuando comienza la verdadera tarea. Empiezan a plantearse qué pasa si el número de rectas es diferente. Con una recta la situación no tiene más historia. Con dos rectas también parece muy fácil. El caso con tres rectas se acaba de resolver. Con cuatro rectas el problema ya no parece tan sencillo. Con cinco rectas ya no es nada fácil no equivocarse, no dejarse ningún caso. Con seis...

Como ya han trabajado en otras investigaciones ya saben lo que deben hacer. Por esta razón en las primeras ocasiones que se lleva a cabo una investigación se debe explicar muy bien en qué consiste, qué es lo que el profesor espera de ellos y qué y cómo se les evaluará. En la primera –y normalmente también la segunda- investigación es conveniente dedicar alguna sesión adicional para una mejor orientación de los alumnos. En el caso del ejemplo que estamos estudiando ya era la tercera que llevaban a cabo y tenían muy claro lo que debían hacer.

Rápidamente la mayoría de los grupos intentan organizar la acumulación de datos en una tabla. Saben que su tarea principal es encontrar patrones y regularidades. Deben describirlos y, si es posible, encontrar cómo generalizar. Se les valorará que describan los patrones encontrados, especialmente si son capaces de encontrar métodos que nos permitan predecir otros casos. Por ejemplo, intentan encontrar fórmulas algébricas que nos den el número mínimo y máximo de regiones que quedan delimitadas por un determinado número de rectas.

Muchas veces esta primera sesión acaba sin muchos resultados concretos. Algunos grupos justo acaban de empezar a recopilar sus datos en una tabla. Antes se ha tenido que corregir muchas situaciones, una vez los grupos han empezado a discutir y sus miembros se han convencido que habían cometido errores en las primeras exploraciones.

Esta primera sesión acaba con cada uno de los grupos distribuyéndose trabajo extra para completar en casa. Saben que la siguiente sesión será importante porque dispondrán sólo de una hora más para empezar a obtener conclusiones en grupo. El grupo es importante porque permite contrastar hipótesis, reconocer errores e intuir cómo

justificar algunas de las afirmaciones. También es la ocasión para que el profesor dé alguna orientación.

El profesor, sin embargo, adopta más la posición de un observador crítico que no la de quién se ha preparado y pensado previamente el problema. Nunca confirma la veracidad de una hipótesis, ni desmiente una afirmación falsa, pero sí que plantea preguntas que permiten continuar el trabajo de aquellos grupos que se están atascando. También ayuda a los alumnos a organizar sus ideas. Los alienta a buscar generalizaciones e intenta que expresen los patrones encontrados en el lenguaje propio de las matemáticas.

En estas discusiones cuida mucho de utilizar el lenguaje matemático estándar, aunque a los alumnos les cueste utilizarlo ellos mismos. Veremos más adelante, por ejemplo, que algunos alumnos verbalizan -y escriben- que han visto de su tabla que el «mínimo de regiones = número de rectas + 1» y lo muestran al profesor. La respuesta típica sería algo del estilo de «me contáis que si tenéis n rectas habéis visto que el número mínimo de regiones r es $r = n + 1$. ¿Cómo habéis llegado a esta conclusión?». Y el profesor escribe « $r = n + 1$ » en el cuaderno de uno de los alumnos.

Es en esta segunda sesión donde la mayoría de los grupos encuentran sus primeras conclusiones. Suele ser una sesión bastante productiva, donde la mayoría de los grupos completan de una forma u otra la investigación propuesta. Es importante destacar, sin embargo, que las investigaciones son actividades abiertas y así lo tienen claro los alumnos. No todos los grupos se acaban planteando exactamente los mismos problemas, o no se los plantean en los mismos términos. Tampoco los diferentes grupos acaban satisfechos con el mismo tipo de conclusiones. Por ejemplo, algunos se plantean exclusivamente encontrar el número mínimo y máximo de regiones. Otros quieren saber también todas las configuraciones con un determinado número de rectas. Este aspecto de apertura se va incrementado a medida que los alumnos se familiarizan con las actividades de investigación. Así observamos que el enunciado de ésta era muy explícito respecto los objetivos de la investigación, respecto cómo proceder e, incluso, sobre posibles extensiones de la investigación. Progresivamente este grado de concreción se suaviza para incrementar el grado de apertura de la actividad.

Una vez se concluye el trabajo en grupo en esta segunda sesión los alumnos tienen alrededor de una semana para elaborar un informe individual. Se supone que antes de empezar la redacción del informe los alumnos deberán completar su tarea investigadora. Esto incluye extender la investigación a otros problemas relacionados si lo creen oportuno.

El informe ha de ser un pequeño tratado técnico, escrito en un lenguaje formal, no un simple cuaderno de ejercicios. En él se debe explicar el punto de partida y los problemas que el alumno se ha propuesto. Las investigaciones realizadas se incluyen cuidando los aspectos comunicativos: el alumno debe preocuparse de incluir tablas y gráficos cuando sean necesarios, hacer esquemas o dibujos si ayudan a entender algún aspecto del trabajo, plantear fórmulas algébricas cuando añadan información, etcétera. La parte central del informe es, y así se les explica a los alumnos, las justificaciones de sus resultados. Se promueve la búsqueda de demostraciones aunque, especialmente en estas primeras investigaciones, muchos alumnos se contentan con justificaciones o argumentos de plausibilidad, generalmente a partir de tablas de valores [Brocardo, 2004]. Finalmente deben proponer otras investigaciones relacionadas.

Estos dos aspectos de la educación matemática relacionados con representación por un lado, comunicación por otro y explicación y prueba por un tercero son claves en una investigación. Son la razón por la que se exige a los alumnos un informe escrito.

La investigación ya esta completa y entregada. Sin embargo el trabajo de los alumnos todavía no ha terminado. El profesor corrige la investigación y escribe un pequeño documento -media página- que entrega al alumno. En esta nota sugiere mejoras de todo tipo. Se indican, por ejemplo, la necesidad de mejorar algunas explicaciones, pulir algunas tablas, extender algunas investigaciones y plantearse otros aspectos. Con esta información del profesor el alumno reelabora su informe. Tiene, de esta forma, la oportunidad de mejorar tanto el contenido matemático del informe -los resultados de su investigación, el número de problemas planteados- como los aspectos más relacionados con procesos -representación de datos, resultados y procesos seguidos y explicaciones, justificaciones y demostraciones-. Es el segundo informe el que se evalúa. El primero se entiende como un documento provisional de trabajo.

Se debe tener en cuenta que la nota trimestral que obtienen los alumnos se obtienen de tres apartados con el mismo peso: investigaciones, proyecto y actividades de clase. Y deben aprobar los tres apartados para aprobar el trimestre.

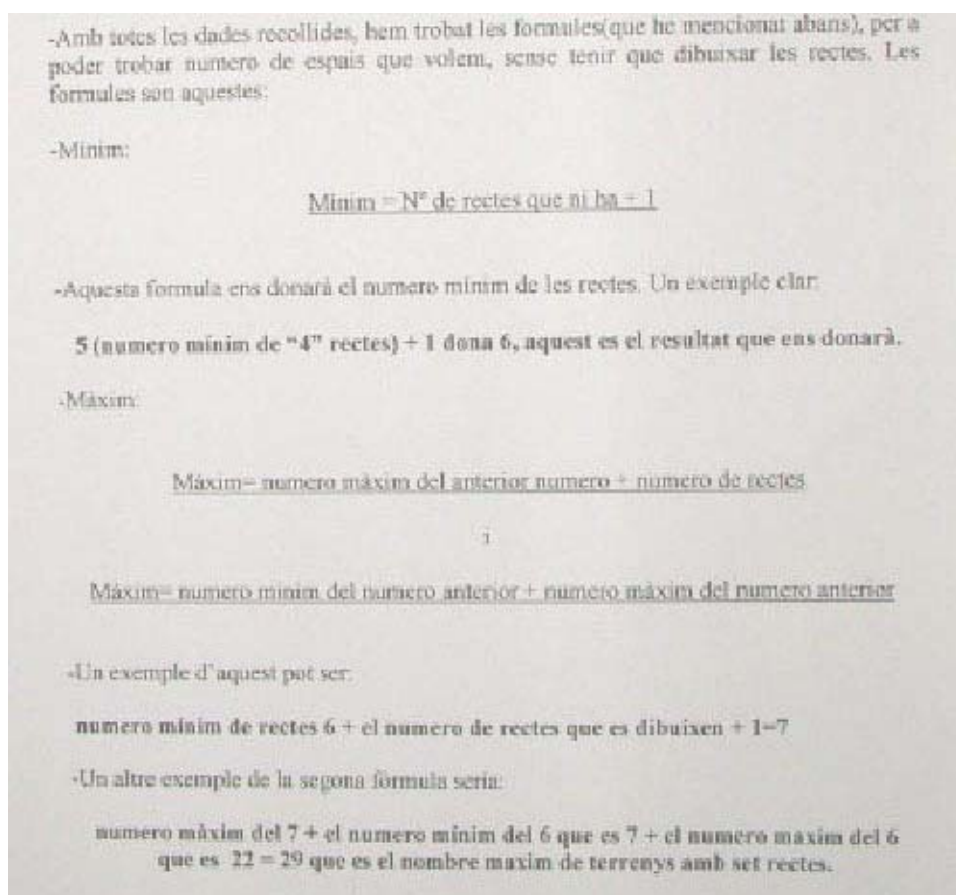
Producciones de los alumnos

Las producciones de los alumnos admiten análisis desde diferentes ópticas. Os mostramos en primer lugar un ejemplo de una investigación de Pablo. Pablo normalmente suspende Matemáticas, y es muy probable que tenga que repetir tercero. Sin embargo, es destacable que en una actividad de investigación en matemáticas, pese a mostrar una producción de inferior calidad a la de la mayoría de sus compañeros, es capaz de formular hipótesis, razonarlas –sin llegar a una demostración completa- y comunicarlas. También es destacable cómo logra organizar la información que ha acumulado.

Pablo empieza explicando el problema y mostrando algunas configuraciones de rectas. Continúa explicando que ha contado el número mínimo y máximo de regiones para diferente número de rectas y elabora la tabla siguiente.

Número de rectas	Mínim	Máxim
1	2	2
2	3	4
3	4	7
4	5	11
5	6	16
6	7	22
7	8	29
8	9	37
9	10	46
10	11	56

Sigue una tabla parecida con el número de configuraciones posibles con los varios números de rectas. Ambas tablas son correctas. A continuación intenta generalizar. Es ilustrativo leer sus anotaciones.

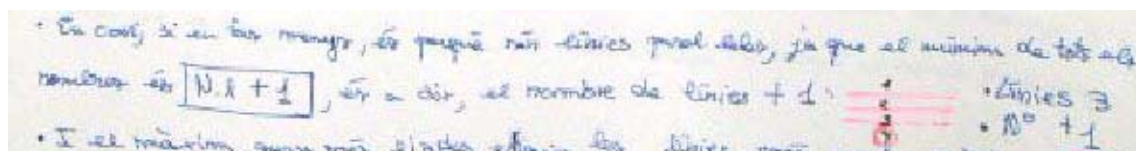


Fijémonos que da fórmulas literales, sin utilizar símbolos para las variables. Otro aspecto a destacar es la fórmula para el máximo: no sabe sumar la recurrencia. Finalmente, no sabe razonar el porqué sus fórmulas son correctas. Explica sólo que “han encontrado estas fórmulas, que les permiten saber el número de espacios sin tener que dibujar las rectas”. Y continúa poniendo algunos ejemplos de uso de las fórmulas. No queda claro si pretende explicar al lector cómo se deben utilizar o más bien quiere convencerlo que las fórmulas son correctas a partir de la comprobación de algunos casos.

Pero lo más destacable es que, pese a sus limitaciones, ha logrado entender un problema, generalizarlo y explicar el proceso seguido.

Podemos comparar la producción de Pablo con algunas de sus compañeros.

A principio de curso Núria se mostraba muy insegura en la clase de matemáticas. De todas maneras, en las investigaciones rápidamente empezó a realizar progresos. Este es un detalle de su informe.



Fijémonos cómo, no sólo da con la generalización correcta para el número mínimo de regiones, sino que razona –correctamente- porque debe ser así. Efectivamente, la forma de minimizar el número de regiones es dibujando todas las rectas paralelas, como ella explica. Notemos, sin embargo como en la fórmula ha dado un paso hacia la

simplificación, pero aún no escribe un solo símbolo para la variable “número de rectas”. Escribe «N.l» en su lugar.

El último ejemplo es el de Yasmina, una alumna con notas trimestrales de notable de media. Yasmina no sólo encuentra las fórmulas para generalizar, a partir de descubrir un patrón en la tabla de números máximos sino que da una razón geométrica de porqué aparece la recurrencia $R(n)=R(n-1)+n$, donde $R(n)$ es el número máximo de regiones en una configuración de n rectas. Nótese que explica la relación en lenguaje natural, y a través de un ejemplo. Sin embargo, no satisfecha con la recurrencia, encuentra la forma de sumarla y lo explica –no se le había enseñado previamente nada de sucesiones aritméticas–.

– Per saber el nombre de particions regions:

nº de rectes + máx. particions anterior = nº máx. particions.

Ejemplo: $5 + 11 = 16$ → nº máx. de particions amb 5 rectes.

↑ ↑
nº de rectes nº máx. de particions amb 4 rectes

Explicació geomètrica:

Si tens un nombre x de particions d'anterior, que creixes amb n , quan el nombre de rectes és que cada recta divideix particions que ja tenim, és a dir, obtenim també particions més, com el nombre de particions que hi havien.

– Aquesta fórmula, té l'inconvenient que necessites trobar el nombre màxim de particions de l'anterior, i això si no has de ser amb nombres grans com una 100 rectes, no és pràctic.

Així que m'he trobat una de millor:

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1$$

Per exemple: $5 + 1 = 6$ $6 \cdot 5 = 30$ $30/2 = 15$ $15 + 1 = 16$

Al nombre de rectas sin sumas n , no multiplicamos por nombre de rectas, el resultado es dividimos entre 2 y el número n .

Ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & 5 & + & 6 & + & 7 & + & 8 & + & 9 & + & 10 \\
 10 & + & 9 & + & 8 & + & 7 & + & 6 & + & 5 & + & 4 & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 11 & & 11 & & 11 & & 11 & & 11 & & 11 & & 11 & & 11 & & 11 & & 11
 \end{array}$$

110

$110 / 2 = 55$ número máximo de particiones con $n=10$.

Si queremos de 2 a 10, el número n no multiplicamos por 10 (nombre de rectas), obtenemos 110 y se divide entre 2 obteniendo el número máximo de particiones.

La fórmula es así, ya que con el caso a ejemplo de 10 rectas, si calculas los nombres a la inversa, todos suman el mismo, y al nombre de rectas (que es el último) siempre se le suma número n . De 2 a 10, sumo 10, por eso después de ya se suma del nombre de rectas $+1$, no se multiplica por nombre de rectas. Después es dividir entre 2, ya que sumo tres veces los números de 2 a 10 duplicados. Y se generaliza de número n .

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1$$

Yasmina continúa estudiando el número de configuraciones posibles con n rectas. Y, finalmente –Núria también lo había hecho- estudia las configuraciones que se obtienen con n circunferencias y el número de regiones que delimitan éstas.

Conclusiones

Realmente es difícil que los alumnos entiendan y les gusten las matemáticas si no se les da la oportunidad de hacer –crear- matemáticas. Con las investigaciones se les brinda esta oportunidad: exploran problemas matemáticos, formulan hipótesis y las discuten. Encuentran patrones y los generalizan. Trabajan aspectos importantes del currículo como los relacionados con la representación y la comunicación que generalmente quedan arrinconados [NCTM 2003]. Razonan, argumentan y demuestran. Y, además,

son actividades integradoras: todos los alumnos pueden investigar, aún aquellos que generalmente menos éxito obtienen en la clase de matemáticas.

Referencias

[Bishop, 1999] Alan BISHOP, «Enculturación matemática», Paidós, 1999.

[Brocardo, 2004] Joana BROCARD, «Analizar hipótesis, argumentar y demostrar: un ejemplo en el contexto de un proyecto curricular centrado en la exploración de investigaciones matemáticas», en «La actividad matemática en el aula», J. Giménez, L. Santos, J.P. da Ponte (eds.), Graó, 2004.

[NCTM, 2003] National Council of Teachers of Mathematics, «Principios y Estándares para la Educación Matemática», traducido y editado por SAEM Thales, 2003.

DESARROLLO PROFESIONAL DEL PROFESOR: INVESTIGACIÓN - ACCIÓN EN UN GRUPO DE TRABAJO

Juana M^a Navas Pleguezuelos
jmnavas@ugr.es

Pablo Flores Martínez
pflores@ugr.es

Resumen

Los profesores de matemáticas se enfrentan a retos que van cambiando a lo largo de su vida profesional, para lo que necesitan desarrollarse profesionalmente. Ver la realidad como problemática que se presta a investigación le permite al profesor captar la importancia y riqueza de su tarea. Es posible y deseable que los profesores en la práctica desarrollen procesos de investigación a partir de su actividad cotidiana, eligiendo problemas educativos que abordar para su resolución. En este sentido, la investigación-acción se convierte en una metodología flexible y potente que le puede ser muy útil. A través de la investigación-acción o reflexión deliberativa, los profesores elaboran sus propias soluciones en relación con los problemas prácticos a los que se enfrentan. Esta comunicación describe el proceso de desarrollo profesional de un grupo de profesores, enmarcados en un grupo de trabajo, mediante un proceso de investigación acción sobre un problema profesional.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza es una actividad cambiante, tanto por los sujetos que se ven implicados (alumnos “cada vez más jóvenes” en relación a la edad del profesor, profesor que va evolucionando en sus roles sociales, sociedad que cambia su estructura y medios, etc.). Para adaptarse a estos cambios el profesor tiene que disponer de estrategias que le permitan comprender la naturaleza cambiante del entorno, pero que además faciliten la relación con él. A la adaptación responsable del profesor a la manera cambiante de ver la profesión se le ha llamado desarrollo profesional, y en él se incluye tanto la toma de conciencia de los cambios en los que se ve inmerso como las actividades que realiza para encajarlos de manera que lo deje satisfecho. Para ayudar al profesor a desarrollarse profesionalmente se han promovido diversas estrategias, una de las cuales es la investigación-acción (Elliot 1986, 1990). Inspirado en ellas hemos planteado la actuación de un grupo de trabajo respondiendo a los principios de esa estrategia, siguiendo las directrices de otros trabajos similares (Rodríguez, 1996).

El trabajo que presentamos se enmarca dentro de la investigación sobre la Formación del Profesorado, en particular del profesorado de matemáticas. El foco de esta investigación es el análisis del desarrollo profesional desde el papel del profesor en el proceso de Investigación Acción (Elliot 1986, 1990), entendida como la reflexión en

común de las prácticas de aula, y considerada como el nexo entre la autoevaluación y el desarrollo profesional. En este trabajo describimos el proceso de investigación-acción llevado a cabo por un grupo de profesores de Matemáticas que durante varios años han compartido un grupo de trabajo en el Centro del Profesorado de Baza, Granada. Vamos a describir este proceso comenzando por presentar a los profesores, y luego nos valdremos de las etapas previstas en la Investigación-Acción para analizar el proceso llevado a cabo.

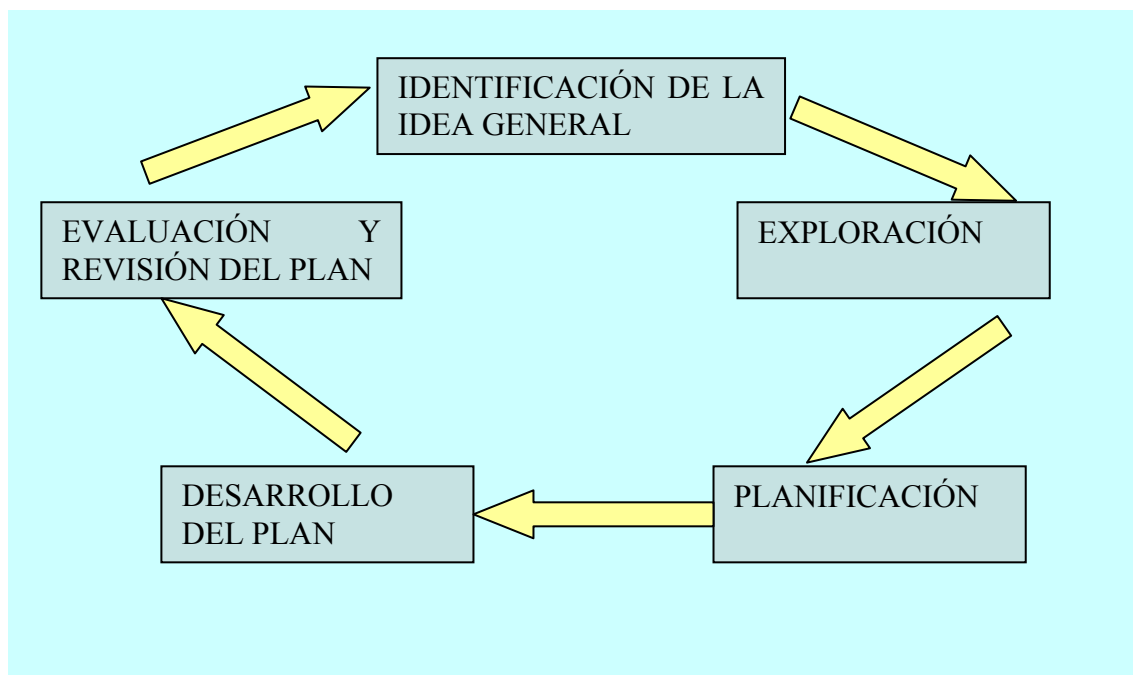
Los componentes del grupo de trabajo tienen una experiencia de trabajo colaborativo en diversos temas, y durante algunos años. Aunque algunos componentes han ido cambiando, un núcleo de cuatro o cinco personas se ha mantenido a lo largo de los años. El grupo sirve para reflexionar sobre la propia práctica docente, y para intentar, desde la experiencia solventar los problemas que han parecido más acuciantes en cada momento. Discusiones sobre calculadora sí o no, cuándo, cómo...; estudio de los criterios de evaluación, tanto para el tercer ciclo de primaria como en la secundaria obligatoria, análisis de los cambios que las distintas leyes educativas, decretos y órdenes han ido introduciendo en la programación de aula, ... En resumen, una larga trayectoria de trabajo en equipo donde el intercambio de experiencias, la exposición de distintos puntos de vista, la búsqueda de consenso para igualar criterios en los distintos aspectos considerados, etc., se ha convertido en una dinámica que se considera adecuada para el desarrollo profesional como docentes de los componentes del grupo. En este sentido, se intentan introducir algunos cambios para convertir esa dinámica en un proceso de investigación-acción.

En esta ocasión, el papel de la investigadora ha sido doble: por una parte, como participante tiene que analizar los problemas prácticos y, por otra, facilitar la investigación en la acción de los componentes del grupo de trabajo. En el primer aspecto, hay que conseguir superar los temores y ansiedades que sienten los profesores cuando emprenden un estudio de sus propias prácticas, además de la pérdida inicial de la confianza en la profesionalidad de uno mismo, y en otro aspecto, es necesario potenciar la discusión de los datos aportados para que sirva al desarrollo de una comprensión compartida de los problemas explícitos del proyecto, que permita compartir información sobre lo que se hace en clase, las preocupaciones, experiencias, creencias... Todas estas dificultades se han ido solventando gracias a la trayectoria del grupo.

INVESTIGACIÓN- ACCIÓN EN EL GRUPO DE TRABAJO

A partir de un momento la autora, asesora del CEP e integrante del grupo de trabajo propone a los demás compañeros llevar a cabo un proceso de investigación-acción. La Investigación-Acción, según la definición que de ella hace Elliot (1986) es: "El estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de acción dentro de la misma."

Se podría representar un proceso de investigación-acción (de manera simplificada) por el siguiente cuadro:



El proceso de investigación-acción seguido en esta investigación, se podría resumir en los siguientes pasos:

- Identificar y clarificar la idea general:

Cuando los componentes del grupo se proponen llevar a cabo un proceso de investigación – acción, se plantean como tema más acuciante las inquietudes que les surgen al analizar la nueva situación que se está dando en 50 centros andaluces, a los que se les ha concedido la realización de proyectos educativos de incorporación de las Tecnologías de la Información y Comunicación a la práctica docente, tras la aprobación del Decreto de Medidas de Impulso de la Sociedad del Conocimiento en Andalucía, la convocatoria de selección de proyectos educativos de incorporación de las TIC a la práctica docente, y la política que emana del mismo decreto de generalizar dichos proyectos a un medio-largo plazo. Se plantea un gran reto:

“Cuando haya que desarrollar un proyecto TIC en nuestros centros, con un ordenador para cada dos alumnos, ¿qué vamos a hacer? Es necesario estar preparados para poder afrontar a corto plazo esta nueva situación con garantías de éxito y sin traumas. ¿Cómo habrá que prepararse para integrar las TIC en la tarea docente?”

Es una situación que afecta al campo de acción del profesor en su aula, ya que los espacios cambian y los medios a los que tenemos acceso amplían el horizonte de la clase.

- Exploración:

Cuando se profundiza alrededor de la cuestión principal, surgen bastantes preguntas: qué se va a hacer en clase, cómo cambiar el papel del profesor en el aula, cuál va a ser el rol del alumno, si el ordenador va a sustituir al profesor...

Estas inquietudes se plasman fundamentalmente en una premisa básica:

¿En qué debe consistir la preparación del profesor para este reto?

- Planificación o construcción del plan general de acción

En primer lugar, según Elliot (1990), se debe hacer un balance de los factores que han de cambiar o modificar y las acciones que se han de emprender para dar respuesta a todas las cuestiones que surgen de la definición del problema que se intenta resolver, en nuestro caso se concreta en:

- . Estudiar los cambios que suponen la introducción de los ordenadores en la práctica de aula: metodología de enseñanza aprendizaje: el papel del profesor y del alumno, atención a la diversidad,...
- . Elaborar un protocolo de buen uso de los recursos informáticos: Cuándo, cómo, organización de tiempos y espacios...
- . Dirimir si el papel de profesor ha de ser el de diseñador de material o de elector y validador del material a utilizar en clase.
- . Determinar qué conocimientos técnicos requiere el afrontar este reto, que dependerán de la respuesta a la cuestión anterior.
- . Analizar los recursos y materiales disponibles para su uso con los ordenadores en el aula: búsqueda, características deseables de los mismos, adecuación a los intereses como docentes...
- . Elaborar materiales, si se considera necesario.

Estas cuestiones son aportadas fundamentalmente por la investigadora, como facilitadora del proceso de investigación-acción, aunque la propuesta inicial se amplía con las aportaciones surgidas en el análisis de la misma en las sesiones de trabajo realizadas. Todos estos factores se convierten en inspiradores del plan de acción a seguir para resolver nuestro problema profesional. Este plan, que surge del grupo de trabajo, consiste, fundamentalmente, en estudiar en profundidad cada una de estas cuestiones. Podría destacarse que, desde un principio, se advierte que el coordinador del grupo ejerce un gran liderazgo sobre los restantes miembros del grupo de trabajo, lo que va a determinar en gran medida la dinámica de trabajo.

- Desarrollo del plan

En las sucesivas reuniones del grupo se han ido analizando algunos de los aspectos que se habían planificado. Desde un primer momento ha habido una dinámica de exposición de las distintas posiciones, y de consensuar el siguiente paso a seguir.

De estas discusiones se han obtenido las siguientes observaciones de los integrantes del grupo:

Los cambios que genera la introducción de los ordenadores en la práctica de aula comienzan por el cambio de la metodología de enseñanza aprendizaje que supone disponer de una herramienta tan potente y motivadora, que afecta al proyecto curricular de centro, las finalidades educativas y la programación de aula. Conlleva asimismo un cambio en el papel del profesor, ya que deja de ser el único transmisor del conocimiento, y que, sin abandonar las prácticas actuales, ha de plantearse otro tipo de organización, la forma de transmisión del conocimiento, la facilitación de la adquisición del mismo por parte del alumno, la motivación que genera en todos los alumnos el uso del ordenador, teniendo en cuenta que se debe cambiar la concepción que algunos tienen de máquina de jugar, por la de instrumento de aprendizaje, de un aprendizaje autónomo que todavía no ha incorporado, en la mayoría de los casos, a su cultura escolar.

Además es necesario contemplar las posibilidades que ofrece para la atención a la diversidad, entendida en el sentido amplio del término, permitiendo la atención individualizada, cuestión siempre controvertida en un aula convencional.

La elaboración de un protocolo de buen uso de los recursos informáticos, se ha pospuesto para más adelante, ya que se considera necesario tener un conocimiento más amplio sobre los materiales y recursos.

Respecto a la discusión sobre si el papel de profesor ha de ser el de diseñador de material o de elector y validador del material a utilizar en clase, se han expuesto diversas opiniones, aunque al final ha predominado la idea de elaborar los recursos que se van a utilizar, de manera progresiva, a la vez que se va investigando sobre los que ya hay realizados, para estudiar su idoneidad.

Una vez que se llega al acuerdo de realizar el material, se han estudiado los conocimientos técnicos que se requieren para la elaboración del mismo. Otro aspecto que ha preocupado a los integrantes es cuidar que sea adecuado a los decretos en vigor y a las recomendaciones que desde las distintas organizaciones educativas se contemplan en la educación matemática, en particular, en el tema elegido. La producción final ha sido una presentación sobre el tema de Funciones de 4º de ESO, opción B, con unas características consensuadas, y realizada por todo el grupo, que se compone de dos partes diferenciadas: una guía didáctica de utilización para el profesor, y las actividades para el alumno.

- Evaluación y revisión del plan

Esta investigadora, al realizar la evaluación del plan de acción llevado a cabo llega a las siguientes conclusiones, que traslada al grupo de trabajo y resultan consensuadas.

En el desarrollo del plan de trabajo del grupo ha prevalecido la idea de elaborar algunos materiales como una de las actuaciones clave para enfrentarse al reto inicial. Ello ha permitido intercambiar y discutir sobre las distintas formas de entender un recurso informático: libro electrónico, unidades didácticas completas, módulos o aplicaciones que formen parte de la programación de aula, usados en el momento adecuado... También ha facilitado la puesta en común de lo que se entiende por entorno agradable y atractivo para el alumno, el carácter de interactividad, etc.

Hay que destacar que al hacer balance del proceso seguido se ha detectado que algunas de las acciones planificadas han quedado un poco relegadas.

En cuanto a si se ha resuelto el problema profesional que se había planteado, pues lo cierto es que aunque se empieza a considerar este reto como más asequible, tanto por el trabajo desarrollado en el grupo, como por las experiencias que se están realizando en los distintos centros que desarrollan el proyecto de incorporación de las tecnologías de la información en el aula, los integrantes consideran que se trata de una cuestión abierta, más compleja de lo esperado, lo que nos lleva a decir que esta cuestión no está resuelta del todo.

- Identificación y clarificación de una nueva idea general, o de una generada por este plan anterior

En cuanto a este paso, y tras la reflexión realizada por la investigadora, y que será propuesta al grupo en próximas reuniones, se podría concluir de la evaluación del plan llevado a cabo en este ciclo de investigación-acción, que es necesario profundizar más en este camino, para esto se propondrán algunas estrategias específicas, como dividir el problema en cuestiones más concretas, que lleven a procesos de investigación-acción menos complejos, y en los cuales se vayan resolviendo los distintos interrogantes que al final permita dar una respuesta satisfactoria al problema inicial.

Por tanto, la siguiente idea general sería identificar estos problemas parciales, con los cuales se realizarían ciclos de investigación-acción.

CONCLUSIONES

El desarrollo profesional de los profesores exige la adquisición de destrezas que permitan al profesor resolver los problemas con los que se va enfrentando, pero sólo

será verdadero desarrollo cuando el profesor sienta, dé sentido a estas destrezas y las interprete desde su visión de la profesión. Para ello necesita tomar conciencia de sus problemas, relacionarse de manera significativa con el conocimiento profesional y generar respuestas adecuadas y conscientes a sus problemas. En esta experiencia hemos confirmado como el ciclo de Investigación-Acción realizado en el grupo de trabajo ha servido para presentar una dinámica de trabajo generalizable a cualquier problema profesional del profesorado. Este tipo de investigación así estructurada permite a los miembros del grupo realizar un trabajo mucho más sistemático, en el que se estudian todos los factores que influyen en el problema, se buscan todas las respuestas, se planifican las actuaciones a seguir, y siempre desde la óptica de los integrantes. También exige una evaluación y seguimiento del proyecto de trabajo, que facilita la retroalimentación, y el planteamiento de vías de trabajo nuevas.

En resumen, un modelo que permite que los profesores mejoren la calidad de su enseñanza mediante la cooperación en un aspecto de interés común, y desarrollen una cultura profesional común de reflexiones profesionales referentes a los procesos de enseñanza y de aprendizaje.

BIBLIOGRAFÍA:

- Decreto 72/2003, de 18 de marzo, de medidas de Impulso de la Sociedad del Conocimiento en Andalucía, BOJA nº 55, del 21 de marzo de 2003, págs. 6024-6034.
- Orden de 27 de marzo de 2003, por la que se regula la convocatoria de selección de Proyectos Educativos de Centro para la incorporación de las tecnologías de la información y comunicación a la práctica docente, BOJA nº 65 del 4 de abril de 2003, págs. 7035-7040.
- Rodríguez, R. *Formación del profesorado: Un caso de investigación-acción en el aula*. Algaida Editores. 1996 Sevilla.
- Elliot, J y otros. *Investigación / acción en el aula*. Generalitat Valenciana. Conselleria de Cultura, Educació i Ciencia. 1986 Valencia.
- Elliot, J. *La investigación-acción en educación*. Ed. Morata, 1990. Madrid.

¿HAY UN PITAGORICO DETRÁS DE LAS TAULAS DE MENORCA?

(MONUMENTOS DE LA CULTURA TALAYÓTICA SIGLOS V-IV aC)

Vicente Ibáñez Orts
capblanch@ctv.es



Vista frontal y lateral de la gran taula de Trepucó (Mahón). Las dimensiones de su piedra capitel siguen una sucesión geométrica.

La cultura talayótica se desarrolla en las islas de Mallorca y Menorca a lo largo de un extenso periodo histórico que abarca desde el 1.800 aC hasta el 200 dC. El nombre de esta cultura procede de "talayot", atalaya o torreón circular que presidía el poblado y servía de vivienda a la familia más poderosa.

La cultura talayótica adolece de un cierto primitivismo, debido a que desconoce el aceite de oliva, la elaboración de vino y el torno de alfarero, por lo que sus vasijas están hechas a mano, de manera tosca y mal cocidas. A este panorama hay que añadir que no usan moneda en sus intercambios comerciales y desconocen la escritura.

Dentro de esta cultura tan peculiar, la taula es un monumento único y específico de la isla de Menorca, y encarna la manifestación arquitectónica más singular de la isla, ya que no hay nada similar en Mallorca. La taula se compone de dos grandes bloques de piedra perfectamente tallados. La inferior, denominada piedra soporte o vertical, es un paralelepípedo estrecho y gigante que llega a medir más de cuatro metros de altura, dos o tres de anchura y apenas cuarenta o sesenta centímetros de espesor. Suele estar hincada en la roca madre del terreno o descansa directamente sobre el suelo. La piedra superior, colocada transversalmente sobre la anterior por su propio peso, recibe el nombre de piedra capitel u horizontal y también llega a medir cerca de los cuatro metros en las taulas mayores. Tiene la forma de un tronco de pirámide invertida ya que está

biselada. Ambas piedras conforman una especie de letra "T" colosal y de alguna manera recuerdan una mesa de pie central, de donde procede su nombre, ya que en catalán "taula" equivale a mesa. Ambos bloques están tallados en la roca caliza propia de la isla, que aparece formando estratos horizontales de fácil labra, y que se denomina "marés".



Vista frontal y lateral de la taula de Torre Trencada. Sigue una progresión aritmética. La anchura de su piedra capitel es tan grande que sus constructores la dotaron de una columna posterior de apoyo para asegurar su equilibrio.

En Menorca existen actualmente treinta y una taulas y de ellas once están completas. Se encuentran distribuidas de manera aleatoria en la parte sur de la isla, siempre en el interior de un poblado y en posición próxima al talayot mayor. En tiempos prehistóricos la parte norte de Menorca era pantanosa e insalubre, y por ello poco habitada.

La taula es el monumento principal del denominado recinto de taula con forma absidial o de herradura, especie de basílica en la que se realizaban determinados ritos de carácter religioso, que nos han llegado envueltos en un halo de misterio. El recinto de taula nunca sirvió como lugar de enterramiento. Estaba cerrado por un doble muro de piedras bien colocadas, relleno de ripios y tan alto como la propia taula. En el interior del recinto, gruesas columnas delimitaban capillas.

Desde un punto de vista arquitectónico la taula, junto con su recinto, conforma una unidad de diseño, de modo que hay una relación entre la taula y su recinto, ya que a mayor taula corresponde un recinto más grande, llegando a medir en algunos casos más de cien metros cuadrados.

El hecho de que la piedra soporte de la taula esté sin pulir en su parte posterior indica que el recinto se dividía claramente en tres espacios: la entrada con su pequeño corredor, generalmente adintelado, que obligaba al visitante a agacharse forzosamente para encontrarse seguidamente ante el monumento, aumentando de este modo el efecto que la taula debía de provocar en él. El recinto en sí, frente a la taula, dedicado al culto y a los sacrificios rituales junto a la hoguera, que ocupaba el pueblo. En este lugar tenían lugar los banquetes rituales. Finalmente quedaba el espacio posterior a la taula, no permitido a los feligreses y dedicado íntegramente a los sacerdotes y a los menesteres del culto. Dado por tanto que la taula sólo se veía de frente, la parte posterior, por ahorrar un trabajo de cantería inútil, quedaba sin pulir.

El arqueólogo Fernández-Miranda, siguiendo las ideas de la arqueóloga británica Margaret A. Murray, propone que su fecha de construcción está alrededor del siglo IV

aC, en época tardía y ya de decadencia de esta cultura, y que permanecen en uso hasta el siglo II dC, plenamente romanizada la isla. Este investigador apunta la posibilidad de que la propia taula pudo haber sido objeto de culto en sí mismo y es partidario de que el recinto de taula no estaba cubierto, excepción hecha quizás de la capillas que circundan las paredes, que podían tener una cubierta a base de falsa bóveda de lajas de piedra. No todos los investigadores son de la misma opinión. Algunos son partidarios de que las taulas se construyeron al comienzo de la cultura talayótica, hacia el año 1500 aC, y de que los recintos de taula estaban cubiertos. Estas cuestiones por el momento están abiertas y sin resolver.

Las taulas que existen completas se pueden dividir en tres grupos: taulas cuya piedra capitel tiene una anchura tan desmesurada que sus constructores se vieron forzados a dotar a su piedra soporte de una columna posterior de apoyo, al que corresponden Torre Llafuda, segunda taula o capitel en forma de taula P4 de Torre Llafuda y Torre Trencada. Taulas cuyas piedras capitel tiene una anchura mínima y cuyas piedras soporte presentan espina posterior, a este grupo corresponden Torralba d'en Salort y Torreta de Tramuntana, y el grupo formado por las taulas cuya piedra capitel presenta una anchura intermedia y que incluye las taulas de Torre d'en Gaumés, Na Comerma de sa Garita, Binisafullet y Trepucó. Dejamos fuera de estas tres categorías las taulas de Torre Llisà Vell y Talatí de Dalt.

En diversos trabajos hemos propuesto que las dimensiones mayores de las piedras capitel del primer grupo siguen entre sí una sucesión aritmética, las del segundo armónica y las del tercero geométrica. Para la taula de Torre Llisà, única en que la piedra soporte y la piedra capitel tiene el mismo tamaño, hemos propuesto un modelo de acuerdo con el número phi, y para Talatí no hemos podido descifrar su diseño. Todo ello nos inclina a pensar que sus dimensiones pueden estar relacionadas con el mundo pitagórico. De ser ciertas estas proporciones que apuntamos se trataría de un caso claro de relación entre matemáticas y arquitectura, ya que su constructor empleó conocimientos geométricos para fijar sus medidas.

Taula de Torre d'en Gaumés

El poblado talayótico de Torre d'en Gaumés se desparrama por una suave colina. Es el mayor de la isla, con una extensión aproximada de 60.000 metros cuadrados. La cima de esta elevación se encuentra presidida por tres talayots en ruinas, cuyas siluetas se divisan desde los alrededores. El recinto de taula se encuentra adosado al mayor de ellos.

La piedra soporte está enhiesta, pero quebrada, y parte ha desaparecido. Está muy deteriorada. La piedra capitel se encuentra caída, vuelta del revés y situada sobre un paramento de piedras junto a la entrada del recinto, tal como la dejó el notario Flaquer i Fàbregues tras la excavación que realizó a principio de los años cuarenta. El recinto de taula se terminó de excavar por R. Bordoy y P. Massanet en los años setenta.

Seguidamente se dan las dimensiones de la piedra capitel en metros, según diversos investigadores. Al estar caída es muy fácil de medir. Aparecen dos medidas para la longitud y la anchura, ya que la piedra capitel está biselada y, como ya hemos mencionado, tiene forma de artesa o tronco de pirámide invertido.

	Longitud	Anchura	Grueso
Martorell	2.45 / 2.32	1.25 / 1.18	0.65
Flaquer	2.50	1.25	0.60
Mascaró	2.50 / 2.32	1.25 / 1.18	0.65
Ibáñez	2.56 / 2.33	1.30 / 1.17	0.67

Si nos fijamos en las dimensiones mayores se puede constatar a simple vista que, salvando errores de medida, la anchura es el doble que el grueso y la longitud el doble de la anchura. Ahí están las medidas del notario Flaquer, 0.60; 1.25 y 2.50 o del conspicuo investigador de las taulas Mascaró Pasarius 0.65; 1.25; 2.50. Sus dimensiones están en progresión geométrica. No deja de sorprender que un hecho tan evidente no haya sido observado por ninguno de sus investigadores ni de sus numerosísimos visitantes.

En la cultura talayótica no cabe hablar de progresión geométrica. Alguien tuvo que llegar a la isla con suficiente formación matemática como para construir las taulas: ¿quién fue?, ¿Cuándo llegó?, ¿Fue un seguidor de la escuela pitagórica? A favor de esta hipótesis está el hecho de que los miembros de la secta que fundó Pitágoras en el siglo VI aC eran los únicos capaces de dominar las leyes matemáticas y, por tanto, los únicos que en esas fechas podían introducirlas en sus construcciones. También hay que considerar la proximidad de Sicilia y de las ciudades de la Magna Grecia a Menorca.



Taula de Torre d'en Gaumés. La piedra capitel está caída y vuelta del revés. Sus dimensiones siguen una proporción geométrica.

Taula de Torralba d'en Salort

Taula excavada durante los años 1973-81 por Fernández-Miranda y W. Waldren. Tanto la taula como su recinto están muy bien conservados e impresionan por su grandiosidad. Las medidas que hemos obtenido para esta taula, junto con las propuestas por otros investigadores, se dan seguidamente. Es especialmente interesante el levantamiento de las taulas que mediante restitución fotogramétrica ha llevando a cabo el Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica (Dibujo Técnico) de la ETS de Arquitectura de Valencia, bajo la dirección del profesor P. Navarro.

	Binimelis	Mascaró	F-Miranda	Tolós	Ibáñez	ETSAV
Longitud	3.80 - 3.56	3.80 - 3.70	3.75 - 3.32	3.83 - 3.60	3.86 - 3.66	3.83 - 3.69
Anchura	1.10 - 0.90	1.20 - 1.05	1.60 - 1.46	1.20 - 1.05	1.24 - 1.10	1.18 - 1.05
Grueso	0.72	0.70	0.71	0.72	0.73	0.73

Llama la atención la falta de precisión en las medidas dadas por el arqueólogo Fernández-Miranda, sobre todo en el 1.60 de anchura, que de haber consultado las publicaciones de Binimelis o Mascaró, con quien colaboró en diversas ocasiones, podría haber corregido. Por ello no las tendremos en cuenta.

Seguidamente se calcula la media armónica (H) a partir de la longitud y el grosor de la piedra capitel, y su resultado se compara con la anchura (a). Dadas dos longitudes A y B, la media armónica se obtiene mediante la fórmula: $H = 2AB/(A+B)$. La media armónica era una medida empleada por los geómetras y arquitectos griegos. Para el siglo IV aC su cálculo era difícil y suponía avanzados conocimientos matemáticos. Hay que pensar que su cálculo se debía realizar mediante una determinada construcción geométrica muy precisa y compleja.

	Binimelis	Mascaró	Tolós	Ibáñez	ETSAV
Longitud	3.80	3.80	3.83	3.86	3.83
Grueso	0.72	0.70	0.72	0.73	0.73
Anchura (a)	1.10	1.20	1.20	1.24	1.18
Media arm (H)	1.211	1.177	1.212	1.228	1.226
Dif. H - a	-11.1 cm	2.3 cm	-1.2 cm	1.2 cm	-4.6 cm

Prácticamente coinciden los valores calculados para la media armónica y los medidos en el campo, dado el lógico desgaste de la piedra debido al paso del tiempo. Las diferencias han sido las siguientes: 11.1; 2.3; 1.2; 1.2 y 4.6 cm. Estos resultados parece que confirman la idea de que el diseño de la piedra capitel se hizo de acuerdo con esta proporción.



Vista frontal, lateral y posterior de la taula de Torralba d'en Salort (Alayor). Las dimensiones de su piedra capitel siguen una proporción armónica.

BIBLIOGRAFÍA

Ibáñez Orts, V. (2000) "Reflexiones sobre el diseño de las taulas de Menorca y su relación con el mundo pitagórico", Suma nº35, ICE-Zaragoza, 75-86.

Ibáñez Orts, V. (2002) Un exemple d'architecture pythagoricienne? Les Taulas de Minorque. Tangente. L'aventure mathématique. Numéro hors-série 14 Mathématiques&Architecture. París, 74-79.

GRABADOS RUPESTRES GEOMÉTRICOS EN MENORCA.

Vicente Ibáñez Orts
capblanch@ctv.es

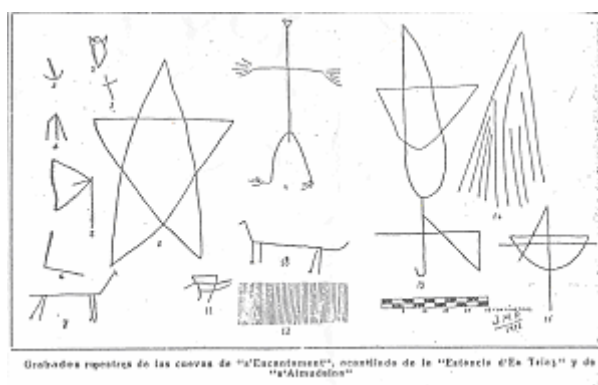
El paisaje menorquín está surcado de cuevas. Allí donde la roca caliza cuaternaria denominada “marés” ha formado un talud, el hombre talayótico ha excavado cuevas con hachuelas con una finalidad de habitación o de enterramiento. Estos lugares han sido reutilizados para distintos fines con el paso de los siglos. Algunas de estas cuevas, muy pocas, presentan grabados rupestres incisos en sus paredes. Entre ellos destacan los de carácter geométrico, siendo algunos muy elaborados y complejos. En este artículo vamos a comentar cuatro descubiertos por Mascaró Pasarius en el año 1952, que tras su publicación en revistas locales han caído en el más completo olvido. En general estos grabados nunca han tenido una atención que pudiéramos llamar matemática, y eso pese a que están formados por rectas, curvas y círculos, lo que se presta fácilmente a dar una interpretación geométrica de los mismos.

Sobre todos estos grabados subyace el grave problema de su cronología, si bien la fina pátina calcárea que en algunos casos recubre la incisión parece justificar su antigüedad.

El primer grabado que publicó Mascaró es en realidad un conjunto de ellos. Aparecieron en la “Cova de s’Encantament” (Alayor). Se hallan en una cueva cuyo techo se desplomo parcialmente. Los grabados se encuentran en la parte delantera de una columna de sustentación adosada a la pared, y en su día estarían al fondo del recinto (Foto 1). En este conjunto de grabados, que los especialistas tienden a considerar como un ideograma, destaca la figura de una estrella de cinco puntas, cuyas dimensiones mayores miden 25 cm, y también la de un hombre desnudo y esquemático con cabeza triangular, brazos en cruz, dedos de las manos muy marcados y rodillas dobladas, lo que parece indicar una actitud orante o de respeto hacia la estrella. Los dos brazos miden de muñeca a muñeca 17 cm. Se han dado varias interpretaciones a este ideograma, que básicamente se reducen a un hombre en acción de gracias o adorando una estrella, pero en ningún caso se ha relacionado este astro con el pentágono estrellado, símbolo de la escuela pitagórica, lo que asociaría este grabado con los griegos de esta secta religiosa.



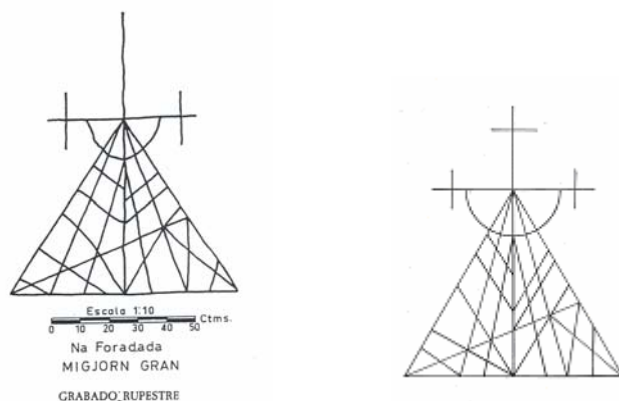
Foto 1.- El arquitecto menorquín Víctor Tolós Michavila observa el ideograma de la Cova de s'Encantaments. Los grabados están cubiertos de líquenes. Se distingue claramente la estrella de cinco puntas y el hombre arrodillado ante ella junto con otros dibujos de difícil interpretación.



Ideograma de la Cova de s'Encantaments según Mascaró (1952).

El siguiente grabado apareció según Mascaró (1983) en una de las numerosas cuevas de enterramiento del barranco de Na Foradada, en el término municipal de Es Migjorn Gran. En su *Geografía e Historia de Menorca Vol IV* (1983) lo reseñó del siguiente modo: “ uno de ellos triangular, surcado de líneas que le da un cierto parecido con una choza, coronada por lo que parece una cruz con dos incisiones verticales a cada lado de casi el extremo de sus brazos y una media circunferencia debajo del cruce de la cruz” (Dibujo 1).

El grabado es realmente enigmático y lo cierto es que excepto el mismo Mascaró y su colega Dèribèrè, nadie más había vuelto a verlo hasta el punto de que en algunos medios se dudaba de su existencia. Yo mismo he intentado localizarlo en numerosas ocasiones a lo largo de estos años, pero estos grabados incisos son de líneas muy tenues por lo que para resaltarlos conviene iluminar lateralmente las paredes de las cuevas con una linterna y aun así es fácil pasarlos por alto.



Dibujo 1.- Triángulo de la cueva de Na Foradada según Mascaró. Para él representa una choza de ramas rematada por una cruz. Junto a él su reconstrucción. (Dibujo 2).

Finalmente, impulsado por mi interés y bajo la acertada dirección del arqueólogo Joan C. de Nicolás, que indicó sagazmente la cueva y el lugar en el que probablemente estaría, el joven menorquín Ricardo López Segura ha vuelto a descubrirlo.

El grabado se encuentra situado en la pared frontal de la gran columna central que sustenta la bóveda (Foto 2).

No cabe duda de que se trata de un grabado singular, de carácter geométrico, de apenas 8,4 centímetros de altura por 7,8 de base y 6,2 de lado, y consta de una trama muy interesante y compleja (Foto 3).



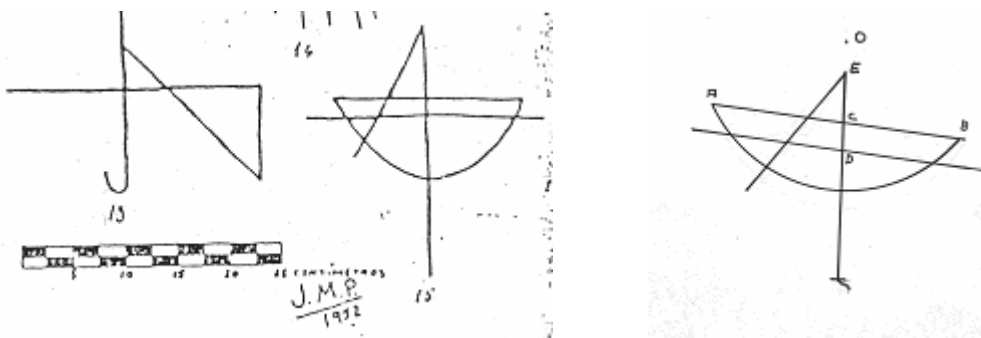
Foto 2.- Columna central donde se encuentra el grabado triangular. Frente a ella el arqueólogo J. C. de Nicolás y Ricardo Segura entre cuyos dedos se encuentra el dibujo.
Foto 3.- Triángulo de Na Foradada. Las incisiones se han repasado con un lápiz para destacarlo.

Ante él, por una parte hay que resaltar la aceptable coincidencia entre la ilustración de Mascaró y la realidad. Tan sólo se dejó por dibujar la incisión transversal que remata la

cruz y que es equidistante respecto a las otras dos. Así mismo, destaca lo bien trazado que está, excepción hecha de la base del triángulo, que da la impresión de que se inició desde un vértice y se terminó desde el otro.

En el dibujo 2 hemos reconstruido el triángulo salvando en lo posible los errores que se cometieron al trazarlo a mano alzada. Creemos que este conjunto de rayas no es una cabaña de ramas, sino algo mucho más complejo, y que se dibujó con un fin exclusivamente geométrico.

El tercer grabado (Dibujo 3) está en la “Cova de sa Païssa de S’Almudaina” (Alayor). Lo denominó “Arco y flecha” y le dio el número 15 (Mascaró, 1953b). El mismo equipo que localizó el grabado anterior ha vuelto a encontrar este. (Véanse las fotos 4 y 5). El grabado se encuentra en la enorme pilastra central, aunque en su lado derecho. Está realizado a mano alzada, de forma tosca, ya que la incisión es amplia y no tan aguda como en el caso anterior. La altura del eje vertical mide 19.5 cm, y del punto A al B hay 22 cm. En este caso la similitud del dibujo de Mascaró con la realidad no es tan perfecta. El semicírculo según Mascaró se ha trazado desde el punto C, mientras que en la realidad parece que se ha hecho desde un punto externo, el O, que se encuentra a una distancia CD del E. En el dibujo 4 se ha reconstruido la figura.



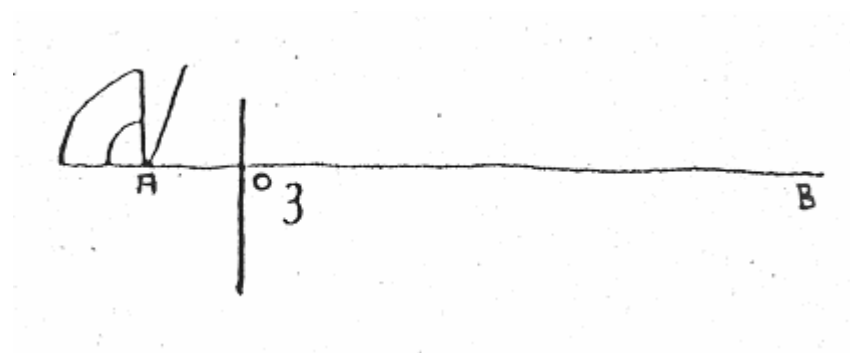
Dibujo 3.- Grabado de la Cova de sa Païssa de s’Almudaina según Mascaró. Dibujo 4.- Reconstrucción del grabado de sa Païssa de s’Almudaina. En una segunda fase se puede mejorar su horizontalidad.



Foto 4.- Gran columna central de la Cova de sa Païssa de S’Almudaina con una pequeña hornacina para ofrendas. En la pared lateral derecha se encuentra el grabado. Foto 5.- Detalle del grabado. Las líneas incisas se han repasado con un lápiz.

El último grabado se encuentra en una cueva del predio de Calafi Vell. La cueva se debe de encontrar mas allá de la casa predial, y debe de ser una de las cuatro que bordean el límite de la finca con el barranco de Trebalúger, ya que en dicho punto hay un pequeño altozano rocoso con cuevas y rodeado de maleza. Mascaró se limitó a indicar que dicho grabado está en esa finca de labor, sin concretar más su ubicación. A pesar de nuestros intentos muy intensos y sistemáticos no dimos con él, y por tanto nos basamos únicamente en el dibujo que realizó Mascaró y que se recoge en Mascaró (1953ª nº3).

El grabado se muestra en el dibujo 5. En él aparecen dos cuadrantes de círculo concéntricos, cuyo centro hemos marcado con la letra A. En el punto que hemos denominado O puede observarse una cruz de lados desiguales, cuyo ramal derecho se prolonga ingravido en el vacío de una manera exagerada y misteriosa hasta el punto B.



Dibujo 5.- Grabado que se encuentra en la pared de una cueva de Calafi Vell, Mascaró (1953a).

Para nosotros esta figura geométrica representa un intento de “rectificar el círculo”, esto es, tratar de extender sobre una línea recta la longitud de una circunferencia. En el mundo helénico este problema se enunciaba como la cuadratura del círculo, a saber, encontrar un cuadrado cuya superficie coincidiera exactamente con el área de una circunferencia dada. Si bien el problema no tiene solución por ser el número Pi un número trascendente, no siempre se ha sabido que esto era así, por lo que ha habido numerosos intentos de resolverlo. Para nosotros el segmento OB que se prolonga excesivamente hacia la derecha del punto O, casi en el espacio tenebroso, es justamente la longitud del círculo mayor cuyo centro es A, y presupone el conocimiento del número Pi. De hecho, si Mascaró trazó a escala su dibujo, y sobre él se mide el diámetro del círculo, y esta longitud se multiplica por 3.14, se obtiene el segmento OB. Es una hipótesis razonable, y de ser así, el enigma de quién y cuándo se trazó esta figura es interesante y crucial. Además hay que tener presente que el grabado está realizado de manera tal que lo debe interpretar el espectador. Siendo esto así, ¿quién lo pudo dibujar? Dado que Pitágoras falleció alrededor del año 500 aC y que la destrucción de su escuela y la diáspora de sus seguidores se produjo hacia el año 450 aC, tras la matanza de Metaponto, al menos podemos arriesgarnos a tomar esta fecha como límite superior.

Frente a la hipótesis que hemos apuntado de que el ideograma de la Cova de s'Encantament representa una estrella de cinco puntas o pentagrama, símbolo y emblema de la escuela pitagórica, y dado que también aparecen pentágonos estrellados

en las jambas del portal de entrada de la Cova de Santa Ana (Mahón), hoy en día ya desaparecidas por desidia y abandono, y en Alcaidús de Dalt, lo que junto con los grabados aquí expuestos podría suponer algún tipo de contacto entre miembros de la escuela pitagórica y Menorca en los siglos III o VI aC, surge el inconveniente de que, tal como cita Mascaró (1983a), en el muro exterior de piedra de la ermita de la Consolació (Santanyí, Mallorca) hay grabada una estrella similar.

Bibliografía

Ibáñez Orts, V. (2000) “Reflexiones sobre el diseño de las “taulas” de Menorca y su relación con el mundo pitagórico” SUMA nº 35, 75-86.

Ibáñez Orts, V. (2002) “El grabado prehistórico de la cueva de Calafi Vell (Menorca) y la rectificación del círculo” SUMA nº 39, 95-96.

Ibáñez Orts, V. (2002) “Les gravures rupestres de l’île de Minorque” Tangente nº89, Paris, 42-45.

Ibáñez Orts, V. (2002) “Un exemple d’architecture pythagoricienne? Les Taulas de Minorque” Tangente Hors-série nº14, “Mathématiques & Architecture” Paris, 74-79.

Mascaró Pasarius, J. (1953a) “Las cuevas prehistóricas y los grabados rupestres de Menorca”, Ampurias XV-XVI, Barcelona, 345-349.

Mascaró Pasarius, J. (1983) “Los grabados rupestres” Geografía e Historia de Menorca Vol IV, Menorca, 55-63.