



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 1

“LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN (TIC) AL SERVICIO DEL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS”

COMUNICACIONES

TENDENCIAS ACTUALES DEL USO DE LOS COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA	495
USO DE UNA HOJA DE CÁLCULO PARA EXPERIMENTAR CON UN ALGORITMO NUMÉRICO	501
RECURSOS EN INTERNET PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE BAYES	507
ECUACIONES, BALANZAS Y APLICACIONES JAVA.	513
¿CÓMO SE LLAMA ESTE ARTÍCULO?	517
SOFTWARE LIBRE Y ENSEÑANZA. GESTIÓN DE RECURSOS CON HERRAMIENTAS DE ELABORACIÓN DE CURSOS ONLINE PARA DESARROLLAR ACTIVIDADES CON ALUMNOS EN EL AULA DE INFORMÁTICA. MOODLE: UNA EXPERIENCIA.	523
COMANDOS DE TUTORÍA EN LOS SISTEMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO	527
USO DEL GEOMETRICKS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: TRIÁNGULO EQUILÁTERO Y FRACTALES	533
EL LÍMITE Y LA CONTINUIDAD EN ENTORNOS INFORMÁTICOS DEL PROGRAMA MATHEMATICA	539
OBSERVACIONES SOBRE EL CARÁCTER MEDIADOR DEL MÉTODO DE LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO ENTRE LA MANERA ARITMÉTICA Y LA MANERA ALGEBRAICA DE RESOLVER LOS PROBLEMAS.	545
ESTRATEGIAS INNOVADORAS EN LA PREPARACIÓN DE ALUMNOS ORIENTADOS A CARRERAS CIENTÍFICO-TECNOLÓGICAS	551
UN SISTEMA DE EVALUACIÓN CONTINUADA USANDO LA PLATAFORMA VIRTUAL ACME	557
UNA EXPERIENCIA EN FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS HACIENDO USO DE CALCULADORAS SIMBÓLICAS	563

TENDENCIAS ACTUALES DEL USO DE LOS COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN INGENIERÍA

J.L. Galán, M.A. Galán, A. Gálvez, A.J. Jiménez, Y. Padilla, P. Rodríguez

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Málaga

jl_galan@uma.es, magalan@ctima.uma.es, agalvez@ctima.uma.es,
anjipri@telefonica.net, ypadilla@ctima.uma.es, prodriguez@uma.es

Resumen

Dado que la mayoría de las Universidades han integrado por completo el uso de CAS (Computer Algebra Systems) en el desarrollo de las asignaturas de Matemáticas de las titulaciones de Ingeniería, nuestro objetivo será reflexionar sobre los usos que se dan hoy en día a estas herramientas en la enseñanza. Como parte de este análisis destacaremos el cambio de punto de vista que se está produciendo en los últimos años dentro del colectivo de profesores que utilizan CAS en la docencia. Este cambio pasa por modificar los usos habituales, con el fin de optimizar las oportunidades que ofrecen las tecnologías de la información y fomentar la creatividad matemática de los alumnos. Terminaremos con una breve descripción de las experiencias que en este sentido venimos desarrollando a lo largo de estos últimos años así como con unas breves conclusiones generales.

Los CAS como recurso didáctico en la enseñanza de las Matemáticas

Hoy en día está bastante extendida la utilización los ordenadores y en particular los CAS en las clases de Matemáticas de las carreras técnicas. Esto es debido a que los programas de cálculo constituyen herramientas de uso habitual en la actividad profesional de los ingenieros. Además, la utilización del ordenador viene a simplificar enormemente la realización de ejercicios y las aplicaciones usuales de la materia a los problemas propios de la Ingeniería, lo que hace que sea especialmente indicado su uso en el periodo de formación.

Sin embargo, todavía hay profesores reacios a su utilización por razones técnicas, personales e incluso políticas [31]. Una explicación para este comportamiento radica en el hecho de que la mayoría de los profesores no fueron formados en su momento para la utilización de los CAS en la docencia [36]. Parece, por tanto, que sin esta formación previa, los profesores no están suficientemente dispuestos ni preparados para elaborar las actividades adecuadas y no pueden reconocer, además, los riesgos que se pueden producir con dicha utilización.

Por muchos motivos creemos que es necesario emplear los CAS en el desarrollo de la docencia de las asignaturas de Matemáticas en Ingeniería. De hecho, son numerosas las publicaciones sobre tareas y conceptos a desarrollar en dichos estudios mediante el uso de CAS, lo que facilita su enseñanza y, sobre todo, contribuye a mejorar el aprendizaje. Entre otros logros constatados, se consigue que conceptos abstractos que presentan dificultades especiales para los alumnos resulten mucho más accesibles y fáciles de comprender [20]. Además, se logra un incremento en la motivación y una mejora en la actitud hacia las Matemáticas [7].

En otro sentido, se han registrado ciertas modificaciones en el desarrollo de las clases, como por ejemplo: cuando no se utiliza un CAS el profesor suele acaparar todo el protagonismo, mientras que con su uso aumenta la participación, la actividad autónoma de los alumnos [25] y las relaciones entre ellos, adquiriendo un mayor protagonismo en la construcción de conocimientos [29]. Por último, debido a la interactividad potencial de este tipo de herramientas, se consigue un nivel de abstracción superior en la resolución de problemas matemáticos [2], lo que supone, evidentemente, un logro didáctico importante.

Las mejoras cualitativas que acabamos de comentar tienen un complemento importante en la mejora cuantitativa que se suele producir en el rendimiento académico de los alumnos cuando se utilizan CAS [33]. En particular, esta mejora es especialmente significativa cuando existen deficiencias o carencias previas en lo que a conocimientos y destrezas matemáticas se refiere [34]. Si a este hecho le unimos la peculiaridad de permitir que el ritmo de la clase sea variable, nos encontramos también ante herramientas de gran utilidad para efectuar en clase una adecuada atención a la diversidad [26].

En base a estos argumentos, la mayoría de las Universidades han integrado por completo el uso de CAS en la enseñanza de las Matemáticas en diferentes titulaciones, hasta el punto de que ya no se contempla dicha integración como un hecho novedoso o innovador, sino como algo habitual en el desarrollo de las asignaturas [17].

Pero también hay que tener en cuenta las limitaciones y los riesgos que se corren. Por ejemplo, utilizar CAS puede hacer que los alumnos no establezcan vínculos correctos entre las técnicas utilizadas y su aproximación mental a las Matemáticas [32], o que se produzcan modificaciones no deseadas debidas a los cambios importantes que ocurren en los procesos de enseñanza [28]. Igualmente es necesario adoptar las medidas oportunas para que el alumno sepa qué hacer cuando un CAS no le da una respuesta al problema [9] o para que sea capaz de reconocer cuándo es útil emplear CAS para resolver un determinado problema.

Por otra parte, se ha detectado una característica común en cuanto a los efectos del trabajo con CAS: a pesar de la mejora en los resultados prácticos alcanzados, la mayoría de los alumnos no son conscientes de las mejoras producidas en sus conocimientos y destrezas así como en la asimilación de los contenidos presentados [8].

Sin embargo, el uso de los CAS se reduce, en la mayoría de los casos, a utilizar el ordenador como una calculadora potente de altas prestaciones, lo que en sí representa ya un avance con respecto a la metodología didáctica tradicional. Pero esta forma de utilización supone, a pesar de todo, una infrautilización de los recursos, por lo que se hace necesario un cambio de punto de vista para optimizar las oportunidades que ofrecen las tecnologías de la información y tratar de fomentar la creatividad matemática de los alumnos [14].

Tendencias actuales

En los últimos años se está produciendo un fuerte movimiento dentro del colectivo de profesores que utilizan CAS en la enseñanza de las Matemáticas con el fin de cambiar los usos didácticos tradicionales de estas herramientas. Así, en [21] se afirma que es un error utilizar los CAS en la docencia como máquinas para resolver ejercicios, mientras que en [6] se indica que no podemos reducir su uso al de una calculadora de altas prestaciones. Por el contrario, se deben modificar dichos usos para maximizar las oportunidades que ofrecen estas tecnologías [16], orientando su aplicación, por ejemplo, en el sentido de incidir positivamente en el aprendizaje [13], aumentar

considerablemente la posibilidad de experimentación [19] y permitir que el alumno construya su conocimiento matemático bajo la orientación del docente.

Pero para ello es necesario que se elaboren actividades apropiadas. Así, en [1] se establece que se deben proponer problemas de muy difícil resolución sin el uso de CAS, puesto que “no se pueden resolver los mismos problemas que se resolvían cuando no existían los CAS” [35]. En [23], Monagan se manifiesta en el mismo sentido cuando afirma que hay que hacer unos ejercicios y problemas mucho más realistas aprovechando las posibilidades de los ordenadores. Por otro lado, puesto que a veces los CAS no presentan los resultados en el modo usual o esperado, en [3] se propone utilizar dichos resultados inesperados para reforzar el aprendizaje de los conceptos y fomentar el espíritu crítico de los alumnos. Incluso se pueden aprovechar los “errores” que cometen los CAS para ayudar en el proceso de enseñanza-aprendizaje [4].

En otro orden de cosas, estamos de acuerdo con los profesores que afirman que el uso de CAS en las clases de Matemáticas no ha alcanzado todavía su grado óptimo [24]. De hecho, los CAS más usuales son *blackbox* (muestran el resultado en un paso sin enseñar cómo se llega a él), mientras que en [30] se asegura que para poder sacar todo el provecho a los CAS, éstos deberían ser *whitebox* (mostrar los desarrollos intermedios). En menor medida, no por ser menos importante sino por su novedad, está la idea de utilizar la programación con lenguajes informáticos en las clases de Matemáticas [12]. Así, cuando los alumnos programan deben leer, construir y depurar estrategias, modificar programas que ya están desarrollados y, por último, resolver los problemas con dichos programas. Esto les convierte en protagonistas de su aprendizaje [18]. Además, el uso de la programación permite encontrar tareas adecuadas que se corresponden directamente con las construcciones mentales de los conceptos matemáticos [10]. Como ejemplo se puede citar el lenguaje de programación ISETL, utilizado por Dubinsky para enseñar Matemáticas a alumnos universitarios por tener una sintaxis que favorece la asimilación de los contenidos matemáticos [11].

Por último, una buena idea es complementar la programación con los CAS mediante la realización de comandos o funciones específicas [22], lo que permite aumentar considerablemente las librerías de funciones predeterminadas que contienen. Más en concreto, compartimos el enfoque de Böhm que muestra las posibilidades que ofrece el hecho de combinar la potencia de un CAS (en este caso DERIVE) con la flexibilidad de un lenguaje de programación [5]. El enfoque que creemos más adecuado es, por tanto, el de utilizar la programación con los CAS para que sean los propios alumnos los que creen las funciones específicas necesarias que les permitan resolver los problemas propios de las materias correspondientes.

Experiencias propias

El origen de nuestras experiencias se sitúa hace diez años y han consistido, básicamente, en la realización continuada de prácticas en el laboratorio de informática para algunas de las asignaturas en las que el *Departamento de Matemática Aplicada* de la *Universidad de Málaga* tiene asignada docencia, como son las asignaturas de Matemáticas de las titulaciones *Ingeniería Técnica Industrial* e *Ingeniería Técnica de Telecomunicación*.

A lo largo de las numerosas experiencias desarrolladas durante la primera parte del periodo mencionado se pudo comprobar, entre otras cosas, la manifiesta infrautilización de que era objeto el ordenador en el aula de Matemáticas [14], lo que nos llevó a introducir, en los últimos cuatro años, nuevas actividades orientadas a aprovechar mejor las posibilidades del ordenador y de los programas y a disminuir la utilización exclusiva de los CAS como máquinas de cálculo y para la resolución mecánica de ejercicios. La

orientación de las nuevas actividades tenía que ver, principalmente, con la participación activa del alumno en el proceso de enseñanza-aprendizaje y con una mayor atención a la construcción del conocimiento matemático bajo la orientación del docente.

Como consecuencia de la experiencia acumulada en el sentido indicado, decidimos que en estas prácticas, además de resolver problemas tipo de la asignatura en cuestión, fuesen los alumnos los que construyesen (programasen) comandos (funciones específicas) con DERIVE para resolver dichos problemas [15]. Esta elaboración de comandos por parte de los alumnos supone el principal aspecto innovador de nuestras prácticas y exige un conocimiento exhaustivo de la asignatura por parte del alumno.

Así, por ejemplo, para la elaboración de un comando que compruebe si una forma diferencial es forma diferencial exacta, el alumno deberá conocer cuál es la condición para que dicha forma diferencial sea exacta; mientras que para la elaboración de comandos para calcular integrales triples deberá tener en cuenta los siguientes elementos: la función a integrar, el sistema de coordenadas y las tres variables de integración con sus correspondientes límites de integración. Además, como el orden de integración es importante, necesitará tenerlo en cuenta a la hora de elaborar los comandos. Evidentemente, el hecho de que el propio alumno sea el que elabore los comandos con todos sus argumentos influye positivamente a la hora de aplicarlos para resolver ejercicios concretos.

Con este tipo de prácticas se consigue que el uso del ordenador no sólo se vea reducido a su aplicación más clásica y usual de realizar los cálculos a modo de calculadora potente, sino que se utilice como herramienta para fomentar la creatividad matemática del alumno.

Por último, señalar que nuestras experiencias se encauzaron bajo los siguientes Proyectos de Innovación Educativa desarrollados en la *Universidad de Málaga*, en los que se proponía la elaboración de comandos con DERIVE como aspecto fundamental:

- *El ordenador en las asignaturas de Matemáticas de las carreras técnicas: mucho más que una calculadora potente* (curso 01/02).
- *Matemáticas para la Ingeniería. El ordenador como herramienta de creatividad matemática* (curso 02/03).
- *Elaboración de comandos con DERIVE. Una experiencia en las titulaciones de Ingeniería Técnica de Telecomunicación* (curso 03/04).
- *El uso de la programación como recurso didáctico en la enseñanza de las Matemáticas de las carreras técnicas* (curso 04/05).

Consecuencias finales

De las reflexiones realizadas en los apartados anteriores se deducen, entre otras, las siguientes conclusiones que nos gustaría destacar:

- Las experiencias acumuladas revelan que los CAS son herramientas informáticas de fácil manejo y útiles para su integración en las clases de Matemáticas de Ingeniería.
- Se deben cambiar los usos tradicionales de los CAS en la enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería para maximizar las oportunidades que ofrece esta tecnología. La optimización se debe orientar hacia la mejora de la motivación, la autonomía y el aprendizaje basado en la implicación del alumno en el proceso.
- Una idea potente es la de combinar los recursos de un CAS con la flexibilidad de un lenguaje de programación.

- Hay indicios razonables de que la realización de comandos con DERIVE facilita el aprendizaje y mejora la motivación del alumno.
- Aunque sería lo deseable, no es necesario modificar sustancialmente un programa tradicional de una asignatura de Matemáticas en Ingeniería para introducir la elaboración de comandos con DERIVE por parte de los alumnos.

Referencias bibliográficas

- [1] ABOUD, M. (2002). Introducing experiments into a first course in calculus. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Hersonissos, Creta (Grecia).
- [2] ALBANO, G. y DESIDERIO, M. (2002). Improvements in teaching and learning using CAS. *Proceedings of the Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*. Viena (Austria).
- [3] ALONSO, F., GARCÍA, A., GARCÍA, F., HOYA, S., RODRÍGUEZ, G. y DE LA VILLA, A. (2001). Some unexpected results using computer algebra systems. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 8(3), 239-252.
- [4] BOVIO, M. (2002). Suggestions Focusing Derive at Upper Grades. Pt.3. Examples of Software Errors. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 25(2), 111-128.
- [5] BÖHM, J. (2002). Programming in DERIVE 5 - introductory example(s). *Proceedings of the Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*. Viena (Austria).
- [6] CABELLO, J., HERNÁNDEZ, M., LUQUE, M. y MIGUEL, F. (2000). Mejora de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas Empresariales. *Campus Virtuales y Enseñanza Universitaria*. Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Málaga, Málaga.
- [7] CAMACHO, M. y DEPOOL, R. (2002). Students' attitudes towards Mathematics and computers when using DERIVE in the learning of calculus concepts. *International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 9(4), 259-283.
- [8] CRETCHLEY, P. (2002). Mathematics and technology: How integrated is this learning partnership? *Proceedings of the Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*. Viena (Austria).
- [9] DRIJVERS, P. (1999). Students encountering obstacles using CAS. A developmental-research pilot study. *Exploring CAS as a pedagogical vehicle towards expressiveness and explicitness in Mathematics*. Weizmann Institute of Science, Rehovoth (Israel).
- [10] DUBINSKY, E. (1994). Pedagogical Change in Undergraduate Mathematics Education. *MAA Notes*, 35, 114-119.
- [11] DUBINSKY, E. (1995). ISETL: A Programming Language for Learning Mathematics. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 48, 1-25.
- [12] DUBINSKY, E. (1998). *Writing Programs to Learn Mathematics*. <http://trident.mcs.kent.edu/~edd/publications.html>.
- [13] DUBINSKY, E. y NOSS, R. (1996). Some kinds of computers for some kinds of Mathematical learning. *Mathematical Intelligencer*, 18(1), 17-20.
- [14] GALÁN, J.L., GALÁN, M.A., PADILLA, Y. y RODRÍGUEZ, P. (2002a). Are computers under-used in Mathematical teaching for engineers? *Educational technology. Serie Sociedad de la información n° 9*, 220-225.
- [15] GALÁN, J.L., GALÁN, M.A., PADILLA, Y. y RODRÍGUEZ, P. (2002b). Use of the computer in Mathematic teaching for engineers. A powerful calculator? *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Hersonissos, Creta (Grecia).
- [16] GARCÍA, A., GARCÍA, F., HOYA, S., RODRÍGUEZ, G. y DE LA VILLA, A. (2002). Differential calculus of several variables with Mathematica or Maple. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Hersonissos, Creta (Grecia).
- [17] GONZÁLEZ, A., CALDERÓN, S., GALACHE, T., LUQUE, M. y TORRICO, A. (1998). El Ordenador en el Proceso Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas Empresariales. *Promover la Calidad de la Enseñanza Universitaria. Proyectos de Innovación Educativa en la Universidad*. Publicaciones e Intercambio Científico de la Universidad de Málaga, Málaga.
- [18] HECTOR, J. (2002). Problem Solving, Programming and Pedagogy. *Proceedings of the Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*. Viena (Austria).
- [19] HOYA, S., MARTÍN, A., RODRÍGUEZ, G. y VISUS, I. (2002). The use of symbolic calculus software in the teaching of Mathematics at Engineering Schools. *Proceedings of the International Conference on ICT's in Education*. Badajoz (España).
- [20] LEINBACH, L. (1994). Visualizing concepts in advanced analysis. *The International DERIVE Journal*, 1(2), 101-113.
- [21] MACKIE, D. (2002). Using computer algebra to encourage a deep learning approach to calculus. *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Hersonissos, Creta (Grecia).
- [22] MAJEWSKI, M. (2000). Non trivial applications of Maple in teaching Mathematics. *Proceedings of the International Conference on Technology in Mathematics Education (ICTME 2000)*. Beirut (Líbano).

- [23] MONAGAN, M. (1994). Worksheets: can we teach mathematical algorithms with them? *Maple V: Mathematics and its application*. Nueva York.
- [24] NEUPER, W. (2001). What teachers can request from CAS-designers. *Proceedings of the 5th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 5)*. Klagenfurt (Austria).
- [25] NOCKER, R. (1998). Effects of computer algebra on classroom methodology and pupil activity. *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1996*. Osnabrueck (Alemania).
- [26] ORTEGA, P. (2002). *La enseñanza del Álgebra Lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*. Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid, España.
- [27] PIERCE, R. (2001). Using CAS-calculators requires algebraic insight. *Australian Senior Mathematics Journal*, 15(2), 59-63.
- [28] SCHNEIDER, E. (1999). Changes of teaching Mathematics by Computer Algebra Systems (CAS). *Selected Papers from the Annual Conference of Didactics of Mathematics 1997*. Osnabrueck (Alemania).
- [29] SCHNEIDER, E. (2000). Teacher experiences with the use of a CAS in Mathematics classroom. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(2), 119-141.
- [30] STRICKLAND, P. (1999). A Computer Algebra System for improving student's manipulation skills in Algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 6(1), 17-24.
- [31] TOWNSLEY, L. (1996). Attracting teachers to use CAS in the classroom: common strategies. *Joint Mathematics Meetings*. Orlando (Florida).
- [32] VAN HERWAARDEN, O. y GIELEN, J. (2002). *An approach for the effective integration of Computer Algebra in an Undergraduate Calculus and Linear Algebra Course*. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), Hersonissos, Creta (Grecia).
- [33] VLACHOS, P. y KEHAGIAS, A. (2000). A Computer Algebra System and a new approach for teaching Business Calculus. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(2), 87-104.
- [34] WATKINS, A. (1993). A new approach to Mathematics for Engineers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(5), 689-702.
- [35] WESTERMANN, T. (2000). Teaching Mathematics using a Computer Algebra. *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, 7(4), 277-293.
- [36] YAMAMOTO, Y. (2002). Analyzing the limitations of technology in teacher preparing courses. *Proceedings of the Vienna International Symposium on Integrating Technology into Mathematics Education (VisitMe)*. Viena (Austria).

USO DE UNA HOJA DE CÁLCULO PARA EXPERIMENTAR CON UN ALGORITMO NUMÉRICO

Antonio Bueno Aroca
I.E.S. Parque Lineal de Albacete

Juan Mat3nez-Tebar Gim3nez
I.E.S. Alto Guadiana de Tomelloso

Resumen

En la primera secci3n de este trabajo describiremos un algoritmo iterativo para el c3lculo de ra3ces cuadradas, estudiando la convergencia del mismo en funci3n del punto de inicio. A continuaci3n explicaremos el funcionamiento de un software asociado al algoritmo, utilizando Excel y programaci3n en VBA, en un intento de dar al alumno una herramienta vers3til y c3moda, con la que curiosear, experimentar y realizar simulaciones. Por 3ltimo daremos una pr3ctica dirigida a estudiar el comportamiento del algoritmo en diferentes situaciones iniciales, tratando de motivar al alumnado a realizar sus propias investigaciones en la b3squeda de un criterio de convergencia pr3ctico que ratifique el criterio te3rico.

1. Introducci3n.

El uso de algoritmos para c3lculos sencillo no suele ser objeto de atenci3n en la docencia de matem3ticas por diferentes motivos, en particular y sobre todo, por la gran cantidad de tiempo que se debe emplear hasta conseguir resultados relevantes para nuestros alumno. La posibilidad de utilizar un software adecuado, que evite los costosos y tediosos c3lculos, abre el camino a pr3cticas de investigaci3n, como la que en este manuscrito presentamos, que pueden motivar a nuestros alumnos de diferentes formas, despertando su curiosidad, alentando su ingenio y presentando m3todos propios de la investigaci3n.

El uso de los sistemas din3micos, tal y como se describe en [2] nos parece muy adecuado para el nivel de secundaria, adem3s nos permite introducir temas como la aproximaci3n a la geometr3a de la naturaleza, desde un punto de vista matem3tico, aproximaci3n para la que podemos utilizar la gran cantidad de ensayos en esta direcci3n que se ofrecen en [1]. Para aproximar a nuestros alumnos a los sistemas din3micos, hemos utilizado una pr3ctica de c3lculo repetitivo usando las funciones ra3z cuadrada y cuadr3tica, tal y como se describe en [2] y [3], que nos conduce de manera sencilla a los conceptos de convergencia y divergencia.

Pretendemos con ello motivar a nuestro alumnado en el planteamiento de situaciones y hacer atractiva la b3squeda de soluciones para esas situaciones, jugando con la idea de infinito, que suele despertar su curiosidad.

El hecho de usar una m3quina no nos exime de presentar a nuestros alumnos el conocimiento matem3tico que subyace bajo esa utilizaci3n, por ello la pr3ctica contar3 de tres fases, una propiamente expositiva, fase en la que se detallar3n aspectos del algoritmo que describiremos en la secci3n 2, otra de realizaci3n manual, para que el

alumno se familiarice con el proceso y, por último, la fase de investigación propiamente dicha, utilizando el software que describiremos en la sección 3.

2. Descripción del algoritmo.

Utilizaremos un algoritmo de cálculo de raíces cuadradas. Sea $c \in \mathbb{R}$ cuya raíz cuadrada deseamos calcular, tomamos para ello una estimación inicial, x_0 , y llamaremos a al error cometido, así tenemos que $(x_0 + a)^2 = x_0^2 + a^2 + 2ax_0 = c$. Y suponiendo que $x_0 \neq 0$:

$$a = \frac{c}{2x_0} - \frac{x_0}{2} - \frac{a^2}{2x_0}$$

llegado este punto consideraremos que el error cometido es pequeño en comparación con el valor x_0 , y que por lo tanto, $\frac{a^2}{2x_0} \cong 0$. Así, la aproximación obtenida será:

$$x_1 = x_0 + a = x_0 + \frac{c}{2x_0} - \frac{x_0}{2} = \frac{c}{2x_0} + \frac{x_0}{2}$$

Repitiendo este proceso para x_1 , obtendremos $x_2 = \frac{c}{2x_1} + \frac{x_1}{2}$, y así, en general:

$$x_{n+1} = \frac{c}{2x_n} + \frac{x_n}{2}$$

La convergencia de este algoritmo queda garantizada por la propiedad siguiente, cuya demostración puede encontrarse en [2].

Prop.- Si $\frac{c}{3} < x_0^2$ entonces el algoritmo descrito en esta sección es convergente.

3. Descripción del software.

El software consta de una plantilla de hoja de cálculo desarrollada en Excel, siendo un fichero con extensión .xlt y que precisa de la instalación de Microsoft Office para funcionar correctamente, además, al iniciarse la aplicación, debe habilitarse el uso de macros.

Las diferentes ventanas que se ofrecen se muestran en las imágenes siguientes:

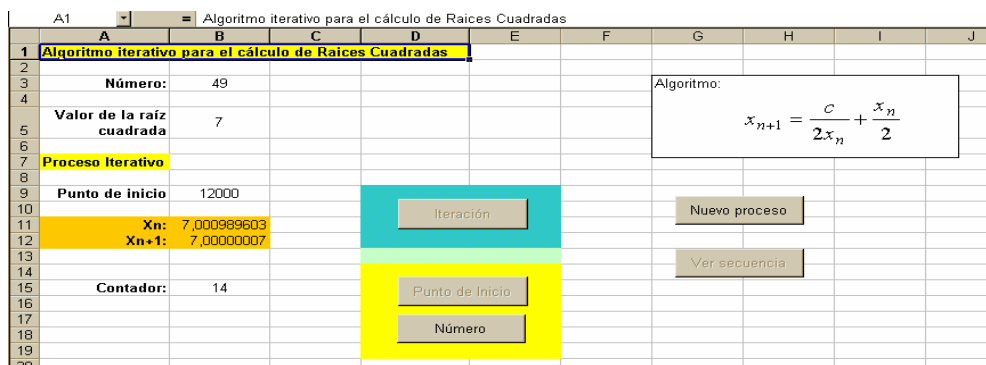


Imagen 1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Secuencia	Valor	Raíz				
2	Punto de inicio:	10	500	22,36067977				
3		30						
4		23,33333333						
5		22,36095238						
6	Iteración 4	22,36068896						
7								
8								
9								
10								
11								
12								
13								
14								

Imagen 2

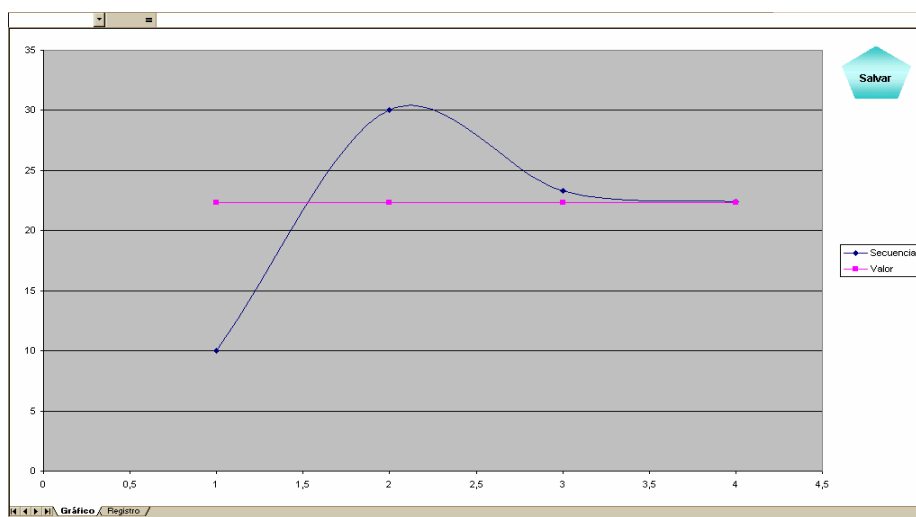


Imagen 3

Al hacer doble clic sobre el icono de la aplicación se genera un nuevo documento de hoja de cálculo, cuyo aspecto es el presentado en la Imagen 1, en ella aparecen los diferentes elementos de interés para la investigación que propondremos a los alumnos:

- Número sobre el que calcular la raíz cuadrada.
- Valor de la raíz cuadrada.
- Punto de inicio: número con el que comienza el algoritmo.
- x_n : valor de partida en la iteración actual.
- x_{n+1} : valor obtenido en la iteración actual.
- Contador: número de iteraciones realizadas.

La descripción de los botones de comando que se ofrecen es la siguiente:

1. Número: introducimos así el número cuya raíz cuadrada vamos a calcular usando el algoritmo, los botones etiquetados con Punto de Inicio, Iteración y Ver Secuencia quedarán entonces permitidos.
2. Punto de Inicio: introducimos así un número a partir del cual el algoritmo comenzará los cálculos.
3. Iteración: al pulsar este botón se generará un nuevo paso en la secuencia del algoritmo.
4. Ver Secuencia: un vez que el algoritmo ha finalizado, encontrando una solución aceptable, podemos pulsar sobre este botón para acceder a la ventana que se muestra en la Imagen 2.
5. Nuevo proceso: restablece el software a sus condiciones iniciales.

Con el botón Ver secuencia accederemos a una ventana similar a la que vemos en la Imagen 2, en ella se ofrece la secuencia obtenida y dos botones, uno para volver a la ventana anterior y otro para acceder a la representación gráfica de la situación. Al pulsar sobre este último botón accedemos a un gráfico, como podemos ver en la Imagen 3. Este gráfico representa la situación generada por el sistema dinámico y la interpretación del mismo es el objeto último de esta actividad. En la parte superior del mismo aparece una imagen, que es realmente un botón, y cuya pulsación generará un documento de texto que contendrá la secuencia y el gráfico asociado, el objeto de esta capacidad es que el alumno pueda conservar en un documento el resultado obtenido, pudiendo así comparar lo ocurrido en función de las condiciones iniciales dadas al algoritmo.

4. Buscando un criterio de convergencia.

En esta sección describiremos prácticas a realizar con alumnos, para las dos primeras utilizaremos una calculadora sencilla, con tecla para el cálculo de raíces cuadradas, para la tercera será necesario el software descrito en la sección 3.

4.1 Práctica utilizando $f(x) = \sqrt{x}$

- Poner en la calculadora el número 7 y pulsar tres veces sobre la tecla de raíz cuadrada, anotando el resultado.
- Pulsar tres veces más y volver a anotar el resultado.
- Pulsar seis veces más y volver a anotar el resultado.
- Poner en la calculadora el número 3200 y repetir el proceso realizado al 7.
- Decir al alumno que repita esta experiencia con tres números más.
- Indicar al alumno que debe escribir sus conclusiones, exigiendo detallar el proceso y las incidencias que hayan podido acontecer.

4.2 Práctica utilizando $f(x) = x^2$

- Poner en la calculadora el número 2 y elevar al cuadrado tres veces.
- Pulsar tres veces más y volver a anotar el resultado.
- Poner en la calculadora el número 0'5 y repetir el proceso realizado al 2.
- Decir al alumno que repita esta experiencia con dos números mayores que 1 o menores que -1 y con otros dos comprendidos entre -1 y 1.
- Indicar al alumno que debe escribir sus conclusiones, exigiendo detallar el proceso y las incidencias que hayan podido acontecer.

4.3 Práctica utilizando el software creado con la hoja de cálculo.

Antes de comenzar a utilizar el software, el alumno debe conocer el algoritmo y el enunciado, al menos, de la propiedad que garantiza la convergencia del mismo, presentada en la sección 2 de este texto.

Utiliza el software “Algoritmo Raíz Cuadrada” con las condiciones iniciales:

- Número:100; Punto de inicio: 50; (el resultado se alcanzará en 6 iteraciones).
- Pulsa sobre “Ver Secuencia” y observa la evolución numérica de la convergencia.
- Pulsa sobre “Ver gráfico” y observa la evolución gráfica de la convergencia..
- Almacena el gráfico en un documento de texto.

Repetir el experimento con:

- Número: 100; Punto de inicio: 2

Anota las diferencias que observes entre ambos resultados gráficos.

Repite esta experiencia con las siguientes condiciones iniciales:

- Número: 37; Punto de inicio: 25.
- Número: 37; Punto de inicio: 6.
- Número: 73; Punto de inicio: 25.
- Número: 73; Punto de inicio: 6.

¿Puedes obtener alguna idea de por qué sucede lo que ves en los gráficos?

En caso de que no sea así repite la experiencia con las condiciones iniciales siguientes:

- Número: 27; Punto de inicio: 10.
- Número: 27; Punto de inicio: 7.
- Número: 27; Punto de inicio: 6.
- Número: 27; Punto de inicio: 4.
- Número: 27; Punto de inicio: 3.
- Número: 27; Punto de inicio: 0'5.

Si no se te ocurre una respuesta pregunta a tu profesor.

Ahora repite la experiencia con el número 130 y los puntos de inicio siguientes:

- Punto de inicio: 1210.
- Punto de inicio: 5.
- Punto de inicio: 0'1.
- Punto de inicio: 0'01.

Ahora repite la experiencia, pero restringiendo el número de iteraciones a 12:

- Punto de inicio: -1210.
- Punto de inicio: -5.
- Punto de inicio: -0'1.
- Punto de inicio: -0'01.

¿Qué observas? ¿Puedes explicar lo que ocurre en cada caso?

Repite la experiencia con diferentes números y con puntos iniciales positivos y negativos en cada caso.

¿Puedes dar un criterio de convergencia? ¿Puedes relacionar este criterio de convergencia con el resultado teórico?

Bibliografía

- [1] Benoît Mandelbrot. La Geometría Fractal de la Naturaleza. *Tusquets Editores (Metatemas) Traducción del Original "The Fractal Geometry of Nature"*. 1977.
- [2] M. de Guzmán, M.A. Martín, M. Morán , y M. Reyes. Estructuras fractales y sus aplicaciones. *Editorial Labor*. 1993
- [3] M.A. Martín, M. Morán , y M. Reyes. Iniciación al caos. *Editorial Síntesis*. 1995.
- [4] Fermí Vilá. Excel 2000. Editorial Ra-Ma. 2000.

RECURSOS EN INTERNET PARA LA ENSEÑANZA DEL TEOREMA DE BAYES

Luis Serrano Romero, Carmen Díaz Batanero, Inmaculada de la Fuente
lserrano@ugr.es, mcdiaz@ugr.es, edfuente@ugr.es

¹Facultad de Educación y Humanidades, Melilla, ²Facultad de Psicología, Granada

Summary

Bayesian reasoning is highly relevant for a variety of professionals; however its teaching is not always wide enough to help students overcome the obstacles related to this topic. In this paper we analyse some Internet resources that might facilitate the teaching of Bayesian theorem making a special emphasis in its didactic usefulness.

Resumen

El razonamiento bayesiano es de gran relevancia para todo tipo de profesionales, sin embargo su enseñanza no es en ocasiones lo suficientemente amplia como para superar los obstáculos que presenta este tema. En este trabajo se analizan algunos recursos disponibles en Internet para facilitar la enseñanza del teorema de Bayes, haciendo especial énfasis en su utilidad didáctica.

Introducción

El cálculo de la probabilidad a posteriori $P(A_i/S)$ de la posible causa A_i que ha producido un suceso S , conocidas las probabilidades a priori de las causas $P(A_i)$ así como de que dichas causas originen el suceso $P(S/A_i)$ se puede llevar a cabo mediante el teorema de Bayes, que sirve de base a toda una rama de la inferencia estadística, conocida como inferencia bayesiana. Este tipo de razonamiento es de gran relevancia para todo tipo de profesionales, como psicólogos, médicos, economistas o políticos, quienes lo encuentran en situaciones de toma de decisión bajo incertidumbre, como el diagnóstico, la evaluación o la investigación empírica. A pesar de esta importancia, encontramos en la actualidad que no se hace suficiente énfasis en la enseñanza del teorema de Bayes e incluso se encuentran recomendaciones para disminuir los contenidos de probabilidad en los cursos de estadística dirigidos a universitarios. Las razones dadas es que el razonamiento bayesiano es difícil para el alumno, como lo muestran muchas investigaciones en el campo de la psicología.

Pero otras investigaciones recientes sugieren que la enseñanza del razonamiento bayesiano podría facilitarse si se utiliza un formato adecuado de presentación de los problemas y se enseña a los alumnos estrategias de resolución basadas en la representación de diagramas en árbol. En este trabajo sugerimos el uso de recursos disponibles en Internet, que podrían facilitar la adquisición de estas estrategias y la comprensión de los conceptos latentes tras ellas.

Investigaciones sobre razonamiento bayesiano

La competencia en resolución de problemas bayesianos ha sido investigada, ampliamente por psicólogos (e.g., Tversky y Kahneman, 1982; Falk, 1986). La conclusión es que estos problemas son difíciles y contraintuitivos y que los sujetos no tienen en cuenta las probabilidades a priori en el cálculo de la probabilidad inversa (falacia de las tasas bases). También los educadores matemáticos (e.g., Gras y Totahasina, 1995; Ojeda, 1995) analizan los procedimientos de los estudiantes, sugiriendo la dificultad en construir correctamente un diagrama en árbol o en identificar los datos del problema. Junto a esto se presentan algunas concepciones erróneas, como por ejemplo, pensar que no se puede condicionar un suceso por otro que ha ocurrido con posterioridad a aquél cuya probabilidad calculamos (falacia del eje de tiempos).

Por otro lado, ciertas teorías recientes (ver resumen en Sedlemeier, 1999) sugieren que se puede facilitar la resolución de los problemas bayesianos y llegar a una enseñanza efectiva si los datos del problema se presentan en frecuencias absolutas, en lugar de en porcentajes o por medio de probabilidades. También indican la conveniencia de usar una representación adecuada, como el diagrama en árbol. En nuestro propio trabajo hemos encontrado grandes dificultades en el razonamiento bayesiano de alumnos de psicología, incluso después de la enseñanza del tema y con problemas dados en formatos de frecuencia. Todo ello nos indica la necesidad de replantear la enseñanza y nos ha sugerido el uso de algunos recursos disponibles en Internet que analizamos a continuación.

Internet y enseñanza de la estadística

La estadística es una de las materias que más ha sido influida por la tecnología, y en particular por Internet (Galmacci, 2001). Destacamos la página de la *International Association for Statistical Education*, <http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/> donde se recogen vínculos a otros servidores, así como publicaciones, incluyendo tesis doctorales, actas de conferencias y revistas electrónicas, como *Statistics Education Research Journal*. Estas posibilidades, nos llevan a replantear la enseñanza de la estadística, ya que los libros de texto se empiezan a transformar a ediciones electrónicas y libremente accesibles a la consulta, modificación y sugerencias a través de Internet. Es también sencillo obtener datos de todo tipo para que los estudiantes puedan realizar investigaciones sobre casi cualquier tema, incluso con pocos recursos disponibles. El profesor puede cargar estos conjuntos de datos de la Internet e introducirlos en las calculadoras gráficas de los alumnos que tienen una difusión mucho mayor. De este modo los alumnos pueden trabajar con los datos en casa o exportarlos a otros ordenadores o calculadoras. También pueden combinar diferentes conjuntos de datos en un mismo proyecto o "enviar" a la red sus propias colecciones de datos para que sean usadas por nuevos estudiantes en cualquier rincón del planeta.

Las listas de discusión entre profesores o entre alumnos, la "tutoría" de alumnos a distancia, cuando el trabajo del alumno no permite la comunicación directa con el profesor ya están siendo implementados en muchas escuelas y universidades. La importancia de estos recursos se reflejó en la organización de una conferencia estadística sobre "Statistics Education and Internet" en el año 2003 (<http://www.ph-ludwigsburg.de/iase/>).

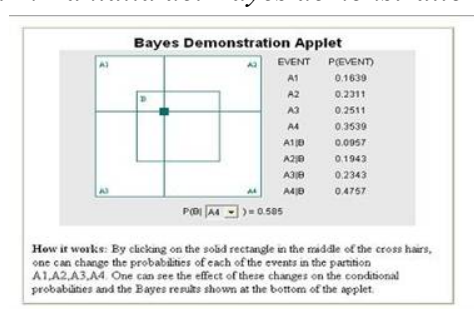
Recursos en Internet para la enseñanza del razonamiento bayesiano

A continuación describimos algunos applets y recursos disponibles en Internet para facilitar la enseñanza del razonamiento bayesiano, clasificados en varios apartados, describiendo su utilidad para la enseñanza.

Exploración del teorema de Bayes

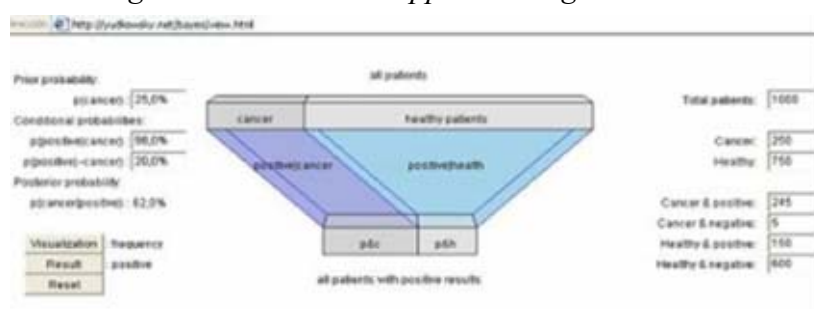
En la dirección <http://www.stat.sc.edu/~west/applets/bayesdemo.html> encontramos un applet que permite explorar este teorema. El recurso (Figura 1) muestra un diagrama de rectángulo con cuatro particiones del espacio muestral (A_1 , A_2 , A_3 y A_4) y un suceso B. Las probabilidades de los sucesos de la partición se pueden modificar moviendo un cursor, modificando también las probabilidades condicionales $P(B/A_i)$. Este programa calcula automáticamente las probabilidades $P(A_i/B)$, aunque no muestra cómo se hace el cálculo sino tan sólo el resultado.

Figura 1. Pantalla del Bayes demonstration Applet



La Figura 2 muestra un ejemplo de la aplicación del teorema de Bayes al diagnóstico (Bayes applet: <http://yudkowsky.net/bayes/view.html>). Permite definir la probabilidad a priori de tener cáncer así como las probabilidades de que un test dé positivo si se tiene cáncer y probabilidad de que dé positivo si no se tiene cáncer. Según se definan estos sucesos, el applet modifica el diagrama donde se representan las personas con cáncer, personas sanas, personas que dan positivo si tienen cáncer y personas que dan positivo si no lo tienen. El programa calcula la probabilidad de tener cáncer si el test da positivo.

Figura 2. Pantalla del applet de diagnóstico



En la parte derecha del applet se incluyen los mismos datos en frecuencias: número de pacientes, personas con cáncer, personas sanas, personas que tienen cáncer y dan positivo, personas que están sanas y dan positivo, etc. Si se introduce un cambio en las probabilidades, el applet calcula los datos en frecuencias y viceversa. Por último, en la parte inferior izquierda del applet hay tres botones: el primero permite visualizar el

diagrama en formato de frecuencia o de probabilidades; el segundo permite cambiar el problema para el caso en el que el test dé negativo; y el tercero permite restaurar los valores por defecto.

Un recurso similar (Figura 3) denominado Bayes rule simulator: <http://www.gametheory.net/Mike/applets/Bayes/Bayes.html> plantea la situación en que alguien es sometido a una prueba para detectar una enfermedad rara y resulta positivo, y pide reflexionar sobre si debería preocuparse esta persona. Hay que definir la precisión de la prueba y la probabilidad de infección. Cuando presionamos el botón "start", el programa calcula la probabilidad de tener la enfermedad si la prueba da positivo. Un aspecto interesante de este recurso es que representa el procedimiento de cálculo mediante un diagrama de árbol, donde se incluyen los datos en frecuencias y probabilidades. De esta forma el alumno puede ver la secuencia de razonamiento que ha seguido el programa para llegar a la solución. En la parte inferior, el applet incluye la probabilidad a priori y a posteriori de tener la enfermedad, para poder compararlas.

Figura 3. Pantalla del Bayes Rule Simulator

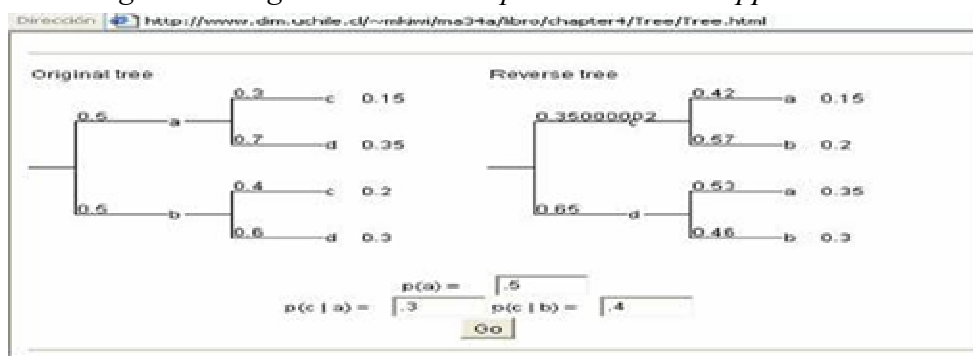


Este mismo autor ha diseñado otro applet muy similar, aunque en otro contexto. En este caso, trata de una empresa que quiere recompensar a los buenos empleados y calcula la probabilidad de que la recompensa haya ido a parar a un mal empleado. Podemos encontrarlo en <http://www.gametheory.net/Mike/applets/Bayes/WhoReward.html>.

Construcción de árboles de probabilidad

Ya hemos indicado que el diagrama en árbol facilita la resolución de estos problemas, aunque tampoco son sencillos de construir. Bayes tree (<http://www.dim.uchile.cl/~mkiwi/ma34a/libro/chapter4/Tree/Tree.html>) está pensado para enseñar esta tarea. Presenta un diagrama de árbol y unas casillas donde se pueden introducir las probabilidades a priori $P(A)$ y las probabilidades condicionales $P(C/A)$ y $P(C/B)$. Una vez introducidos los datos, se presiona el botón "go" y el programa calcula las probabilidades conjuntas $P(A \cap C)$, $P(A \cap D)$, etc. El applet también incluye el árbol inverso que permite calcular la probabilidad condicional inversa $P(A/C)$. Otro enlace donde se incluye applets para la construcción de diagramas de árbol es: <http://www.stat.sc.edu/~west/applets/tree.html>. Tras introducir los datos en una tabla de contingencia, el programa muestra el diagrama de árbol correspondiente y calcula las probabilidades conjuntas.

Figura 4. Diagrama de árbol representado en el applet



Recursos más avanzados

Para el caso de alumnos universitarios que quieren continuar con la inferencia bayesiana, una vez estudiado el teorema de Bayes podemos encontrar páginas que proporcionan tutoriales o artículos con nociones básicas sobre la inferencia bayesiana como en http://www.nebulasearch.com/encyclopedia/article/Bayesian_inference.html, <http://www.seh-lelha.org/bayes1.htm> o en las páginas personales de Jim Albert: <http://www-math.bgsu.edu/~albert/> o Bruno Lecoutre: <http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Persopage/Lecoutre/>. Las personas interesadas en la investigación sobre este tema o en sus aplicaciones prácticas pueden encontrar interesante la página de la International Society for Bayesian Analysis <http://www.bayesian.org/> con enlaces a revistas específicas como Bayesian Analysis (<http://ba.stat.cmu.edu/>) y otros recursos.

Conclusiones

En este artículo hemos descrito algunos ejemplos de las múltiples posibilidades que brinda Internet para la enseñanza de razonamiento bayesiano. Puesto que el número de personas y organizaciones interesadas por el tema es cada día mayor, la lista de lugares de la red que hemos presentado habrá quedado superada ampliamente cuando el artículo sea publicado. La disponibilidad de recursos libremente accesibles en Internet hace que la cultura y la ciencia se estén democratizando cada vez más, por lo que el aprendizaje se lleva a cabo no sólo en el aula tradicional. El uso de este tipo de recursos aumenta la motivación de los alumnos por el tema, ya que se presentan los conceptos de una forma más llamativa y permite al alumno adoptar un papel activo en su aprendizaje. Es por ello importante que el profesor tenga en cuenta estos recursos y los incorpore a su enseñanza.

Sin embargo, un recurso didáctico por sí sólo no resuelve todos los problemas. Se plantea, así el reto de diseñar unidades didácticas para la enseñanza del razonamiento bayesiano, que incorpore estos recursos.

Nota: El trabajo es parte de los Proyecto BSO2002-03347, SEJ2004-00789 y Beca FPU: AP2003-5130.

Referencias

- Falk, R. (1986). Conditional Probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292 – 297). University of Victoria.
- Galmacci, G. (2001). The impact of Internet on the researchers' training. En C.

- Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp. 159-169). Granada: International Statistical Institute.
- Gras, R. y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.
- Ojeda, A. M. (1995). Dificultades del alumnado respecto a la probabilidad condicional. *UNO*, 5, 37-55.
- Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implications*. Mahwah, NJ: Erlbaum.
- Tversky, A, y Kahneman, D. (1982). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* pp. 153-160).. New York: Cambridge University Press.

ECUACIONES, BALANZAS Y APLICACIONES JAVA.

Manuel García Piqueras

0. Introducción

Ya desde tiempos de Al-Khowarizmi, se trabaja en la resolución de ecuaciones, estableciendo como analogía una balanza. Nuestro objetivo no radica en revelar este hecho, sobradamente conocido, sino en mostrar nuevas formas de enseñarlo a nuestros alumnos.

Encuadrada la presente propuesta en el Primer Ciclo de la ESO, dividimos el proceso de enseñanza-aprendizaje, en varias fases.

1. Primera fase: Reglas Básicas

Se trata de guiar al alumno, para que el mismo vaya descubriendo, las archiconocidas reglas de resolución de ecuaciones(“lo que está sumando pasa al otro lado restando”, etc.). Para ello haremos uso de una balanza de brazos real.

A continuación reproducimos, parte de la experiencia, en las siguientes fotografías: nuestro objetivo es conocer, ¿a cuántas piezas azules equivale una pieza amarilla?



Observamos que, eliminar una pieza en el primer platillo, debe traducirse inmediatamente en la eliminación de otra pieza igual en el segundo platillo, si deseamos que el equilibrio se mantenga. Obtenemos que, una pieza amarilla equivale a dos azules.

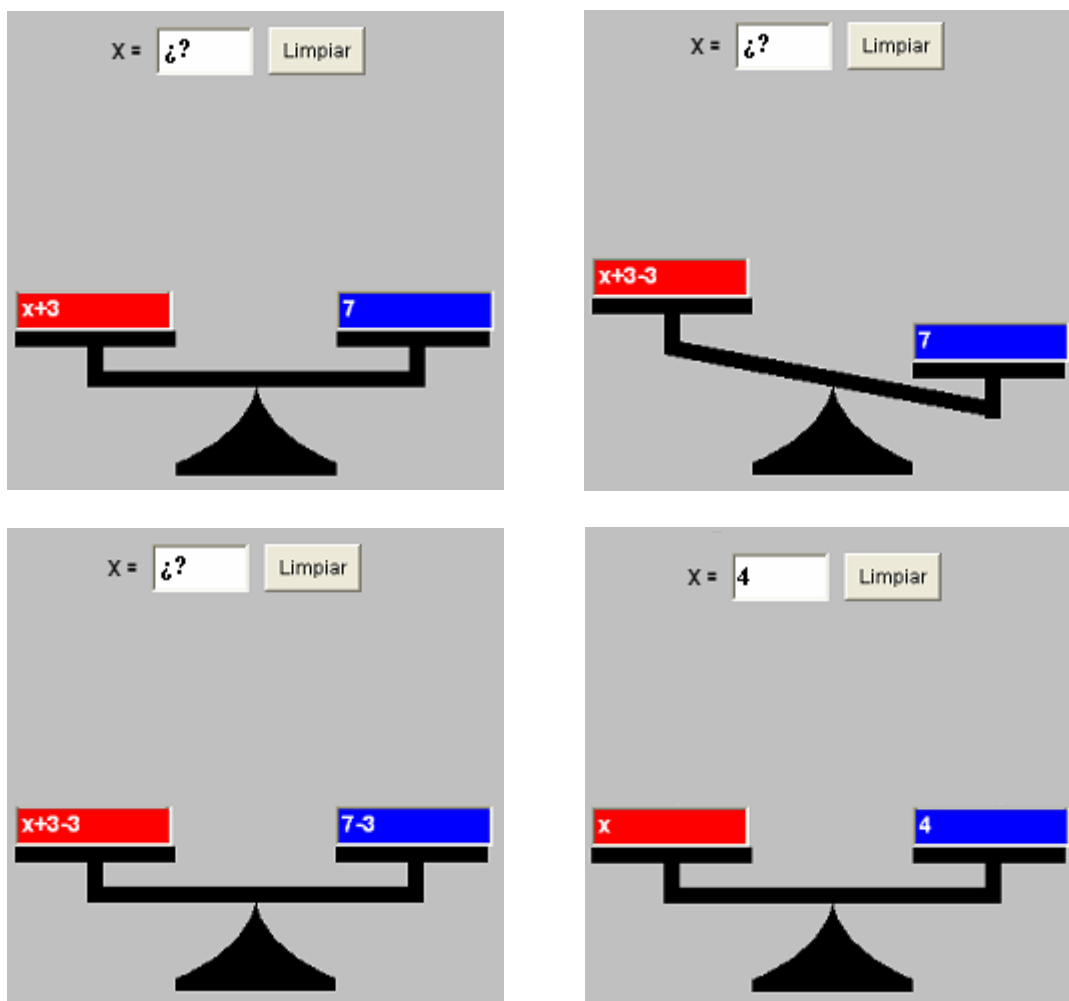
Una vez, que ya nos manejamos correctamente con la balanza, introducimos un primer nivel de abstracción.

2. Segunda fase: Adquisición de destrezas

Nuestro objetivo ahora, consiste en ir adquiriendo “soltura”, a la hora de aplicar las reglas anteriormente deducidas.

Además, procederemos a hacer uso ya, del lenguaje algebraico propiamente dicho. Así el peso desconocido de una pieza, convenimos “entre tú y yo”, en llamarlo “x”, con el consiguiente ahorro de tiempo, a la hora de comunicarnos.

De todas maneras, esto se traduce en un “salto” importante para el alumno, por lo que, no sería recomendable, abandonar el medio físico todavía. Para solventar esta dificultad en el proceso de enseñanza-aprendizaje, proveemos al mismo de la herramienta “BalanzaGP”, consistente en una aplicación-java animada, cuyo funcionamiento describimos a continuación.



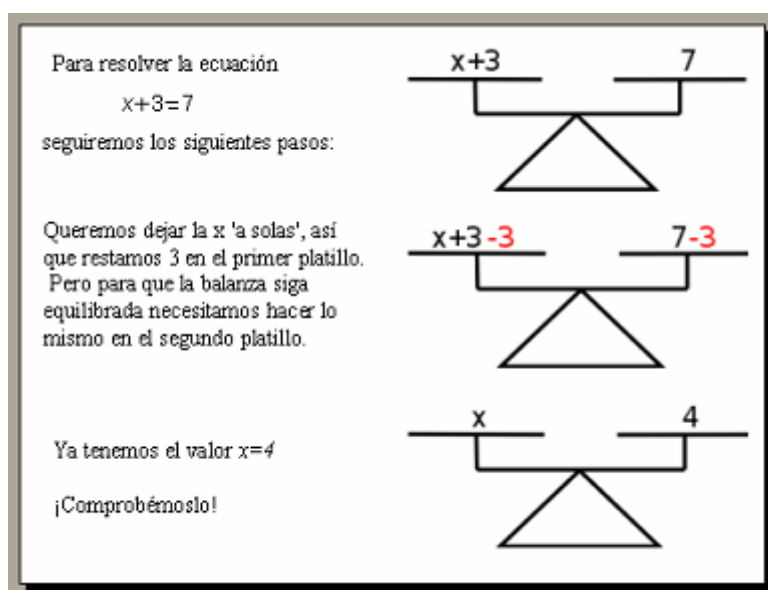
Nota: el código de la aplicación “BalanzaGP”, es propiedad del autor de la comunicación, aunque éste entregará el mismo bajo licencia LGPL(libre) a cualquier

asistente que esté interesado. Dicho código, irá acompañado de diagramas UML, que ayuden a una mejor comprensión, de la arquitectura y funcionalidad de la aplicación.

3. Tercera fase: Caminando solos

Ahora nos toca afianzarlo todo, y procedemos a repartir fichas donde aparecen ecuaciones para resolver, haremos hincapié en que se explique adecuadamente cada paso realizado, pudiendo hacer el alumno uso de dibujos y esquemas.

Para corregir las ecuaciones planteadas, haremos uso de transparencias, en las cuáles, reproducimos la resolución de la ecuación mediante “fotogramas de balanzas”, como el siguiente:



4. Bibliografía y recursos.

Ideas y actividades para enseñar álgebra. Grupo Azarquiel.

Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas. Ana García Azcárate.

Java 2. La Biblia. Steven Holzner.

UML para programadores Java. Rober C. Martin.

5. Conclusión

Mediante este proceso, intentamos colaborar modestamente, en la erradicación de errores, que a nuestro juicio se plantean una y otra vez en el aprendizaje de las matemáticas, como son los siguientes:

a) Las matemáticas no son, un conjunto de reglas a memorizar por los alumnos, el aprendizaje consiste en DESCUBRIR dichas reglas, apoyándose en el propio RAZONAMIENTO.

b) INTERPRETAR el significado de los símbolos matemáticos, según el CONTEXTO. Así en una ecuación, el signo “=” debería ser interpretado como un SÍMBOLO de EQUILIBRIO, y no como un operador de asignación, que puede ser utilizado, uno detrás del otro, tantas veces como deseemos.

¿CÓMO SE LLAMA ESTE ARTÍCULO?

María del Rosario Muñoz Marín¹, Blas C. Ruiz Jiménez², Manuel Ruiz Muñoz³

Resumen

Presentamos un modelo sencillo y elegante para resolver puzzles lógicos del estilo de los analizados por el lógico norteamericano Raymond Smullyan en su célebre libro *¿Cómo se llama este libro?* Mostramos cómo nuestro modelo motiva conjuntamente la enseñanza de la lógica y la programación funcional.

Palabras clave Matemática Recreativa, Puzzles Lógicos, Programación Funcional.

0 Introducción

El presente trabajo debe encuadrarse en la *Matemática Recreativa*, disciplina que incluye puzzles lógicos, acertijos y problemas de ingenio⁴. Matemáticos con aportaciones importantes en esta disciplina son: Martin Gardner (1914-), Douglas Hofstadter (1945-), John Conway (1937-), Charles Dodgson (Lewis Carroll) (1832-1898) y Raymond Smullyan (1919-).

Tradicionalmente la Matemática Recreativa ha sido utilizada con éxito para motivar la enseñanza de la lógica, la aritmética y la geometría elementales⁵; el presente trabajo muestra que un lenguaje funcional moderno como Haskell es un instrumento auxiliar idóneo muy interesante para abordar esta tarea. Así, el principal objetivo del presente trabajo es motivar los principios de la Lógica y de la Programación Funcional vía ejemplos lúdicos.

A tal fin hemos elegido varios puzzles lógicos extraídos del maravilloso libro de Raymond Smullyan [1]. Esto no es una novedad: El propio autor afirma en el prólogo que escribió su libro para motivar el estudio de la lógica. Así, pretendemos ilustrar las características esenciales del lenguaje funcional Haskell (tipificación fuerte, definiciones con patrones, estructuras de datos) y justificar conjuntamente las construcciones esenciales de la lógica y la programación funcional (operadores lógicos, composición de funciones, listas por comprensión). Seguimos además un principio didáctico esencial: Elección de problemas introductorios (puzzles) elementales, no triviales y resolubles usando como instrumentos la lógica y programación básicos.

Clasificación de Puzzles Lógicos Suelen clasificarse en dos grupos: (1) Con frases dependientes (cada frase depende de la anterior) expresadas por oradores *infinitamente*

¹ Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Málaga. chamuma@ctima.uma.es

² Dpto. de Lenguajes y Ciencias de la Computación. Universidad de Málaga. blas@lcc.uma.es

³ Instituto de ESO Itaca. Villamayor de Santiago (Cuenca). manuel@uma.es

⁴ Es interesante el *Journal of Recreational Mathematics*. <http://www.ashbacher.com/jrecremath.stm>

⁵ Algunas universidades incorporan esta disciplina como asignatura. <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/matrecreativa/>

inteligentes y sinceros; ejemplos de éstos son los puzzles con Sombreros o Números en la Frente (J Conway, M Gardner) [3] y el Problema P-S (H Freudenthal, J McCarthy) [2]. En estos puzzles el problema esencial es modelar el comportamiento inteligente. En el grupo (2) las frases son independientes pero posiblemente falsas dependiendo del orador, del día de la semana, etc.: Problemas de “Alicia en el bosque del olvido”, la colección de Smullyan [1] (El enigma de Drácula, Los Cofres de Porcia). La dificultad esencial de éstos es modelar cada frase junto a su interpretación. En este artículo trataremos problemas del segundo grupo. El lector puede encontrar ejemplos del primer grupo resueltos en Haskell en [2].

1 Alicia en el Bosque del Olvido

Alicia, al entrar en el bosque, olvida entre otras cosas el día de la semana. En el bosque viven dos curiosos personajes, que por ser gemelos son indistinguibles: Leo, que miente los Lunes, Martes y Miércoles, y Uni, que miente los Jueves, Viernes y Sábados (Leo y Uni son los personajes Tweedledum y Tweedledee del original de Smullyan). Resolveremos en este artículo los problemas que siguen, con la numeración del original [1] y redactados con ligeras modificaciones:

Problema 51 Alicia escucha la siguiente conversación entre estos personajes:

A.— Yo soy Leo.

B.— Yo soy Uni.

¿Quiénes eran cada uno?

Problema 62 El Rey encuentra el sonajero que rompieron los gemelos y Alicia debe entregárselo a su propietario. Tras adentrarse en el bosque se encuentra con los gemelos:

Alicia (dirigiéndose a A). — ¿Es tuyo este sonajero?

A.— Sí.

Alicia, tras un momento pensativa, dirigiéndose a B.— ¿Es tuyo este sonajero?

B, susurrándole al oído. — ...

No se escuchó la respuesta, aunque fue, o bien Sí, o bien No. Después de escuchar la respuesta, Alicia adivinó su propietario. ¿A quién dio el sonajero?

Problema 65 El Rey le contó a Alicia que los gemelos podían tener un hermano (Duendi) idéntico a ellos, aunque siempre miente. Alicia escucha durante un día laborable:

A. — Duendi existe.

B. — Y yo también.

¿Existe realmente Duendi?

2 El Bosque en Haskell

Presentemos un modelo en Haskell para la descripción de diálogos. Por problemas de espacio no podemos en este artículo dar una visión ni siquiera corta de este lenguaje funcional y nos centraremos en detalles esenciales. Recomendamos para ello *Una introducción agradable a Haskell*⁶ y el texto [2]. Partimos pues de las siguientes declaraciones para representar el universo del discurso:

⁶ <http://www.lcc.uma.es/~blas/pfHaskell/gentle/>

```
data Día = L | M | X | J | V | S | D deriving (Eq,Show,Enum)
data Habitante = Leo | Uni | Duendi deriving (Eq,Show,Enum)
```

Una frase del diálogo será una función booleana con tipo:

```
type Frase u = u → Bool
```

donde u representa cada posibilidad del problema, que dependerá del universo del discurso. Por ejemplo, en el problema 51 cada frase será del tipo *Frase* (*Habitante*, *Habitante*, *Día*), y asignará un booleano a cada terna (a,b,d) , donde a representa el primer personaje, b el segundo, y d el día de la semana. Además, una frase debe ser interpretada dependiendo de un par del tipo (*Habitante*, *Día*): La interpretación es función de la persona que enuncia la frase y del día de la semana. La interpretación la haremos con la función:

```
interpreta :: Frase a → (Habitante,Día) → Frase a
```

Así, si p dice la frase f el día de la semana d , entonces la expresión $interpreta\ f\ (p,d)$ es la “afirmación verdadera” que hace p . Para nuestros personajes tendremos

```
interpreta f (Leo,d)      = if d `elem` [L,M,X] then not . f else f
interpreta f (Uni,d)      = if d `elem` [J,V,S] then not . f else f
interpreta f (Duendi,d)   = not . f -- Duendi siempre miente
```

donde $x\ `elem`\ xs$ es el test de pertenencia y $f\ .\ g$ representa la composición de funciones. El problema 51 queda resuelto vía listas (o conjuntos) por comprensión:

```
sol51 = [ (a,b,d) | (a,b) ∈ [(Leo,Uni),(Uni,Leo)],
                d ∈ [L..D],
                interpreta f (a,d) (a,b,d),
                interpreta g (b,d) (a,b,d) ]
where
    f (a,b,d) = a==Leo -- A.- Yo soy Leo.
    g (a,b,d) = b==Uni -- B.- Yo soy Uni.
```

La función *sol51* devuelve en forma de lista un conjunto de ternas con tipo (*Habitante*, *Habitante*, *Día*). La terna (a,b,d) será un elemento de ésta si el par (a,b) es o bien (Uni,Leo) o bien (Leo,Uni) , d es un día de la semana, y además, son ciertos los valores de cada frase una vez interpretadas. Debido a la asociatividad a la izquierda de la aplicación, la expresión $interpreta\ f\ (a,d)\ (a,b,d)$ debe leerse: El valor que toma el predicado $interpreta\ f\ (a,d)$ para la terna (a,b,d) . Por todo ello, nuestro programa “computa todas las combinaciones de personajes cuyas afirmaciones son ciertas”. Resaltemos la forma tan simple de describir las frases: La frase de A “Yo soy Leo” se representa vía el predicado $a==Leo$, siendo $==$ el operador de igualdad. La ejecución produce el siguiente diálogo:

```
ElBosqueDelOlvido > sol51
[(Leo,Uni,D)]
```

La lista solución obtenida tiene una sola posibilidad, y esto ¡es una demostración! de que el diálogo solamente puede ocurrir si A es Leo, B es Uni, y el día es Domingo.

Veamos ahora cómo resolver el problema 62. Para ello necesitamos añadir al universo del discurso como nuevo dato el propietario del sonajero:

```
sol62 res = [ cf |  a ∈ [Leo,Uni], b ∈ [Leo,Uni], a≠b,
                  prop ∈ [Leo,Uni], d ∈ [L .. D],
                  let cf=(a,b,prop,d),
                  interpreta f (a,d) cf,
                  interpreta g (b,d) cf ]
where
  f (a,b,prop,d)  = prop == a -- A.-El sonajero es mío.
  g (a,b,prop,d)  = prop == if res then b else a
```

Recordemos que no se escuchó la respuesta, pero fue Cierto o Falso y con ésta Alicia dedujo su propietario. Por ello *sol62* depende de esta respuesta *res*, y obviamente también el predicado *g* de la segunda frase. Si ejecutamos el programa obtenemos:

```
ElBosqueDelOlvido> sol62 True
[(Leo,Uni,Leo,J),...,(Leo,Uni,Uni,L),...,(Uni,Leo,Uni,X)]
```

Vemos que la respuesta Sí (*True*) existen casos donde el propietario (3ª componente) es el primer orador o el segundo. Luego, ya que Alicia adivinó su propietario, la respuesta no pudo ser Sí. Por otro lado:

```
ElBosqueDelOlvido> sol62 False
[(Leo,Uni,Leo,D),(Uni,Leo,Uni,D)]
```

y observamos que la primera y la tercera componentes son iguales. Luego la respuesta fue No y el propietario del sonajero es el primer personaje. Curiosamente, al igual que Alicia, no sabremos si el propietario es Leo o Uni, pero sí que es Domingo.

Veamos ahora el problema 65. Como observa Smullyan, la segunda afirmación siempre es verdadera (à la Descartes: ¡Hablo, luego existo!). Como B es sincero, y Duendi siempre miente, B no puede ser Duendi. Ya que el día es laborable (no es Domingo), A no puede ser Duendi. Luego Duendi no interviene, ambas afirmaciones la hacen Uni y Leo, y solamente pueden ser ciertas el Domingo. Y ya que no es Domingo, la primera afirmación es falsa y Duendi no existe. ¿Podemos llegar a esta conclusión a través de un programa en Haskell? Veamos cómo. La traducción de la segunda frase es trivial y la principal dificultad es programar la frase “Duendi existe”. Para ello introducimos en el universo del discurso un nuevo valor booleano que capture la existencia de Duendi:

```
data EstadoDuendi = Existe | NoExiste deriving (Eq,Show)
sol65= [ cf |  (a,b) ∈ [Leo .. Duendi] `x` [Leo .. Duendi], a≠b,
              d ∈ [L .. S], -- el día es laborable
              duendi ∈ [Existe,NoExiste],
              let cf=(a,b,duendi,d),
              interpreta f (a,d) cf,
```

```

                                interpreta g (b,d) cf]
where
  f (a,b,duendi,d) = duendi==Existe -- A.- Duendi existe.
  g (a,b,duendi,d) = True -- B.- Y yo también.

```

Si ejecutamos el programa obtenemos:

```

ElBosqueDelOlvido > sol65
[(Leo,Uni,NoExiste,L),(Leo,Uni,NoExiste,M), ..., (Duendi,Uni,NoExiste,X)]

```

¡y vemos que la 3ª componente siempre es NoExiste!

Para finalizar debemos añadir que el modelo aquí expuesto es suficientemente general y ha sido utilizado para resolver la colección de problemas de [1]. El lector interesado puede solicitar a alguno de los autores los programas Haskell.

Referencias

[1] Raymond Smullyan. *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos*. Cátedra (1984).

[2] Blas Ruiz et al. *Razonando con Haskell. Un curso sobre Programación Funcional*. Thomson (2004).

[3] Martin Gardner. *Inspiración ¡Ajá!* Labor (1981).

SOFTWARE LIBRE Y ENSEÑANZA. GESTIÓN DE RECURSOS CON HERRAMIENTAS DE ELABORACIÓN DE CURSOS ONLINE PARA DESARROLLAR ACTIVIDADES CON ALUMNOS EN EL AULA DE INFORMÁTICA. MOODLE: UNA EXPERIENCIA.

Encarnación Prieto Herrera

Juan Antonio Trevejo Alonso

Departamento de Matemáticas
IES de Villaviciosa (Asturias).

Fundamentación teórica

El uso de las TIC's⁷ se está, poco a poco, consolidando como recurso didáctico en nuestras aulas. Si bien es cierto que la utilización de estos recursos depende en mayor medida de la propia infraestructura social en equipos informáticos, software y conexiones a la red Internet, es manifiesto el avance que en este sentido se está haciendo por parte de la administraciones educativas, y así garantizar el acceso a ellos por parte de la mayoría de nuestros alumnos.

Elaborar actividades por parte de los profesores, bien propias, bien aprovechando recursos ajenos (CD multimedia, páginas web, herramientas de comunicación,...) ha sido el camino que desde hace años se está recorriendo por multitud de profesionales dedicados a la enseñanza y a la integración de las TIC's en su práctica docente.

Situar estas actividades dentro del propio desarrollo de la programación didáctica de la materia implicada era y es el gran reto. Las dificultades son muchas, decidir qué tipo de actividad se desarrolla, los recursos que se emplean, la orientación en el uso de esos recursos, la valoración del trabajo desarrollado por los alumnos, y la propia calificación y evaluación de ese trabajo es dedicación individual por parte del profesor que experimenta con mayor o menor éxito, tomando decisiones que determinarán el modelo pedagógico que necesita el grupo de alumnos la eficacia de su aprendizaje sea óptima.

Favorecer la construcción del aprendizaje de los alumnos respetando su propio ritmo y aptitudes individuales, posibilitando incluso aproximaciones al desarrollo de modelos pedagógicos colaborativos, orientar adecuadamente el uso de los recursos disponibles, y facilitar la calificación y evaluación del proceso debía ser cuestión de tiempo, y dependería de la aparición de herramientas informáticas gestoras de información sencillas de usar y administrar..

Moodle es una herramienta informática libre, gratuita para todo aquél que la quiera usar, y posibilita desarrollar con garantías estas nuevas perspectivas de aprendizaje colaborativo. La adaptación de los roles que deben desempeñar alumnos y profesor es el nuevo reto, y las potencialidades del uso de este tipo de recursos por descubrir. El alumno entra en un marco de referencia donde su papel se hace más participativo,

⁷ Tecnologías de la Información y la Comunicación

menos pasivo, contribuye a la construcción del conocimiento colectivo en cierta medida, y participa de la evaluación del proceso. El profesor, por su parte, deja de ser la referencia instructiva, y se convierte en un orientador, abierto al mundo de la evolución del aprendizaje de sus alumno, y necesario de aportar la solución a las necesidades que surjan en el grupo, sin que ello signifique dirigir de forma unidireccional la enseñanza.

Experiencia desarrollada

En nuestro centro se viene trabajando en este sentido, integración de las TIC's en la educación, desde hace varios años. Nuestra situación es relativamente benévola, disponemos de recursos suficientes (aulas de informática para ser utilizadas con cierta disponibilidad de horarios), tenemos acceso a internet por banda ancha, y conocemos suficientemente los recursos existentes, y que pueden ser aprovechables para enmarcar actividades con nuestros alumnos en el aula de informática dentro del desarrollo de nuestras programaciones didácticas.

Moodle es una herramienta de elaboración de cursos online, y estarán disponibles en Internet, pero nuestros alumnos no disponen en su gran mayoría de equipos informáticos ni de conexiones a la red, para permitirnos enfocar el uso de Moodle como repositorio de recursos y tareas, en periodos no lectivos, de forma generalizada.

Moodle, sin embargo, nos permite desarrollar actividades en periodo lectivo con nuestros alumnos en las aulas de informática porque:

Facilita la orientación y el recorrido por diferentes recursos y tareas por parte de cada alumno.

Permite desarrollar orientaciones metodológicas diferentes, favoreciendo la construcción colaborativa del conocimiento de los alumnos.

Permite evaluar el trabajo de los alumnos de forma rápida y precisa.

Facilita la valoración y evaluación del trabajo desarrollado por parte de todos los componentes del grupo o grupos que participan del trabajo, de forma conjunta alumnos y profesor.

Metodología

El desarrollo de las diferentes partes de las programaciones didácticas de los grupos de alumnos en los que se está realizando esta experimentación, implica, por tanto, conjugar dos espacios, el aula tradicional y el aula de informática. La gestión de los tiempos debe ser, por tanto, decidida y está condicionada a esta realidad.

Pero, aprovechando el tiempo de trabajo en el aula de informática se potenciarán modelos pedagógicos diferentes a los cotidianamente presentes. En este sentido se intentará:

Potenciar el trabajo colaborativo, desde Moodle y recuperando la idea en el espacio de aula tradicional.

Respetar los distintos ritmos de aprendizaje de nuestros alumnos.

Valorar el efecto que tiene en el aprendizaje de los alumnos a través la enseñanza asistida por ordenador.

Constatar el cambio de papel que deberán desempeñar alumnos y profesor ante esta nueva situación académica.

Evaluación

Sin duda, lo más significativo de esta experiencia será su evaluación y el grado de inmersión y eficacia educativa que haya tenido.

En estos momentos estamos empezando a experimentar con esta herramienta en dos cursos diferentes, en las materias de

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales, de 1 de Bachillerato
Matemáticas de 1º de ESO.

En Bachillerato la experimentación está más avanzada y sirve de referencia para conocer qué se puede explotar de una herramienta como Moodle con más eficacia, y qué se debe pensar con más detenimiento a la hora de reflexionar sobre todo el conjunto de factores que estamos incluyendo en esta experimentación.

Las propuestas, recursos, tareas y herramientas están definidas, pero falta la finalización de la propia experiencia, y la valoración y evaluación finales, que estarán disponibles a principios de junio.

De todas formas, podemos adelantar que en esta evaluación de la experiencia, extraeremos información muy importante sobre los siguientes aspectos:

Grado de dominio y comprensión de la herramienta Moodle y recursos utilizados, según el nivel educativo en el que se experimentó.

Eficacia del uso de cuestionarios interactivos para dominar nuevos términos y conceptos matemáticos.

Valoración sobre el aprendizaje del alumno en un entorno que respeta su propio ritmo y sus capacidades.

Desarrollo de diferentes propuestas metodológicas y posibles interacciones entre los distintos espacios de aula en los que se define el tiempo de la experimentación.

Participación y actitud de los alumnos frente a este nuevo enfoque de las matemáticas.

Rendimiento de las herramientas de comunicación presentes en Moodle.

Observación sobre los diferentes grados de colaboración establecida entre los alumnos durante este periodo.

Implicación de los alumnos y profesor en el proceso evaluador.

Y sin duda, alguno más.

Referencias bibliográficas

Son muchas, pero fundamentalmente del mundo de Internet, del mundo del aprendizaje colaborativo, y del software libre educativo. Por citar algunas de las muchas que han justificado la intención de este tipo de experiencias:

<http://moodle.org/>
<http://www.redescolar.com>
<http://www.eaprender.org/eaprendizaje/juegosyentornosvirtuales>
http://www.cnice.mecd.es/cinternet-educacion/2-congreso_actas/documentos/experiencias/pdf/foro1/pedro_roman_groupware.pdf
<http://www.euro-cscl.org/>
<http://www.euro-cscl.org/>
<http://www.euro-cscl.org/site/itcole>
http://giac.upc.es/giac_repositorio_contribuciones.htm
http://www.cibersociedad.net/congres2004/index_es.html
<http://www.edutec.es/pages/publi.htm>
<http://www.linuxjournal.com/article/7817>

COMANDOS DE TUTORÍA EN LOS SISTEMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO

Lorenzo Javier Martín García
*Dpto. Matemática Aplicada a las
 Tecnologías de la Información.
 E.T.S.de Ingenieros de Telecomunicación.
 Universidad Politécnica de Madrid.
 e-mail: lmg@mat.upm.es*

Juan Antonio Velasco Mate
*I.E.S. "Angel del Alcázar". Segovia.
 E.I.T. de Informática.
 Universidad de Valladolid.
 e-mail: jvelas8@mimosa.pntic.mec.es*

Introducción

Entre otras habilidades, el estudiante de Matemáticas en general y de Bachillerato en particular debe ser capaz de realizar manual y eficientemente cálculos de cierta envergadura con entidades matemáticas. Así como la existencia de calculadoras no exime a nadie de adquirir la habilidad de sumar o dividir, la existencia de potentes lenguajes de programación tampoco exime de saber calcular con lápiz y papel la inversa de una matriz o cierto tipo de integrales. Más aún, muchas veces, el conocimiento de la mecánica de cálculo permite entender el comportamiento de los objetos y facilita la comprensión de propiedades más genéricas y abstractas.

Por otra parte, es frecuente que cuando un profesor decide incorporar a su actividad docente cotidiana algún medio informático, descubra que éste no cubre todas sus necesidades, viéndose obligado a realizar labores adicionales -que podríamos denominar programación en un sentido más o menos amplio- para obtener material operativo acorde con sus deseos.

Por ejemplo, que un sistema de cálculo simbólico calcule rápidamente la integral⁸

$$\int x \sin(x)^2 dx = x \cos(x) - \frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) + \frac{1}{2} x \sin(x) + \frac{1}{4} \sin(x)^2 - \frac{1}{4} x^2 + C$$

no proporciona ninguna utilidad didáctica salvo la posibilidad de que el alumno compruebe que este resultado coincide con el obtenido por él mismo al aplicar el proceso de integración por partes en este caso concreto. Si el cálculo realizado es correcto, el programa sirve como verificación. Ahora bien, si el alumno se ha equivocado, no se aporta ninguna pista sobre dónde puede encontrarse el error. Sería mucho más útil que, además del resultado final, se proporcionara el proceso seguido hasta alcanzarlo o que el programa pudiera corregir el desarrollo del alumno.

Al disponer de una potente herramienta para calcular integrales, el profesor interesado en su utilización en tareas que van más allá del simple cálculo, podría embarcarse en la confección de un programa adicional que reflejase los pasos seguidos. Esta empresa podría calificarse como complicada y sin garantía de éxito en alcanzar las expectativas iniciales del abnegado profesor.

⁸ Sintaxis seguida por el sistema de cálculo simbólico Maple

Son muchos los ejemplos de esta índole que pueden enumerarse ya que además de la potencia de cálculo, los sistemas de cálculo simbólico también permiten realizar representaciones gráficas que, incluso, pueden animarse. La obtención del desarrollo en serie de Taylor de una función alrededor de un punto puede ser doblemente interesante si se complementa con una imagen que represente conjuntamente la función original y la aproximación hallada. Como en el caso anterior, tal vez algún profesor aventajado piense en diseñar un pequeño programa de fácil uso y que visualice cómo y dónde los polinomios de Taylor se aproximan a una determinada función real diferenciable con continuidad cuantas veces sea necesario.

Comandos de tutoría en Maple

La versión 9.5 del sistema de cálculo simbólico Maple incorpora algunos comandos de uso muy intuitivo que no solamente realizan los cálculos demandados sino que también describen detalladamente el proceso seguido para la obtención del resultado final, presentándose, así, muy atractivos para su utilización como herramienta de apoyo docente. Los programas de tutoría disponibles abarcan desde la composición de funciones hasta la representación de volúmenes de revolución pasando por el cálculo de la inversa de una matriz. A continuación, describimos alguno de ellos.

IntTutor

La invocación del comando *IntTutor* que se encuentra en la sublibrería *Calculus1* del package *Student* proporciona una ventana interactiva en la que basta introducir -con la sintaxis de Maple- una función real y la variable respecto a la cual se quiere integrar. También se pueden especificar los límites de integración si, en lugar de buscar una primitiva, se desea calcular la integral definida.

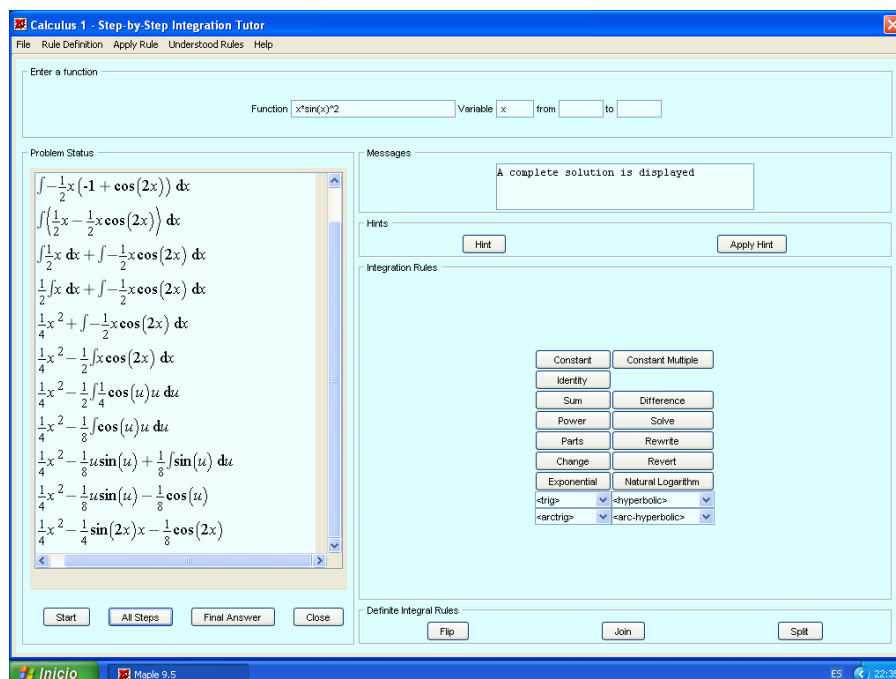


Figura 1 Cálculo completo de la primitiva de una función real

A partir de este momento, se puede empezar el cálculo de la integral eligiendo con el ratón una de las transformaciones/reglas que aparecen en los botones centrales de la parte derecha de la ventana (primitivas inmediatas, partes, cambios de variable, etc.). Si no se sabe cómo abordar el problema, es posible obtener una sugerencia pulsando el botón *Hint*. De esta manera, paso a paso, se simula el cálculo de una primitiva con lápiz y papel pero teniendo la certeza de que no se comenten errores en las operaciones y permitiendo que el usuario se centre más en el procedimiento que en la operativa.

Si se quiere conocer directamente el resultado final junto con todos los pasos dados, hay que elegir el botón *All Steps* situado en la parte inferior izquierda de la ventana. En la parte izquierda de la Figura 1 se muestra el proceso seguido para calcular una primitiva de la función $f(x) = x \sin^2 x$ y puede observarse que no hay mucha diferencia con la respuesta detallada que se hubiera dado, por ejemplo, en un examen escrito tradicional.

IntTutor no calcula la primitiva de cualquier función pero, como hay funciones que no tienen primitiva elemental, no tiene ningún reparo en ‘confesar’ que no es capaz de aplicar ninguna regla cuando se presenta el caso.

Además, todas las utilidades de la aplicación están suficientemente documentadas, pudiéndose acceder a esta información mediante los menús desplegables de la barra de menús.

ApproximateIntTutor

La integral definida de una función continua en un intervalo cerrado siempre existe, pero no siempre puede aplicarse la regla de Barrow para calcularla.

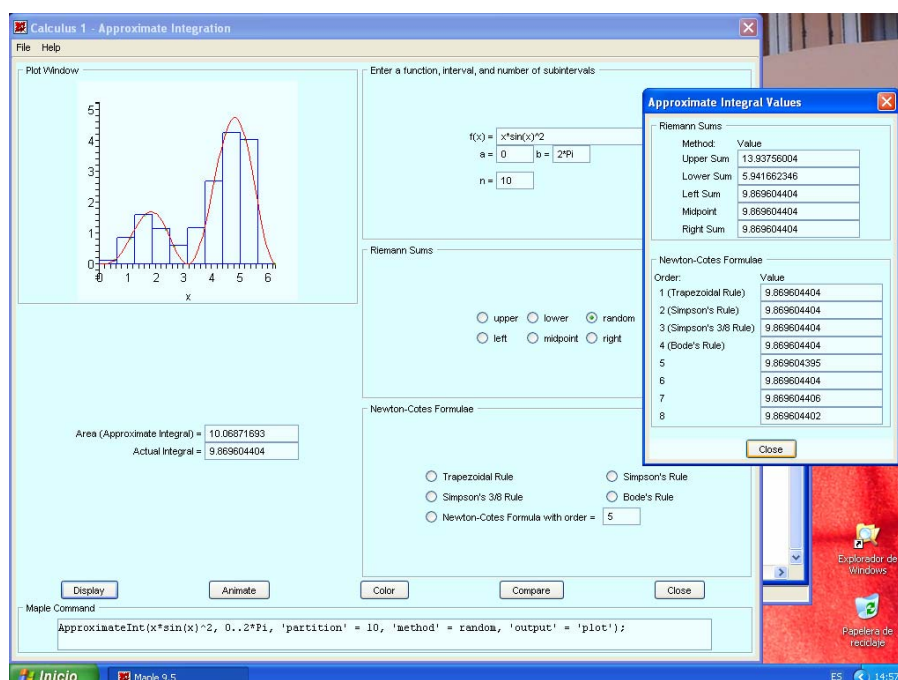


Figura 2 El tutor de cálculo integral aproximado

En muchos casos hay que recurrir a métodos de aproximación numérica para obtener el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje de abscisas.

El tutor de aproximación de integrales de Maple incorpora la representación gráfica a las utilidades de cálculo. Puede accederse a este tutor mediante el comando combinado *Student[Calculus1][ApproximateIntTutor]()* y también buscando *Riemann' Sums* en los grupos de la opción *Tutors* que aparece al desplegar el menú *Tools* de la barra de menús del entorno Maple.

En la ventana invocada por este comando, véase la Figura 2, aparece una representación de la gráfica de la función elegida en el intervalo especificado junto con los rectángulos asociados a la Suma de Riemann seleccionada (superior, derecha, aleatoria, etc.).

Mediante el botón *Animate*, se puede contemplar una animación del comportamiento de las Sumas de Riemann a medida que aumenta el número de subintervalos. Otra utilidad interesante accesible desde esta ventana es la tabla comparativa, más pequeña, que aparece en la parte derecha de la Figura 2. Surge al apretar el botón *Compare* y representa las aproximaciones al valor de la integral obtenidas con las diferentes sumas de Riemann y con los métodos numéricos de Newton-Cotes. Con estos datos, es fácil hacerse una idea del significado y fiabilidad de estas estrategias y establecer diferencias entre los métodos numéricos y los métodos exactos de cálculo.

TaylorApproximationTutor

El tutor sobre la aproximación a una función dada mediante polinomios de Taylor, despliega un entorno de fácil manejo que sólo necesita especificar la función, el punto alrededor del cual se desarrolla y el orden de aproximación requerido, véase la Figura 3.

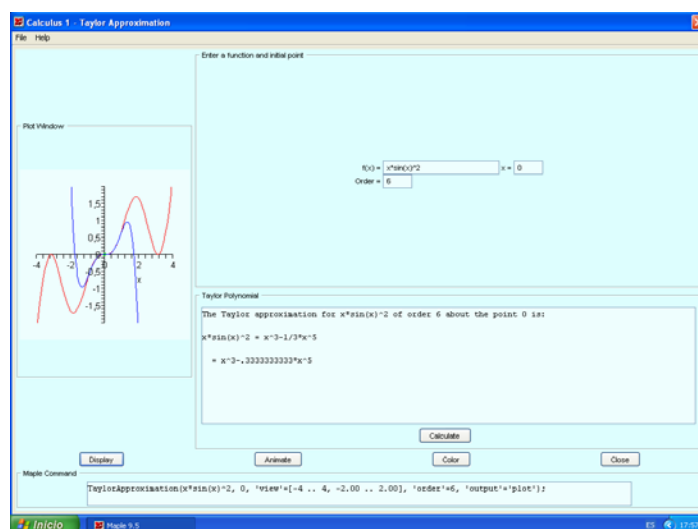


Figura 3 Representación de la aproximación por polinomios de Taylor

En la parte izquierda de la ventana aparece una imagen susceptible de ser animada donde se representan las gráficas de la función escogida y las de los polinomios de órdenes sucesivos

En la parte central se proporciona el polinomio del orden especificado con coeficientes exactos y con coeficientes numéricos aproximados. Sería interesante que también se calculase, en función del orden y de la longitud del intervalo, una acotación del error de la aproximación. No hay que descartar que esta utilidad ya se encuentre incorporada en próximas versiones.

Conclusiones

Algunos sistemas de cálculo simbólico, Maple en particular, incorporan herramientas de fácil manejo que pueden emplearse como tutorías interactivas para aprender estrategias y para visualizar el significado de ciertas entidades matemáticas. También aportan los elementos de programación necesarios para que el usuario pueda diseñar e implementar sus propios comandos de tutoría. Es de esperar que, gracias a la facilidad de transmitir y compartir información, en poco tiempo exista una completa batería de este tipo de comandos. Así, no sería tan necesaria la dedicación individual para disponer de software educativo adaptado a las necesidades propias del docente.

Aprovechando que su uso no requiere más que teclear una expresión y elegir entre una serie de opciones, el profesor puede emplear estos comandos de tutoría para ilustrar -sin ningún esfuerzo adicional- conceptos teóricos de difícil representación en una pizarra. Además puede motivar a los alumnos proponiéndoles la experimentación con ejemplos seleccionados que muestren ciertos comportamientos significativos.

Estos programas pueden enseñar a los alumnos cómo desarrollar estrategias operativas concretas, como el cálculo de primitivas o el método de eliminación de Gauss.

Aunque en labores de tutor más que de comunicador, la presencia del profesor tradicional seguirá siendo necesaria para obtener el máximo beneficio de estas herramientas. Así, el profesor tendrá que elegir cuidadosamente los ejemplos a desarrollar, tener controlados los casos ‘patológicos’ que puedan presentarse y tener preparadas respuestas a las dudas que surgirán a los alumnos cuando se encuentren con situaciones que no esperan o que no se explican.

En definitiva, ahora que la potencia de cálculo de los SCS es incuestionable y está consolidada, es buen momento para aplicarla también a la elaboración de material que facilite el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles.

Bibliografía

MARTÍN, L.; VELASCO, J.A. (1999): “Los Sistemas de Computación Matemática como recurso didáctico de apoyo para la presentación del concepto de derivada”, en *IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, Lugo.

MARTÍN, L.; VELASCO, J.A (2000): “Sesiones prácticas de matemáticas con herramienta informática: Integración impropia”, en *VI Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática, Sociedad Castellano-Leonesa del Profesorado de Matemáticas*, Burgos.

MARTÍN, L.; VELASCO, J.A (2001): “Sumas de Riemann con Sistemas de Cálculo Simbólico”, *Suma*, nº 38, 47-52.

MARTÍN, L.; VELASCO, J.A (2002): “La demostración y los sistemas de cálculo simbólico”, *Suma*, nº 41, 11-18.

USO DEL GEOMETRICKS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA: TRIÁNGULO EQUILÁTERO Y FRACTALES

M^a Consuelo Cañadas, Sandra Gallardo, Edson Crisostomo, Manuel J. Martínez-Santaolalla, Marta Molina y María Peñas. (Los nombres de los coautores están ordenados alfabéticamente).⁹

GRUPO PI de Investigación en Educación Matemática
grupo_pi@yahoo.es

Resumen

La introducción de las nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la sociedad actual y en la Educación es hoy una realidad. En Educación se ha incorporado la tecnología multimedia como un elemento más del proceso de enseñanza-aprendizaje. En Matemáticas, existen numerosas aplicaciones informáticas diseñadas expresamente para favorecer el aprendizaje o la construcción de determinados conceptos. En este trabajo se presenta un software de geometría dinámica, el *Geometricks*, y se proponen unas actividades para su uso en el aula.

1. INTRODUCCIÓN

La utilización de las nuevas tecnologías es cada vez más frecuente en el mundo actual. El acceso de los ciudadanos a los medios tecnológicos se ha ampliado considerablemente, tornándose casi indispensable en la realización de las tareas cotidianas.

Estas necesidades que se están generando deben ser atendidas desde la Educación. Sin embargo, no todos los estudiantes de los niveles obligatorios tienen acceso a una educación en la que los medios informáticos estén presentes. Por una parte, algunos centros educativos carecen aún de los recursos necesarios para atender las necesidades actuales en este sentido. Por otra parte, otros centros que sí tienen los medios necesarios, no los incorporan en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Las razones que esgrimen los docentes de estos centros es la dificultad para desarrollar, aplicar y evaluar actividades relacionadas con la utilización de estos recursos en su práctica profesional y contribuir con ello a la mejora del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Además, aunque exista variedad de *software* para esta finalidad, todavía no se han desarrollado suficientes investigaciones dirigidas a los profesores con la intención de mostrar la potencialidad de estos recursos didácticos y sus limitaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los distintos niveles educativos. Así, los profesores

⁹ El Grupo PI está formado por un grupo de estudiantes de doctorado en Didáctica de la Matemática impartido por el departamento homónimo de la Universidad de Granada. Nuestra procedencia e intereses son muy variados (distintas nacionalidades, distintas profesiones, cuatro líneas personales de investigación...), pero nos une una profunda preocupación por el desarrollo de la Educación Matemática. Actualmente estamos trabajando (no exclusivamente en ello) en el uso de materiales didácticos aplicados a la enseñanza de la Geometría.

se pueden encontrar ante un problema aun cuando su intención sea incorporar nuevo software educativo en sus aulas.

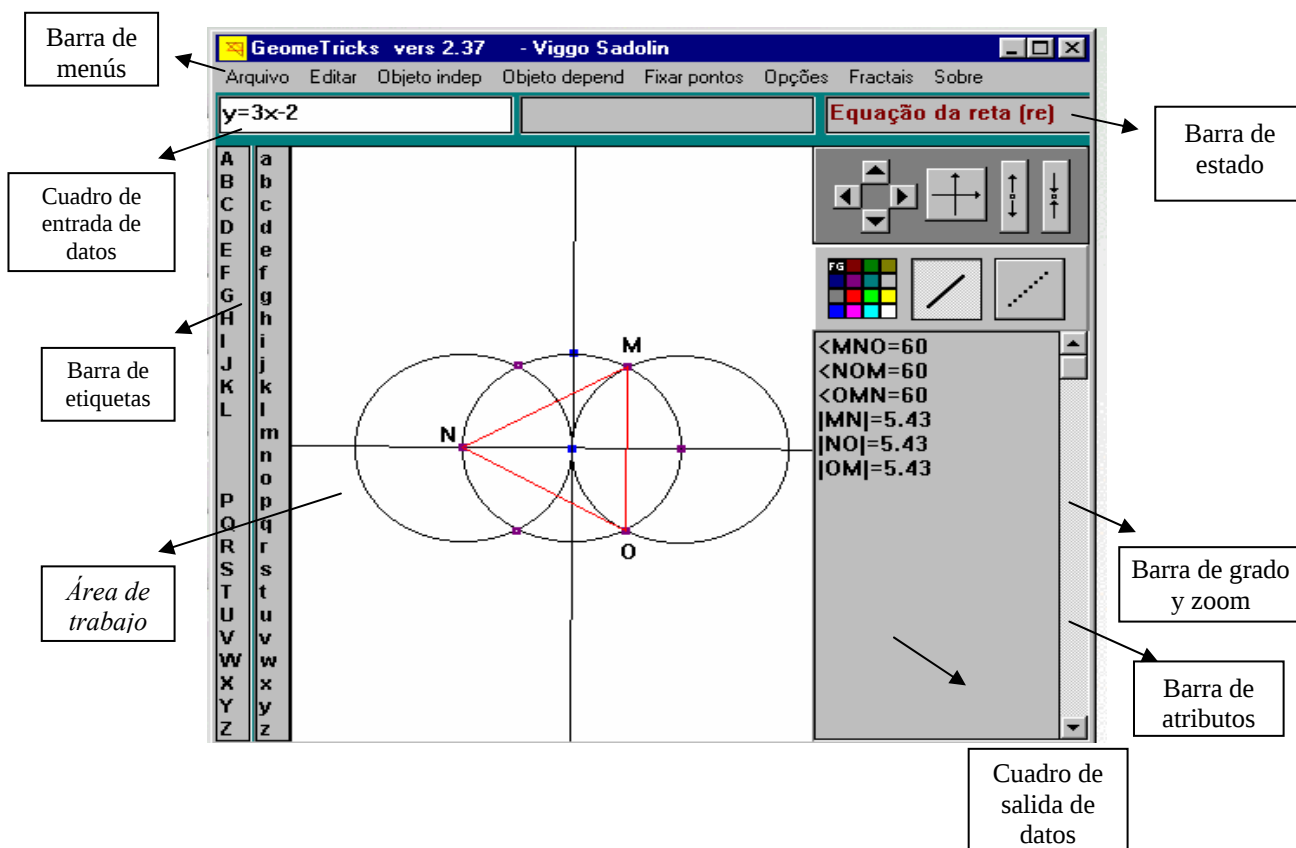
Con la intención de acercar un software que puede ser utilizado para la enseñanza de las matemáticas, proponemos una actividad que posibilita analizar algunas de las potencialidades del empleo del *software Geometricks*. Nos hemos centrado en el área matemática de la geometría por ser una de las ramas más intuitivas de las matemáticas y que más se presta a la representación gráfica que algunos software hacen posible, posibilitando la visualización de algunos conceptos geométricos y sus propiedades.

En este trabajo exponemos, a modo de ejemplo, la construcción del triángulo equilátero y del fractal *triángulo de Sierpinski*. En ambas figuras geométricas, mediante una utilización apropiada del *Geometricks* se pueden observar diversas propiedades. Este software posibilita la construcción y libre movimiento en la pantalla de varios objetos geométricos. Como tareas relacionadas con la geometría, mencionaremos que permite calcular longitud, medidas de ángulos, áreas de polígonos y del círculo, determinar el lugar geométrico de puntos y de rectas, así como también permite la generación de algunos fractales. Todo esto puede ser realizado con simples “clic” del ratón.

2. BREVE DESCRIPCIÓN DEL GEOMETRICKS

El *Geometricks* es un programa informático compatible con sistemas operativos posteriores a *Windows 95* (incluido éste). Fue desarrollado por Viggo Sadolin en la The Royal Danish School of Education, Copenhagen, Dinamarca. En este trabajo se utiliza la versión portuguesa del *software* traducida por los profesores brasileños Borba y Penteado, de la Universidad Estatal Paulista (UNESP, Rio Claro, Sao Paulo).

La imagen siguiente ilustra la pantalla de inicio de *Geometricks*. En este trabajo no pretendemos hacer una descripción detallada del *software*, sino comentar las posibilidades didácticas que ofrece en la construcción del triángulo equilátero y del triángulo de Sierpinski.



3. PASOS PARA LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO EQUILÁTERO POR MEDIO DEL *GEOMETRICKS*

La construcción del triángulo equilátero que presentamos, se basa en algunas de las propiedades geométricas que suelen ser utilizadas para diseñarlo con regla y compás. Entre las diferentes maneras de construir un triángulo equilátero con este recurso didáctico, hemos elegido una de las que involucra elementos conocidos por los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.). A continuación describimos los pasos de dicha construcción aportando simultáneamente algunos comentarios relativos a las posibilidades que ofrece el *Geometricks* como recurso didáctico.

Paso 1: Construcción de un segmento AB

Una vez iniciado *Geometricks* hacemos un clic en *Objeto independiente* y, a continuación, otro clic en *punto libre*. En la pantalla haremos clic en dos posiciones diferentes marcando los puntos *A* y *B* (para etiquetarlos hacemos un clic en las respectivas letras, arrastrándolas hasta cada uno de los puntos referidos). A continuación, hacemos un clic en *Objeto Dependiente* y, en *Segmento (po, po)*. Al hacer un clic sobre los puntos *A* y *B*, queda construido el segmento *AB*. (Ver figura 2)

Paso 2: Construcción de dos circunferencias con centros los puntos *A* y *B*, y radio *AB*

Hacemos un clic en *Objeto Dependiente* y, en *Circunferencia (po, po)* y, posteriormente, en los puntos *A* y *B*, respectivamente, construyéndose la circunferencia de centro *A* y radio $|AB|$ (*x*). Repitiéndose dicho proceso, pero haciendo clic en los puntos *B* y *A*, respectivamente, construiremos la circunferencia de centro *B* y radio $|BA|$ (*y*). (Ver figura 2)

Paso 3: Determinación de los puntos de intersección de las circunferencias *x* e *y*

Haciendo un clic en *Objeto Dependiente* y, en *Intersección (ci, ci)*; nombramos por *C* y *D* a los dos puntos de intersección de las circunferencias *x* e *y*. (Ver figura 2)

Paso 4: Construcción de los segmentos *AC* y *BC*

Se procede de forma análoga al paso 1.

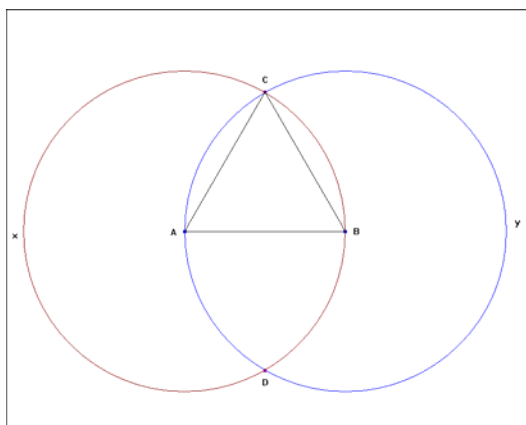


Figura 2

Paso 5: Ocultación de algunos objetos de la figura

Para finalizar la construcción del triángulo equilátero debemos ocultar algunos de los objetos presentes en la figura, concretamente, las circunferencias x e y , y el punto D .

La figura así obtenida es el triángulo equilátero ABC representado en la figura que tiene por lado el radio de la circunferencia. (Ver figura 3)

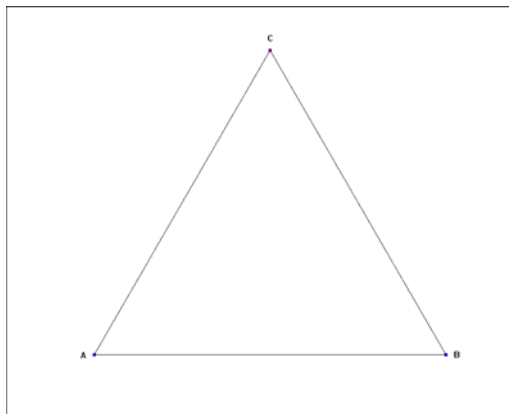


Figura 3

4. GEOMETRICKS PARA EL DISEÑO DE FRACTALES

En este apartado presentamos la construcción del fractal Triángulo de Sierpinski a partir del triángulo equilátero.

El *Geometricks* aporta un menú “Fractales” compuesto de los comandos *Definir fractal*, *Niveles*, *Dibujar fractal* y *Borrar dibujo fractal*, que permite el trabajo con este tipo de objetos matemáticos y el desarrollo de actividades que interrelacionan el estudio de medidas de longitudes-áreas y la proporcionalidad, conceptos especialmente implícitos en los currículos de ESO y Bachillerato.

A continuación describimos la construcción del triángulo de Sierpinski con este software.

Empezamos con la construcción del triángulo ABC , en el cual señalamos los puntos medios de sus lados y los etiquetamos de manera que E sea el punto medio de AB , F el punto medio de BC y D sea el punto medio de AC .

Seguidamente se crean los segmentos que unen estos puntos medios recién creados.

Se tienen cuatro triángulos, cuatro ternas en términos de *Geometricks*, que servirán a continuación para definir el fractal a construir. Hacemos clic en *Fractales* $\rightarrow$ *Definir fractal* y escribimos 4 para indicar el número de ternas. Seguidamente seleccionamos estas ternas haciendo clic, respectivamente, en el siguiente orden: (A, B, C) , (A, E, D) , (E, B, F) , y (D, F, C) .

Una vez realizadas estas operaciones hacemos clic en *Fractales* $\rightarrow$ *Dibujar fractal*. Aparecerá entonces una figura semejante a la figura 5.

Al realizar el diseño del fractal aparecerá en la barra de herramientas del programa un símbolo de exclamación tal y como se muestra en la figura 6. Es necesario hacer clic en él para que el software finalice la operación de dibujar el fractal, de lo contrario

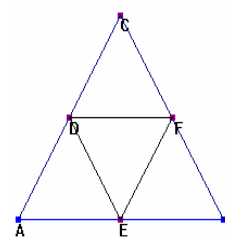


Figura 4

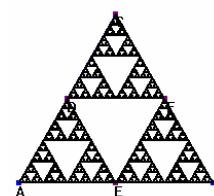


Figura 5

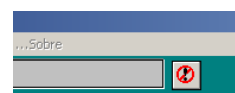
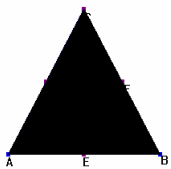
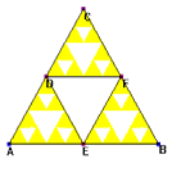
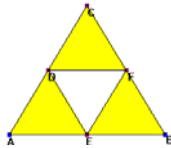
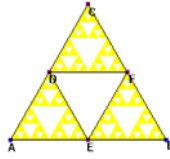
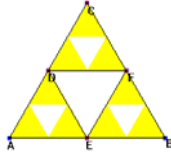
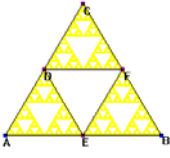


Figura 6

seguirá trabajando en la generación del fractal.

Para poder observar el proceso de generación de fractales en sus diferentes pasos, usamos los restantes comandos del menú “Fractales”. En primer lugar, se borra el dibujo fractal (*Fractales → Borrar dibujo fractal*) y volvemos a la construcción inicial: figura 4. Con la utilización del comando “Niveles” y “Borrar dibujo fractal” se pueden obtener en varias fases las siguientes imágenes correspondientes a las fases de construcción del triángulo de Sierpinski.

Nivel	Paso en la construcción	Nivel	Paso en la construcción
0		3	
1		4	
2		5	

5. REFLEXIONES

La utilización de las Tecnologías de la Información y de la Comunicación en el desarrollo de determinados temas matemáticos en los distintos niveles educativos posibilita al estudiante reflexionar, visualizar, relacionar y comprobar algunas propiedades que se presentan en las matemáticas escolares. Además, propicia condiciones para que el profesor pueda reforzar los conceptos abordados y establecer sus relaciones con otros conceptos matemáticos. Consideramos que los software de geometría dinámica como el que aquí presentamos, son una herramienta potente para trabajar la geometría plana en los centros educativos por sus múltiples posibilidades y su gran versatilidad.

La potencia del software *Geometricks* radica en la posibilidad de construir mediante sencillos pasos cualquier figura de geometría plana, desde los elementos más simples hasta las figuras más complejas a través de comandos fáciles de manejar. Si lo comparamos con otros softwares de geometría dinámica, el *Geometricks* añade un nuevo elemento: el menú *Fractales*, con el comando *Niveles*, que solventa con rapidez la construcción de fractales y la visualización de las distintas fases de dicha construcción. Otra de las peculiaridades de *Geometricks* es, como se observa en su menú, que está estructurado en *Objetos independientes* y *Objetos dependientes*. La importancia de esta relación de dependencia se ha puesto de manifiesto en algunas investigaciones como en Hölzl et al. (1994).

Por último, destacar que los software de geometría dinámica como el *Geometriks*, permiten que los alumnos trabajen de forma autónoma y potencian la resolución de problemas geométricos.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SADOLIN, V. (1999). *Geometricks: software de geometria de fractais*. Miriam G. Penteadó y Marcelo C. Borba (Trad.). Sao Paulo: Editora Unesp.

HÖLZL, R., HEALY, L., HOYLES, C. y NOSS, R. (1994) “Geometrical relationship and dependences in Cabri” en *Micromath*, vol. 10 (3), pp. 8-11.

EL LÍMITE Y LA CONTINUIDAD EN ENTORNOS INFORMÁTICOS DEL PROGRAMA MATHEMATICA¹⁰

Autores:

Contreras de la Fuente, Ángel	Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén afuente@ujaen.es tfno: 953212492. Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación. Paraje de las Lagunillas, s/n. Universidad de Jaén 23071-Jaén
Font Moll, Vicenç	Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Barcelona
García Armenteros, Manuel	Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Jaén
Luque Cañada, Lorenzo	IES (Jaén)
Marcolini Bernardi, Marta	Matemática Aplicada. Universidad de Jaén
Ordóñez Cañada, Lourdes	IES (Mengíbar, Jaén)
Ortega Carpio, Manuela	Matemática Aplicada. Universidad de Jaén
Sánchez Gómez, Carmen	Matemática Aplicada. Universidad de Jaén

Resumen

En esta Comunicación se describe un trabajo sobre el uso didáctico de un programa de ordenador (MATHEMATICA) en la enseñanza del análisis con estudiantes de primer curso de universidad de la licenciatura de Químicas de la Universidad de Jaén. Se realizan dos análisis, uno semiótico acerca de las tareas propuestas a los estudiantes; el otro, corresponde a las contestaciones de un estudiante a dichas tareas. De los resultados del estudio se desprende que, de las tres dimensiones que consideramos en las prácticas con este útil informático: algorítmicas, de comprensión de conceptos y de modelización de situaciones, las prácticas con el MATHEMATICA realizadas en contexto que nos ocupa se centran básicamente en actividades de tipo algorítmico, por lo que se ve necesario efectuar propuestas en el sentido de las otras dos dimensiones. Todo ello en el seno del marco conceptual ontológico semiótico de la cognición matemática (Godino, 2002).

INTRODUCCIÓN

Como señalan Artigue (2002), Trouche (2002) y Kendal, Stracy y Pierce (2002), la evolución de las matemáticas ha estado, desde siempre, dialécticamente ligada a los instrumentos de cálculo matemático y al desarrollo de programas informáticos, donde el cálculo formal ejerce una influencia cada vez mayor sobre las prácticas. Sin embargo, esta importancia creciente de dicho cálculo presenta interrogantes matemáticos. Si bien, el mundo profesional y la sociedad tienen una relación pragmática con los útiles de cálculo, en la que la legitimidad se mide en razón de su eficacia; en la enseñanza la

¹⁰ Este trabajo se ha elaborado en el marco del proyecto de investigación I+D: SEJ2004-06637/EDUC: “Uso de la tecnología informática en la formación matemática de estudiantes universitarios”, concedido a los autores por la Dirección General de Investigación del Ministerio de Educación y Ciencia (2004-2007).

práctica informática va mucho más allá. Los útiles de trabajo matemático deben ayudar a aprender, a comprender y no sólo a hacer o a producir resultados, pero aprender y comprender ¿exactamente qué?.

En este trabajo nos proponemos explorar el tipo de aprendizaje que los estudiantes logran cuando realizan prácticas con el programa MATHEMATICA, analizando, desde un punto de vista semiótico, las tareas que se efectúan en el primer curso de la licenciatura de Químicas en la asignatura de Cálculo y estudiando los resultados obtenidos por los estudiantes cuando realizan tales tareas.

MARCO CONCEPTUAL

Como se señala en Godino (2002), los objetos matemáticos emergen de la actividad de resolución de problemas mediada por las herramientas semióticas disponibles en los contextos institucionales. Es decir, el significado de los objetos matemáticos se concibe como el sistema de prácticas ligadas a campos de problemas específicos. A este enfoque teórico, compartido por algunos investigadores como: Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005 (en prensa), se le denomina teoría de las funciones semióticas (TFS).

Para el análisis de la actividad matemática, en la TFS se consideran las siguientes entidades primarias:

Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc.). En un texto vienen dados en forma escrita o gráfica pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (ordinario y específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos, tales como:.

Situaciones (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc.); son las tareas concretas que inducen la actividad matemática.

Conceptos, dados mediante definiciones o descripciones (número, función, derivada, límite, etc.)

Acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, procedimientos).

Propiedades o atributos de los objetos mencionados, que suelen darse como enunciados o proposiciones.

Argumentaciones que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).

ANÁLISIS SEMIÓTICO DE LAS SITUACIONES DE ENSEÑANZA DEL CÁLCULO CON EL PROGRAMA MATHEMATICA

En Contreras y Ortega (2004), se describen las prácticas realizadas con el programa MATHEMATICA relativas a los conceptos límite funcional y continuidad (Anexo).

Un análisis semiótico de dichas prácticas aparece en la tabla siguiente:

Tabla 1. Análisis semiótico de las tareas de límite y continuidad

	SITUACIÓN PROBLEMA	LENGUAJE	ACCIONES	CONCEPTOS	PROPOSIC.	ARGUMENTAC.
EJE. 1.1	Valor del límite de una función exponencial a la dcha.	Analítico Informático Numérico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes	Límite de una función a la dcha.		
EJE. 1.2	Valor del límite de una función exponencial a la izda.	Analítico Informático Numérico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes	Límite de una función a la dcha.		
EJE. 1.3	Valor del límite de una función racional con indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$	Analítico Informático Numérico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes	Límite de una función Descomposición en factores		
EJE. 1.4	Valor del límite de una función irracional con indeterminación $\infty - \infty$	Analítico Informático Numérico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes	Límite de una función Racionalización de fracciones		
EJE. 1.5	Valor del límite de una función exponencial para $x \rightarrow \infty$	Analítico Informático Numérico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes	Límite de una función exponencial Número e		
EJE. 1.6	Valor del límite de una función exponencial para $x \rightarrow \infty$	Analítico Informático Numérico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes	Límite de una función exponencial		
EJE. 2	Valor de una función, estudio de la continuidad y representación gráfica	Analítico Informático Numérico Gráfico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes Aplicación del concepto de continuidad	Función definida a trozos Valor numérico de una función Condiciones de la continuidad		Detectar los puntos posibles de discontinuidad
EJE. 3	Verificación de las hipótesis del teorema de Bolzano	Analítico Informático Numérico	Aplicación de la sintaxis de las órdenes Aplicación del teorema de Bolzano		Teorema de Bolzano	Verificación del no cumplimiento de las hipótesis del teorema de Bolzano

Como puede observarse en los ejercicios 1.1 al 1.6 el interés se centra en el cálculo rutinario de los valores del límite. Por tanto, no aparecen procesos de cálculo en los que intervengan las entidades proposicional y argumentativa. Además, las acciones corresponden a una mera aplicación de las órdenes del MATHEMATICA, no resolviéndose indeterminaciones por parte del alumno en las que tuviera que diagnosticar las acciones a seguir.

En el ejercicio 2 únicamente se le exige al estudiante la determinación de los puntos de discontinuidad para lo cual ha de argumentar, de modo implícito, la posible discontinuidad en los puntos de paso de las funciones definidas a trozos que intervienen.

En el ejercicio 3, al tratarse del teorema de Bolzano, se estudia una proposición matemática además de tener que argumentar la verificación, o no, del dicho teorema.

Como conclusión podemos señalar que la instrumentación que se realiza del programa MATHEMATICA corresponde a programas de primer nivel. Es decir, dicho logicial es utilizado como calculadora simbólica, esto es, como útil para el cálculo. Sin embargo esta utilidad, al no estar insertada en contextos de matematización hace aparecer al programa como un simple amplificador cognitivo, sin dotarlo de un verdadero cambio cualitativo.

Por otra parte, como se mostrará a continuación, este uso del MATHEMATICA, siendo tan simple, no supone la obtención de unos resultados de éxito en su realización en todos los estudiantes.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ESTUDIANTES A LAS TAREAS PROPUESTAS

Las tareas se propusieron a unos 25 estudiantes de primer curso de Químicas de la Universidad de Jaén, durante el curso 2002-03. La duración de la actividad de resolución de los tres ejercicios propuestos, que aparecen en el Anexo, fue de 60 minutos.

A continuación se describen y discuten los resultados según las categorías del análisis semiótico descrito anteriormente. Por razones obvias de espacio sólo nos centraremos en las contestaciones que corresponden a un 20% del total de los 25 estudiantes que participan en la investigación. En la tabla 2 siguiente se sintetizan los resultados:

Tabla 2. Resultados de las respuestas a los estudiantes

	ERRORES EN LENGUAJE	ERRORES EN ACCIONES	ERRORES EN CONCEPTOS	ERRORES EN PROPOSICIONES	ERRORES EN ARGUMENTACIONES
EJE. 1.1		No realiza el límite lateral	Confunde el límite lateral con el límite		
EJE. 1.2		No realiza el límite lateral	Confunde el límite lateral con el límite		
EJE. 1.3					
EJE. 1.4					
EJE. 1.5					

EJE. 1.6	Restricción del programa que “no sabe” calcular este límite				
EJE. 2	Trascribe mal el ejercicio		No calcula los límites laterales		No detecta que hay que calcular los límites laterales
EJE. 3		Cálculo de valores sin sentido		No aplica las hipótesis del teorema del Bolzano	

Podemos observar que los estudiantes cometen una serie de errores que ponen en duda la eficacia del programa MATHEMATICA en el desarrollo de los conceptos del Cálculo. Así, por ejemplo, no tienen en cuenta los límites laterales, a pesar de la reiteración en los ejercicios, lo que conduce a considerar que tienen errores en el concepto de límite de una función. En el ejercicio 2, de continuidad, no aplican el cálculo de límites laterales para el posible punto de discontinuidad. Por último, en el tercer ejercicio, sobre el teorema de Bolzano, no verifican las hipótesis limitándose al cálculo no coherente de algunos valores.

NECESIDAD DE NUEVAS PROPUESTAS DE ENSEÑANZA CON EL MATHEMATICA

Consideramos que, situándonos en el contexto del estudio realizado, en las tareas que actualmente se proponen con el programa MATHEMATICA no aparecen algunas dimensiones de la actividad matemática que hay que tener en cuenta para poder abarcar el significado matemático de los conceptos implicados en toda su extensión. Por una parte, la comprensión de los conceptos no es tratada en el entorno informático, al no proponerse tareas en las que se razonara y reflexionara sobre el mismo. Por otra, tampoco figuran situaciones de modelización a través del MATHEMATICA que pudieran contextualizar las prácticas con ordenador.

Es decir, de las tres dimensiones a considerar con las prácticas de ordenador mediante el programa MATHEMATICA (de cálculo algorítmico, de comprensión de conceptos y de contextualización de las situaciones de enseñanza por medio de la modelización), solamente la primera parece reflejada en las prácticas, por lo que es necesario efectuar propuestas en las que intervengan las otras dos dimensiones citadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ARTIGUE, M. (2002), L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire: les leçons de quelques ingénieries didactiques, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique, pp. 277-349.

CONTRERAS, A. y ORTEGA, M. (2004), Los estudiantes, las instituciones y el programa MATEMÁTICA, I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas, pp. 1-10.

CONTRERAS, A., FONT, V., LUQUE, L. y ORDÓÑEZ, L. (2005, en prensa), Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal, Recherches en Didactique des Mathématiques.

GODINO, J.D. (2002), Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática, Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 22/2.3, pp. 237-284.

KENDAL, M.; STACEY, K. y PIERCE, R. (2002), L'influence des environnements de calcul formal sur les modes de travail des enseignants, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique, pp. 117-146.

TROUCHE, L. (2002), Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique, en D. Guin y L. Trouche (Eds.), Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique, pp. 187-214.

ANEXO

Ejercicio 1.- Calcular los siguientes límites :

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} 5^{(1/x)}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^-} 5^{(1/x)}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 - x} - (x + 1)$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2^{-x}}{x}\right)^x$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 3^{2x+1}}{5^{x-2}}$$

Ejercicio 2.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 3 \\ -x & \text{si } 3 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{si } 5 < x \end{cases}$$

Estudiar los puntos de discontinuidad.

Ejercicio 3.- Estudiar si la función:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -2x - 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

verifica las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo [0,2].

OBSERVACIONES SOBRE EL CARÁCTER MEDIADOR DEL MÉTODO DE LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO ENTRE LA MANERA ARITMÉTICA Y LA MANERA ALGEBRAICA DE RESOLVER LOS PROBLEMAS.

David Arnau - Luis Puig
Departament de Didàctica de la Matemàtica
Universitat de València.

Resumen

Presentamos un método de resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo y ofrecemos algunas observaciones que confirman su carácter mediador entre la manera aritmética y algebraica de resolver dichos problemas.

INTRODUCCIÓN.

En los primeros cursos de Enseñanza Secundaria Obligatoria se introduce la resolución algebraica de los problemas verbales. En estudios anteriores encontramos una amplia descripción de los obstáculos que encuentra el estudiante en la transición entre la manera aritmética y la manera algebraica de resolver los problemas. Entre otros podemos citar el uso del igual como comparador (Kieran, 1981) y la utilización de las cantidades desconocidas como si fueran conocidas (Bednarz y Janvier, 1996). La dificultad que presenta el uso del método algebraico se observa en la tendencia de los estudiantes a utilizar el método aritmético incluso ante problemas que normalmente se resuelven algebraicamente. El recurso de proponer problemas con solución aritmética compleja, para dirigir al estudiante al uso del método algebraico, choca con la dificultad que presentan estos problemas en la obtención de la solución a partir de la ecuación.

En esta comunicación presentamos los resultados de un estudio en el que hemos observado cómo un grupo de estudiantes resuelven problemas tras haber recibido instrucción en el uso del método de la hoja electrónica de cálculo (en adelante, MHEC). También mostramos la transcripción de cómo una pareja resuelve un problema utilizando el MHEC, con la finalidad de exponer el papel mediador de este método entre la manera aritmética y la manera algebraica de resolver problemas.

EL MÉTODO DE RESOLUCIÓN DE LA HOJA ELECTRÓNICA DE CÁLCULO.

Hemos establecido una división en pasos ideales que no pretendemos que refleje el comportamiento real del resolutor, pero sí un inventario de aquello que de una manera u otra se hará cuando se resuelvan problemas típicamente algebraicos¹¹ en el entorno de la hoja de cálculo.

El primer paso es una lectura analítica del enunciado del problema que lo reduce a una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades.

¹¹ Evitaremos hablar de problemas aritméticos o algebraicos ya que lo que puede considerarse aritmético o algebraico es el proceso de resolución, la lectura analítica o la ecuación que traduce el enunciado; pero no el problema (Puig y Cerdán, 1990).

El segundo, la elección de las celdas que van a representar a las cantidades ya sean conocidas o desconocidas y qué celda, representante de una cantidad desconocida, servirá de referencia en el paso siguiente. A esta celda, que debe ser única, la llamaremos celda de referencia ya que todas las celdas que representan cantidades desconocidas harán referencia directa o indirecta a ella.

El tercero, representar ciertas cantidades mediante expresiones en la forma superficial de la hoja de cálculo que describen la relación (aritmética) que esas cantidades tienen con otras.

El cuarto, el establecimiento de una ecuación, lo que se hace igualando explícita o implícitamente dos celdas que representan la misma cantidad. La igualación explícita se hace usando una función booleana que implementa la hoja de cálculo y que da VERDADERO cuando el valor contenido en las celdas igualadas es el mismo, o FALSO cuando el valor contenido en las celdas no es el mismo. De manera implícita la comparación de los valores presentes en las celdas que representan la misma cantidad la hace el usuario.

El quinto paso será la variación del valor presente en la celda de referencia hasta conseguir que se verifique la igualdad.

LA INVESTIGACIÓN.

De acuerdo con el objetivo de la investigación y la normativa curricular hemos seleccionado doce alumnos de primer curso de secundaria del Col·legi Sant Bertomeu de Godella elegidos entre los que tenían mejor historial académico en matemáticas. Como nuestro propósito era, en parte, dilucidar cierto tipo de conducta en la toma de decisión, determinamos que los sujetos se agruparan a discreción por parejas (Schoenfeld, 1985, p. 175). Tanto en la secuencia de enseñanza como en el estudio de casos a cada pareja se le asignó un ordenador que disponía de la hoja de cálculo Microsoft Excel con la que resolvieron los problemas planteados.

LA SECUENCIA DE ENSEÑANZA.

En la secuencia de enseñanza podemos diferenciar dos partes: la familiarización del estudiante con el entorno de la hoja de cálculo y la aplicación de un modelo didáctico basado en la división en pasos ideales del MHEC. Las sesiones de enseñanza del MHEC consistieron en una explicación del método y una serie de actividades en las que el grado de intervención del profesor fue escaso. La ilustración del uso del método se planteó del modo siguiente:

1) Se presenta un problema.

A principio de curso Jaime y David fueron a comprar material escolar a una papelería. David compró un compás de 4€ y 5 libretas; Jaime, 7 libretas. ¿Cuánto cuesta cada libreta si los dos se gastaron lo mismo en la papelería?

2) Damos nombre a las cantidades.

	A	
1	precio de una libreta	
2	precio de un compás	
3	nº de libretas que compra David	
4	nº de libretas que compra Jaime	
5	dinero gastado por David en libretas	
6	dinero gastado por Jaime en libretas	
7	dinero gastado por David en libretas y compás	
8		
9		

3) Introducimos el valor de las cantidades conocidas.

	A	B
1	precio de una libreta	
2	precio de un compás	4
3	nº de libretas que compra David	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7
5	dinero gastado por David en libretas	
6	dinero gastado por Jaime en libretas	
7	dinero gastado por David en libretas y compás	

4) Intentamos calcular el valor de las cantidades desconocidas.

	A	B		A	B
1	precio de una libreta		1	precio de una libreta	
2	precio de un compás	4	2	precio de un compás	4
3	nº de libretas que compra David	5	3	nº de libretas que compra David	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7	4	nº de libretas que compra Jaime	7
5	dinero gastado por David en libretas	=B1*B3	5	dinero gastado por David en libretas	0
6	dinero gastado por Jaime en libretas	=B1*B4	6	dinero gastado por Jaime en libretas	0
7	dinero gastado por David en libretas y compás	=B2+B5	7	dinero gastado por David en libretas y compás	4

5) Identificamos dos cantidades que según el enunciado del problema deben ser iguales.

	A	B
1	precio de una libreta	
2	precio de un compás	4
3	nº de libretas que compra David	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7
5	dinero gastado por David en libretas	0
6	dinero gastado por Jaime en libretas	0
7	dinero gastado por David en libretas y compás	4

6) Generamos una secuencia de valores a partir de la celda de referencia y calculamos el resto de cantidades desconocidas a partir de este valor.

	A	B	C	D	E
1	precio de una libreta		=B1+1	=C1+1	=D1+1
2	precio de un compás	4	4	4	4
3	nº de libretas que compra David	5	5	5	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7	7	7	7
5	dinero gastado por David en libretas	=B1*B3	=C1*C3	=D1*D3	=E1*E3
6	dinero gastado por Jaime en libretas	=B1*B4	=C1*C4	=D1*D4	=E1*E4
7	dinero gastado por David en libretas y compás	=B2+B5	=C2+C5	=D2+D5	=E2+E5

7) Buscamos la igualdad de los valores presentes en las celdas que representan a las cantidades que son iguales y obtenemos la solución.

	A	B	C	D	E	F	G
1	precio de una libreta	1	2	3	4	5	6
2	precio de un compás	4	4	4	4	4	4
3	nº de libretas que compra David	5	5	5	5	5	5
4	nº de libretas que compra Jaime	7	7	7	7	7	7
5	dinero gastado por David en libretas	5	10	15	20	25	30
6	dinero gastado por Jaime en libretas	7	14	21	28	35	42
7	dinero gastado por David en libretas y compás	9	14	19	24	29	34

Valores iguales en las celdas que representan a la misma cantidad

EL ESTUDIO DE CASOS.

Tras la instrucción se llevó a cabo un estudio de casos con finalidad exploratoria en el que se observó cómo los estudiantes resolvían cuatro problemas.

Problema 1

Si sumamos 1200 unidades a un número obtenemos el mismo resultado que si el número lo multiplicamos por 5. ¿De qué número se trata?

Problema 2

En un cine hay 511 personas. ¿Cuál es el número de hombres y cuál el de mujeres, si sabemos que el de mujeres sobrepasa en 17 al de hombres?

Problema 3

En una granja, entre gallinas y conejos hay 20 cabezas y 52 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en la granja?

Problema 4

Tres muchachos ganaron novecientos sesenta euros. Luis ganó veinticuatro euros menos que Joan y la décima parte de lo que ganó Roberto. ¿Cuánto ganó cada uno?

En la Tabla 1 se muestra los métodos de resolución utilizados por los estudiantes en cada problema. Cuando el problema se ha resuelto aritméticamente se indica con MA, mientras que si ha sido resuelto mediante el método de la hoja electrónica de cálculo se señala con MHEC. También se apunta si la lectura ha sido analítica (+A) o no analítica (-A), entendiendo por lectura analítica aquella que establece relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas correctas y suficientes para llegar a la solución. Por último, y únicamente para las lecturas analíticas, se muestra si se llega a una solución correcta (1) o incorrecta (0).

Tabla 1. Resultados del estudio de casos.

	Problema 1	Problema 2	Problema 3	Problema 4
Pareja A	MHEC/+A/1	MHEC/+A/1	¿?/-A	MHEC/+A/1
Pareja B	MHEC/+A/1	MA/+A/1	MA/-A	MHEC/-A
Pareja C	MHEC/+A/0	MHEC/+A/0	MA/-A	MHEC/+A/1
Pareja D	MHEC/+A/1	MA/+A/1	MHEC+MA/-A	MHEC/+A/1
Pareja E	MHEC/+A/0	MA/+A/1	MA/-A	MHEC/-A
Pareja F	MHEC/+A/0	MA/-A	MA/-A	MHEC+MA/-A
Total de aciertos	3	4	0	3

EL CASO DE MAITE Y BÁRBARA.

Presentamos la transcripción de la resolución del problema 2 por la pareja formada por Maite y Bárbara (pareja C).

Paso 1. {1}
Paso 2. {2-9}

{4} [Escribe en la celda A1 “nº de personas en el cine”.]
{5} B: Número de mujeres.

	{6} [Escribe M en la celda A2 “n° de mujeres”.] {7} B: Número de hombres. {8} [Escribe M en la celda A3 “n° de hombres”.]
Paso 3. {10-16} Una misma relación se emplea dos veces dando lugar a una referencia circular.	{13}M: Ya está. Número de mujeres es igual... B: Es igual al número de hombres más diecisiete [Escribe en la celda B2, al mismo tiempo que habla, “=B3+17” intro 17.] {14}M: Número de hombres es igual a número de mujeres menos... diecisiete. B: Diecisiete. (A la vez.) [Escribe en la celda B3, al mismo tiempo que hablaban, “=B2-17”. Tras pulsar intro aparece un cuadro de diálogo en el que EXCEL les informa de que han creado una referencia circular.]
Paso 2. {17-20} Es la única identificación explícita de la celda de referencia antes de entrar en el paso 5. En B3 se encuentra la cantidad “hombres”.	{17}B: No, es que esta casilla es la que hay que dejar en blanco (refiriéndose a B3).
Paso 4. {21}	{21}B: ¿Qué cantidades tienen que ser iguales?
Paso 2. {22-27} La búsqueda de la igualdad les obliga a escribir una cantidad ya existente (“n° de personas en el cine”) de otra manera.	{24}M: Habrá que poner número de mujeres más número de hombres. {25}B: Sí, pon suma. {26}[Escribe en la celda A4 “suma”.]
Paso 3. {28}	{28}M y B: A número de mujeres más número de hombres... [Escribe, al mismo tiempo que hablan, en la celda B4 “=B2+B3” intro 17.]
Paso 4 {29-32} En B1 se encuentra “n° de personas en el cine” y en B4 “suma”.	{30}B: Ahora éste y éste (señalando a B1 y B4) tienen que ser iguales.
Paso 5. {33-45} En esta ocasión estira las filas B y las lleva hasta el extremo derecho. Encuentran la igualdad de valores de las cantidades que deben ser iguales, pero cuando dan el resultado ofrecen éste valor y no el correspondiente a los hombres y mujeres.	{43}M: ¿Apuntamos aquí lo que da? {44}P: Sí, ¿cuánto os ha dado? {45}B: Quinientos once.

CONCLUSIONES

Del análisis del MHEC y de su comparación con el método algebraico por excelencia, el método cartesiano, concluimos que las lecturas que realizaría un sujeto cuando resolviera utilizando el MHEC plantearían al menos las mismas dificultades que las que

encontraría al resolver algebraicamente con la restricción de utilizar una incógnita. De hecho podemos justificar la ausencia de lecturas analíticas en el problema 3 en la incapacidad de expresar una de las relaciones implícitas como explícita para poder establecer una única igualdad.

A partir de la resolución de Maite y Bárbara, podemos concluir el carácter mediador del método a partir de las observaciones siguientes:

- a) Utilizan cantidades desconocidas como si fuesen conocidas. Por ejemplo en el fragmento de diálogo: “Número de mujeres es igual... B: Es igual al número de hombres más diecisiete [Escribe en la celda B2, al mismo tiempo que habla, “=B3+17” intro 17.]”.
- b) Usan el igual como indicador de equivalencia y no sólo como el signo que indica el resultado de una operación. Un ejemplo de lo anterior lo encontramos en el fragmento de diálogo “Ahora éste y éste (señalando a B1 y B4) tienen que ser iguales.”.
- c) Razonan sobre situaciones generales y no sobre situaciones específicas como se hace cuando se resuelve aritméticamente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (eds.), *Approaches to Algebra*, pp. 115-136. Kluwer Academic Publishers: Netherlands.

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 12, pp. 317-326.

Puig, L y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. Conferencia invitada al *Grupo de Álgebra del Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática*. Cuernavaca, Morelos, México, 12-14 de julio de 1990.

Schoenfeld, A. (1985). Making Sense of “Out Loud” Problem-Solving Protocols. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 4, pp. 171-191.

ESTRATEGIAS INNOVADORAS EN LA PREPARACIÓN DE ALUMNOS ORIENTADOS A CARRERAS CIENTÍFICO-TECNOLÓGICAS¹²

A. Martínez, C. Gil, J. Pinto, J. Suárez

Departamento de Matemáticas
IES Federico García Lorca

J.L. Sánchez, F.J. Alfaro

Departamento de Informática
Universidad de Castilla-La Mancha

Resumen

Parece estar ampliamente aceptado por la comunidad educativa que las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación, puestas al servicio de cualquier proceso de aprendizaje y enseñanza en general, y en particular al de las Matemáticas, pueden incrementar el nivel de calidad de dicho proceso. Si, además, la funcionalidad proporcionada por estas tecnologías se combina con estrategias innovadoras y ajustadas al perfil de los estudiantes de hoy en día, el resultado puede ser tremendamente positivo. En este trabajo se describe una propuesta que se mueve en esa dirección, y cuyo objetivo último es conseguir una promoción de alumnos perfectamente preparados en Matemáticas e Informática para que puedan acceder a estudios universitarios, de carreras científico-tecnológicas, en condiciones óptimas.

1. INTRODUCCIÓN

Las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) han producido cambios significativos en conductas, métodos, ideas, etc., y lo ha hecho en prácticamente todos los ámbitos de nuestra vida, ya sean profesionales o familiares. El entorno educativo, lógicamente, no ha sido ajeno a esta revolución, y en muchos aspectos se ha puesto a la cabeza de su implantación. Así, parece estar ampliamente aceptado por la comunidad educativa que las TIC, puestas al servicio de cualquier proceso de aprendizaje y enseñanza pueden incrementar el nivel de calidad de dicho proceso. Teniendo en cuenta que uno de los grandes objetivos actuales perseguido por todas las Administraciones, que tienen relación con la educación a todos sus niveles, es elevar la calidad de los estudios y estudiantes, se hace imprescindible contar con las funcionalidades proporcionadas por las TIC.

En la actualidad ya son numerosos los centros educativos en los que se dispone y se usan herramientas derivadas u obtenidas a partir de las nuevas tecnologías. Estos centros no sólo pertenecen al entorno universitario sino también a los correspondientes a los niveles previos a la Universidad. La Administración Central y las Comunidades Autónomas parecen mostrarse decididas a conseguir una adaptación óptima al Espacio Europeo de Educación Superior, y llegar a las fechas previstas para la completa integración en las mejores condiciones posibles.

Para conseguir elevar el nivel de calidad en la enseñanza hace falta algo más que aprovechar las posibilidades que proporcionan las nuevas tecnologías. Otro factor a tener en cuenta es la metodología aplicada en el proceso de aprendizaje. La aplicación

¹² Este trabajo está financiado por la Consejería de Educación de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha.

de nuevas estrategias y métodos novedosos ayudarán, sin duda, a crear una motivación extra en docentes y estudiantes que facilite dicho proceso de aprendizaje.

Si bien es cierto que existen todavía ciertas reticencias a realizar cambios significativos en los métodos y los medios utilizados, no lo es menos que la mayoría de los docentes están mostrando buena disposición en este sentido. Se trata básicamente de adaptarse nuevamente a las actuales necesidades, como también se hizo en años pasados. Así por ejemplo, y en lo que se refiere a los medios, el ordenador personal (PC) supuso, en su momento, lo que ahora podrá suponer el asistente personal digital (PDA), o el proyector de transparencias de acetato entonces, lo que el cañón de proyección de vídeo ahora. Ni se dejó de usar la tiza y la pizarra entonces ni se hará ahora, sino que se combina con las facilidades de las que se dispone en cada momento.

Este planteamiento general se puede particularizar y llevar al ámbito del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas. Quizás sean precisamente las áreas científico-tecnológicas las que en mayor medida se pueden aprovechar de los nuevos recursos disponibles, dadas las características de los contenidos de aquellas y la dificultad histórica de los mismos. Los alumnos de Matemáticas seguro agradecen cualquier ayuda que se les pueda proporcionar a través de ordenadores, calculadoras, etc., así como a través de nuevos métodos de enseñanza que puedan o no ir ligados a éstos.

El trabajo que aquí se presenta está directamente relacionado con todo lo previamente expuesto. Es decir, se centra en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas, se apoya en el uso de las nuevas tecnologías y se basa en la aplicación de estrategias y métodos diferentes a los tradicionales. Se trata de una propuesta que actualmente está siendo desarrollada en un centro educativo, y que se enmarca en un proyecto de cooperación en materia de investigación entre Departamentos Universitarios y el Profesorado de los niveles previos a la Universidad. Concretamente, intervienen en este proyecto cuatro profesores del Departamento de Matemáticas del Instituto de Enseñanza Secundaria “Federico García Lorca” de Albacete, y dos del Departamento de Informática de la Universidad de Castilla-La Mancha.

La idea y objetivo último del proyecto es conseguir una promoción de alumnos perfectamente preparados en Matemáticas e Informática que puedan acceder en condiciones óptimas a estudios universitarios, de carreras científico-tecnológicas.

En las siguientes secciones se resumirán las características y objetivos del proyecto, la metodología que se está siguiendo para alcanzar dichos objetivos y los avances que hasta el momento se han producido.

2. TRABAJOS RELACIONADOS

Son numerosos los proyectos y las experiencias educativas realizadas utilizando programas de cálculo simbólico (DERIVE, MAPLE, MATEMÁTICA) tanto en IES como en Universidades. Muchas Universidades incluyen ya en sus planes de estudio asignaturas específicas o prácticas de laboratorio con programas de cálculo simbólico.

En el caso particular de utilización de DERIVE como recurso didáctico y educativo, una de las experiencias más importantes en España, es el Proyecto de Innovación Docente puesto en marcha en el curso 1990-91 por el profesor Dr. D. José Luis Llorens Fuster (enmarcado en el Proyecto de Innovación Educativa desarrollado por la Universidad Politécnica de Valencia). El profesor Llorens empleaba DERIVE en todas las fases del proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra y Cálculo: en las clases teóricas y prácticas, en los exámenes y en el trabajo personal de los estudiantes.

En lo que se refiere a EE.MM. también existen experiencias de utilización de DERIVE en el aula, una de ellas es el Proyecto “Elaboración y análisis de prácticas con DERIVE para las enseñanzas de Matemáticas en EE.MM y Universidad”, de cooperación entre el

Departamento de Matemáticas de la Escuela Universitaria Politécnica de Almadén, perteneciente a la Universidad de Castilla-La Mancha, y el Instituto de Enseñanza Secundaria “Fernando de los Ríos” de Quintanar del Rey (Cuenca).

Dentro del proyecto "Formación e Investigación sobre el uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en Matemáticas para la ESO y el Bachillerato", proyecto de la Dirección General de Ordenación Académica de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid y del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma, que analiza cómo las Nuevas Tecnologías incide en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, se está trabajando en el aula con los programas DERIVE y CABRI. Dos de sus miembros son autores de los libros de texto de Matemáticas de la editorial Algaída. Libros de texto que incluyen entre sus contenidos secciones dedicadas a DERIVE y CABRI.

El uso específico de la calculadora TI-89 ó 92, que incorporan DERIVE y CABRI, supone algo mucho más novedoso y desconocemos experiencias anteriores en España, aunque son aplicables los métodos y resultados obtenidos por el Grupo T3 España.

3. PROPUESTA

En esta sección se describen los objetivos y la metodología de la propuesta realizada. Dadas las limitaciones de espacio, se incluyen aquí los aspectos más relevantes, y se invita al lector interesado a consultar la página web ligada al proyecto, en la que además de la propuesta propiamente dicha se están incluyendo todos los resultados y avances que se van produciendo.

3.1 OBJETIVOS

El objetivo principal de la propuesta, del proyecto en definitiva, es conseguir motivar a los alumnos a los alumnos en 4º de E.S.O. para que opten por continuar sus estudios de Bachillerato en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y la Salud y conseguir que obtengan durante el Bachillerato una preparación óptima para acceder a carreras de corte científico-tecnológico, principalmente Matemáticas e Informática. Para conseguir este objetivo general se plantean los siguientes objetivos particulares:

- Formación específica de los alumnos en Informática, y más específicamente en programación con JAVA. Los alumnos deben ser capaces de programar sencillos juegos de lógica.
- Formación específica en Matemáticas, DERIVE y uso de la calculadora con cálculo simbólico. Los alumnos al acabar 1º de Bachillerato deben utilizar DERIVE de forma autónoma y ser capaces de realizar cálculos algorítmicos con calculadora, (simplificación de expresiones algebraicas, cálculo de límites, derivación, integración definida e indefinida, resolver sistemas de ecuaciones, resolver ecuaciones algebraicas de grado n). Al acabar 2º de Bachillerato deben manejar la calculadora de forma autónoma para resolver cualquier problema que se les proponga dentro de su currículo, incluso en los exámenes.
- Creación de un Laboratorio de Matemáticas en el IES.
- Evaluación de la incidencia del Laboratorio de Matemáticas en el aprendizaje de las Matemáticas.

La idea de utilizar una calculadora gráfica con cálculo simbólico surge de la creencia de los miembros del proyecto de que los alumnos pueden progresar más en Matemáticas si se dedica una proporción mayor de tiempo a trabajar los conceptos en detrimento de los procedimientos, por supuesto sin olvidar estos últimos. Los alumnos trabajarán conceptos y contenidos de un nivel superior al que les corresponde por curso, pero evitando que tengan que aprender y utilizar los procedimientos (que se impartirían en su

curso correspondiente) necesarios para desarrollar estos conceptos. Por ejemplo, creemos que los alumnos de 4º de ESO están capacitados para comprender los conceptos de integral definida como suma infinita, sin necesidad de aprender a calcular primitivas (la calculadora integrará por ellos).

Las acciones encaminadas a la consecución de los anteriores objetivos se concretan en:

- Ofertar en 4º de E.S.O. la asignatura optativa “Taller de Matemáticas”
- Montar un aula específica “Laboratorio de Matemáticas”, donde se imparta la asignatura de Taller de Matemáticas y cualquier otra clase relacionada con el proyecto que no requiera de ordenadores.
- Dotar a esta aula del material necesario. Además de ubicar en esa aula, de forma permanente, todo el material didáctico con el que contaba el departamento antes del proyecto, se instalarían el cañón retroproyector, el TI-Presenter que conecta la calculadora del profesor con el cañón y un mueble para guardar las 30 calculadoras TI-89 Titanium.
- Coordinarse con el equipo directivo para reservar, en un aula de informática desde el mismo comienzo del curso, todas las horas necesarias, y prepararla para trabajar con DERIVE y programación de juegos en JAVA.
- Adaptación del Proyecto Curricular de Matemáticas para impartir clase de Matemáticas con DERIVE (tanto con PC como con calculadora), bien elaborando prácticas o preferentemente eligiendo unos libros de texto que incorporen DERIVE. Se ha cambiado la editorial de los libros de 3º, 4º de ESO, 1º y 2º de Bachillerato eligiendo los libros de Editorial Algaida, que incorporan un apartado sobre DERIVE al final de cada tema.
- Utilización de todos estos medios de forma gradual en 4º de E.S.O. y 1º y 2º de Bachillerato de Ciencias Naturales y de la Salud, hasta conseguir que en 2º de Bachillerato los alumnos manejen con total soltura y, de forma ordinaria en clase y exámenes de Matemáticas, el programa DERIVE (en ordenador y sobre todo la versión adaptada que incorpora la calculadora TI-89 Titanium)
- Inclusión del IES en el grupo de usuarios de Derive en España.

3.2 METODOLOGÍA

En 4º de E.S.O. opción B, se imparten 3 horas de Matemáticas semanales en el aula de informática. El profesor utiliza DERIVE en su ordenador a modo de pizarra cuando lo estima oportuno (los alumnos ven el ordenador del profesor a través de un monitor) y cuando haya que realizar cálculos o hacer problemas. Los alumnos usan DERIVE para hacer cálculos y para comprobar los resultados. Además, al final de cada tema los alumnos realizan las prácticas con DERIVE que se les propone en su libro de texto.

En 1º de Bachillerato de Ciencias, se aplica la misma metodología que en 4º pero sólo se usa DERIVE dos horas a la semana. Una tercera hora semanal se dedica al uso de la calculadora, que deben manejar con cierta soltura al acabar el curso.

En 2º de Bachillerato de Ciencias los alumnos no usan DERIVE de forma habitual en clase, aunque sí el profesor, pero en cambio trabajan permanentemente con la calculadora desde el primer día. Todos los ejercicios que se hacen en clase se resuelven con la calculadora, se les permite su uso en exámenes e incluso se les presta en períodos vacacionales. El profesor también realiza los ejercicios en su calculadora proyectándolos a través del TI-Presenter.

3.3 AVANCES Y RESULTADOS

Debido a que el proyecto está en la mitad de su primer año de aplicación no se puede hablar ya de resultados, aunque sí es patente que se ha incrementado el interés y motivación por las Matemáticas de los alumnos que participan en el proyecto.

Los objetivos conseguidos en la primera fase de desarrollo del proyecto son:

- Adquisición de material: 18 calculadoras TI-89 Titanium, TI- Presenter.
- Preparación del aula de informática para impartir clase de Matemáticas con DERIVE y JAVA
- Aunque no se ha conseguido para este curso crear el Laboratorio de Matemáticas, por problemas de organización del Centro, sí se ha podido reservar el número de horas suficientes en el aula de usos múltiples, donde hay instalado un cañón retroproyector y se ha ubicado un armario para guardar las calculadoras y el TI-Presenter.
- Adaptación de la metodología en el aula de Matemáticas utilizando las calculadoras y DERIVE en todos los niveles programados en el proyecto.
- Adaptación del P. curricular de Matemáticas a los contenidos del proyecto.
- Elaboración de la página web <http://iesfgl.albacete.org>, ligada al proyecto, en la que se incluirán todos los avances y resultados producidos a partir del mismo.

4. BIBLIOGRAFÍA

- [1] J.M. Arias, I. Maza. Bachillerato 1. Matemáticas. Ed Algaida. 2002. ISBN 84-8433-178-4
- [2] J.M. Arias, I. Maza. Bachillerato 2. Matemáticas. Ed Algaida. 2003. ISBN 84-8433-314-0
- [3] J.M. Arias, I. Maza. Matemáticas A 4 ESO. Ed Algaida. 2003. ISBN 84-8433-304-3
- [4] M.J. Fernández, E.G. Spaich. *Guía de usuario de Derive para Windows*. Ed. Servitec. 1998. ISBN: 84-8497-919-9
- [5] A. García. *Prácticas de Matemáticas con Derive*. Ed. Clagsa. 1994. ISBN:84-6048-958-2.
- [6] C. Gil, A. Martínez. *Introducción a Derive para alumnos de ESO y Bachillerato*. Ed. Alhulia. 2000. ISBN: 84-95136-32.
- [7] B. Kutzler, V. Kokol-voljc. *Introducción a Derive 5*. 2001. ISBN: 84-921694-5-1
- [8] J.L. Llorens. *Aplicaciones de Derive: análisis matemático-I (Cálculo)*. Servicio de publicaciones de la Universidad de Valencia. 1993. ISBN: 84-7721-237-6.
- [9] J.L. Llorens. *Aplicaciones de Derive: álgebra lineal*. Ed. Servicio de publicaciones de la Universidad de Valencia. 1994. ISBN: 84-7721-255-4.
- [10] J.L. Llorens. *Introducción al uso de Derive. Aplicaciones al álgebra y al cálculo*. Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia. 1995. ISBN: 84-7721-199-X.
- [11] J.A. Mora, y otros. *Matrices con TI-92*. Ed. Proyecto T3 España.1999.
- [12] C. Pérez, C. Paulogorrán. *Matemática práctica con Derive para Windows*. Ed. RA-MA. 1998. ISBN: 84-7897-280-3.
- [13] A. Quesada. *El impacto de las calculadoras gráficas en la enseñanza de aplicaciones matriciales a nivel preuniversitario*. Actas VII JAEM. Ed. SPM Emma Castenuovo de Madrid. 1994.
- [14] M.D. Rodríguez. *Recursos en Secundaria: La calculadora gráfica*. Revista AULA de Innovación Educativa. Nª: Julio 1999. Ed. GRAO.
- [15] A. Sánchez. *Matrices y determinantes con la TI-92*. Ed. Texas Instruments España. 1996.
- [16] L.M. Sánchez. *Matemáticas con Derive*. 2001. ISBN: 84-9705-054-1

UN SISTEMA DE EVALUACIÓN CONTINUADA USANDO LA PLATAFORMA VIRTUAL ACME

E. Barrabés, J. Poch, F. Prados, J. Soler, D. Juher, J. Ripoll

Departamento de Informàtica y Matemàtica Aplicada, Universidad de Girona
Escuela Politécnica Superior. Edificio P-IV, 17071 Girona
barrabes@ima.udg.es

Resumen

La plataforma ACME es un entorno virtual de soporte a la docencia que se encuentra en funcionamiento como sistema de evaluación continuada de asignaturas de matemáticas desde hace unos años. Este consiste en la asignación, corrección y evaluación de problemas de forma personalizada para cada alumno. Actualmente ACME se está usando en diferentes asignaturas de Matemáticas, Química, Física y Programación básica de la Universidad de Girona. Como consecuencia de su expansión, se han introducido mejoras y novedades, las cuales se presentan después de una breve descripción de los objetivos y funcionamiento de la plataforma.

INTRODUCCIÓN

El proyecto ACME (Avaluació Continuada i Millora de l'Ensenyament) nació hace unos años con la finalidad de incrementar el rendimiento académico final de los alumnos de asignaturas de matemáticas de estudios de Ingeniería Industrial e Ingeniería Técnica de l'Escola Politècnica Superior de la Universitat de Girona, buscando una mayor implicación y participación de los alumnos en esta materia y usando programas de cálculo simbólico e Internet como vía de comunicación.

La docencia de las asignaturas de matemáticas tradicionalmente se ha basado en sesiones teóricas y de problemas, dejando al alumno la labor de ejercitarse por su cuenta en la resolución de problemas a partir de los (pocos) ejemplos vistos. Para la correcta asimilación de los conceptos y técnicas que se explican es necesario un trabajo continuado que pocos alumnos tienen la predisposición de seguir.

Los objetivos generales que se persiguen son:

- Implementar un sistema de evaluación y trabajo continuados que ayude a los alumnos en el seguimiento de la asignatura y les haga conscientes de su nivel de conocimientos.
- Ofrecer al alumno un sistema que le ayude en la resolución de problemas, de manera que pueda ejercitarse.
- Facilitar la comunicación alumno – profesor y profesor – alumno.
- Facilitar el seguimiento de los alumnos por parte del profesor.

Por otra parte, el *e-learning* se está convirtiendo en uno de los pilares básicos de la enseñanza universitaria. Muchas de las plataformas existentes consisten únicamente en la publicación de material docente y en la comunicación con el alumnado vía correo electrónico i/o forum. El proyecto ACME hace uso de las nuevas tecnologías y ofrece

un entorno virtual donde se corrige, controla y evalúa automáticamente el trabajo realizado por el alumno en cualquier asignatura. La plataforma ACME, pues, nos permite realizar una evaluación continuada del alumno, facilitándole al mismo la corrección automática de sus problemas, así como la posibilidad de corregir el déficit de formación que pudiera tener en materias básicas.

Si bien el proyecto nació pensando en asignaturas de Matemáticas, actualmente también se han desarrollado colecciones de problemas y módulos de corrección para problemas de Química, Física e Introducción a la Programación. En este documento presentamos brevemente la plataforma ACME y las mejoras e innovaciones que se están llevando a cabo y las que se implementarán el próximo curso.

DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

La plataforma ACME está compuesta de diversos módulos de evaluación, corrección, comunicación y consultas. En concreto, el Sistema de Evaluación Continuada (SEC) consiste en una colección de problemas a partir de los cuales se confecciona de manera automática un dossier de problemas personalizado para cada alumno. Para ello, cada uno de los problemas iniciales consta de enunciados alternativos con parámetros, una lista de valores para cada uno de los parámetros y un código de verificación (basado en el software de cálculo simbólico que se usa para la corrección) [1,2]. Cada dossier personalizado se genera a partir de una selección al azar de un enunciado y un valor para cada uno de los parámetros, con la particularidad de que todos los problemas así generados se resuelven siguiendo un mismo procedimiento. Así los dossiers obtenidos son todos diferentes, en el sentido que tienen problemas diferentes, y todos iguales, en el sentido evalúan los mismos conceptos y técnicas.

A los alumnos matriculados en una asignatura se les da de alta en el sistema asignándoles un nombre de usuario y una palabra clave, a partir de las cuales podrán acceder al sistema ACME a través de una página web. A continuación se le asigna uno de los dossiers, el cual tiene distribuidos los problemas por temas. Para asegurar que el trabajo es continuado cada uno de los temas tiene asignadas unas fechas de inicio y finalización. Los temas se activan y desactivan dependiendo de la progresión de la asignatura.

Des del punto de vista de los usuarios el funcionamiento es como sigue (para una descripción más detallada consultar [1,3]).

Alumnos: Una vez el alumno accede al sistema, selecciona una asignatura (puede estar dado de alta en varias), un tema activo y consulta un problema. Cuando lo ha resuelto, introduce la respuesta en la misma página donde consulta el enunciado y la envía a corregir. La respuesta se corrige automáticamente y se informa al alumno del resultado: correcto, incorrecto o sintácticamente incorrecto (si la respuesta entrada no se puede interpretar). El sistema siempre permite al alumno introducir nuevas respuestas siempre que las anteriores sean erróneas. Esto le obliga a revisar el problema y a consultar al profesor si no consigue determinar cuál es el error.

El alumno puede consultar en todo momento todas las respuestas que ha enviado, que problemas ha resuelto y cuales están pendientes de solucionar y el número de soluciones que ha enviado.

Profesor: Los profesores de una asignatura también son dados de alta en el sistema y asignados como tutores a los alumnos de la misma. Pueden consultar en cualquier momento lo que estos han hecho o están haciendo, enviar correos a un alumno concreto, poner avisos i/o comentarios a uno o más alumno, consultar las estadísticas de resultados, crear un archivo de notas para utilizar los resultados en la evaluación y visualizar las fechas límite de cierre de cada tema. Un mismo profesor puede tener asignadas más de una asignatura.

Administrador: Es el encargado del mantenimiento general del sistema, control de seguridad, etc.

MEJORAS I NOVEDADES DEL SISTEMA

El proyecto ACME ha evolucionado enormemente desde sus inicios en el curso 1998/1999 hasta la actualidad, tanto en número de alumnos como en el de asignaturas dados de alta en el sistema. Con el propósito de mejorar la funcionalidad del sistema y las ayudas a la autocorrección de problemas por parte del alumno se han implementado o están en proceso de implementación los siguientes apartados.

Tipos de problemas

Se han incorporado o mejorado los siguientes tipos de problemas.

Problemas con indicaciones. Hasta la actualidad la corrección de las respuestas enviadas por un alumno solo permite informarle si el resultado introducido es correcto, incorrecto o no interpretable. En los dos últimos casos el alumno tiene que averiguar dónde está el error y corregirlo. De esta manera se persigue que el alumno aprenda a autocorregirse. Para ayudarle en este proceso es conveniente que en algunos casos se le de alguna indicación de dónde puede estar el error. Las mejoras del sistema permiten introducir comentarios en el código de resolución de los problemas, de manera que dependiendo de la respuesta introducida por el alumno, se le puede dar una indicación del motivo por el que el resultado no es correcto.

ACME - Microsoft Internet Explorer provided by Departament d'IMA

Sistema d'Avaluació Contínua

Departament d'Informàtica i Matemàtica Aplicada

ACME > Assignatura > Menú d'opcions > Visualització del problema

Hola Esther Barrabés Vera aquestes són totes les solucions enviades per Esther Barrabés a l'exercici 1 del tema 3:

Calcula los puntos sobre la curva $y^2 = x^3 - 2x^2 + 1$ que se encuentran a distancia mínima del origen de coordenadas.
Introduce cada uno de los puntos como una lista $\{a,b\}$ separados por comas. En caso de dar una aproximación numérica de alguna de las soluciones, hazlo con 6 cifras decimales.
Por ejemplo: $\{1,2\}, \{0, -\sqrt{3}\}, \{1.456781, -2.987651\}$

Data de l'enviament	Solució Enviada	Resultat
Divendres 15 d'Abril del 2005 18:16:05	1 x=2/3,y=11/27 Incorrecte 2 La solución no está escrita en el formato adecuado Incorrecte	Incorrecte
Divendres 15 d'Abril del 2005 18:17:03	1 {2/3,11/27} Incorrecte 2 Alguno de los puntos no está sobre la curva Incorrecte	Incorrecte
Divendres 15 d'Abril del 2005 18:17:05	1 {2/3,Sqrt(11/27)},(0,1) Incorrecte 2 Alguno de los puntos no es un mínimo Incorrecte	Incorrecte
Divendres 15 d'Abril del 2005 18:18:02	{2/3,Sqrt(11/27)},(2/3,-Sqrt(11/27))	Correcte

Solució:

Incidències del problema

Fig. 1 Resultados de las correcciones de las respuestas enviadas

Problemas tipo test. Se han generado problemas tipo test que permiten hacer evaluaciones de los alumnos, no solo sobre metodologías sino también sobre conceptos. Estos problemas permiten al alumno autoevaluarse, dado que pueden enviar respuestas hasta obtener la correcta. Para evitar que se limiten a contestar al azar hasta dar con la respuesta adecuada, el problema dispone de más respuestas incorrectas de las que muestra, de manera que si el alumno no responde correctamente la vez siguiente no le muestra las mismas respuestas exactamente. Estos problemas además permiten al profesor programar evaluaciones rápidas en un día y hora fijados.

Problemas con gráficos. Los enunciados de los problemas constan únicamente de texto. Las últimas modificaciones del sistema permiten asignar un gráfico a un problema, ampliando así la tipología de problemas admisibles en el sistema.

Cuaderno de problemas

Para cada materia existe una colección de problemas que ha ido en aumento con el paso de los cursos. Todos estos problemas se han recogido en un cuaderno, al cual el profesor accede desde la plataforma ACME. Dentro del cuaderno, el profesor puede incorporar nuevos problemas o buscar problemas de entre la colección existente para darlos de alta en una asignatura. La búsqueda puede hacerse bien mediante palabras clave o por temáticas. Para que la búsqueda sea efectiva, cuando un problema se añade al cuaderno se definen los campos siguientes: Temática (Matemáticas, Física, etc.), Categoría (ecuaciones lineales, Trigonometría, etc.), Ámbito (Matemáticas avanzadas, Matemáticas elementales) y Nivel de dificultad. Si el profesor realiza la búsqueda por temáticas, a continuación puede seleccionar más de una categoría y se le indica el número de problemas que corresponden a la demanda efectuada.

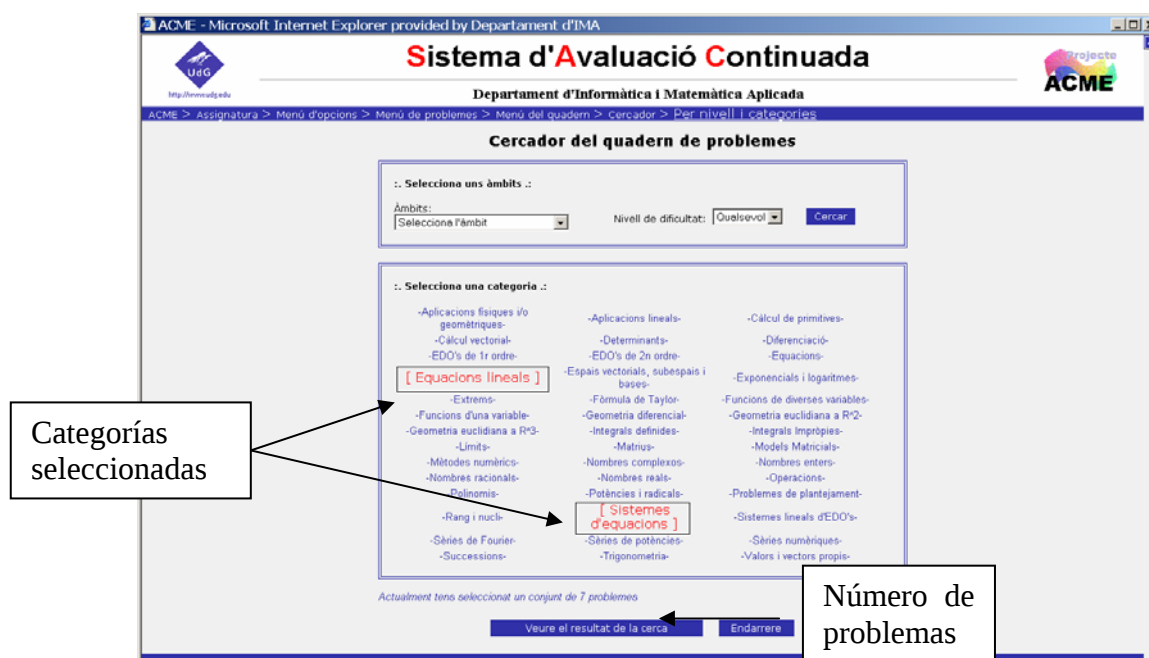


Fig. 1. Página de búsqueda de problemas

A continuación el profesor puede visualizar y escoger de entre la selección de problemas encontrada los que quiere incorporar al dossier de los alumnos.

Calculadora

Actualmente las calculadoras de que disponen los alumnos ya incorporan funcionalidades como la derivación, integración o gráficas de funciones. Los programas de cálculo simbólico nos permiten resolver la parte ‘mecánica’ de los problemas, de manera que en algunos casos nos puede interesar poner más énfasis en el planteamiento de un problema que en las operaciones en sí. Por ello se ha creado una calculadora que está disponible para los alumnos des de la misma página de consulta de los mismos. Esta dispone, además de las funciones básicas, opciones avanzadas como el cálculo de derivadas, integrales, gráficas de funciones, resolución de ecuaciones y operaciones con complejos, y opciones de cálculo matricial que van des de el cálculo de determinantes, hasta valores propios. Todas estas opciones pueden activarse o desactivarse a criterio del profesor según este considere.

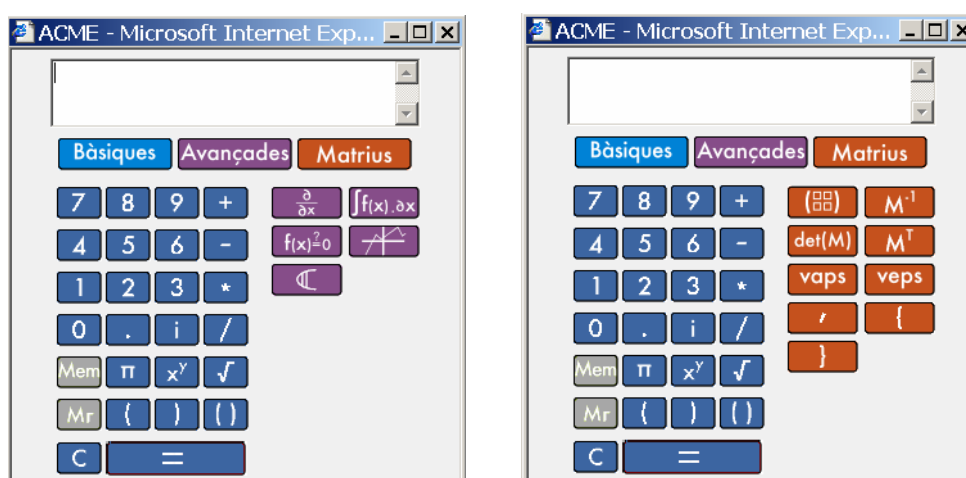


Fig 3. Opciones avanzadas (izquierda) y matriciales (derecha) de la calculadora.

CONCLUSIÓN Y VALORACIONES

El sistema de evaluación continuada ACME ha resultado una herramienta altamente motivadora para el alumno en su trabajo continuado de las asignaturas de matemáticas y, en definitiva, para su aprendizaje, lo cual se ha traducido en un incremento de la relación profesor-alumno (el número de consultas que reciben los profesores que utilizan ACME es notablemente superior al de otras asignaturas) y en una mejora del rendimiento académico de los alumnos.

Algunas de las mejoras aquí presentadas son como resultado de indicaciones y observaciones de los propios alumnos. Actualmente continuamos trabajando para la ampliación y mejora del sistema en cuestiones como trabajos en grupo usando la plataforma.

BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Poch; E. Barrabés; D. Juher; J. Ripoll. *Proyecto ACME*. IX Congreso de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas. pp 1027-1044, Vol. 2, Vigo 2001. ISBN 84-699-5659-0
- [2] F. Prados, I. Boada, J. Poch, J. Soler-Masó, J. Soler-Villanueva. *El e-learning como complemento a las clases presenciales, un caso práctico: el proyecto ACME*. Virtual

Educa 2004 - Fòrum de les Cultures de Barcelona, Barcelona 16, 17 i 18 de junio de 2004.

[3] J. Poch Garcia; E. Barrabés Vera; D. Juher Barrot; J. Ripoll Misse; J. Soler Villanueva; A. Calsina Ballesta. *ACME 2.0 un sistema de evaluación continuada y ayuda a la resolución de problemas*. Actas XI Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas. Vilanova i la Geltrú 23, 24 i 25 de julio de 2003.

UNA EXPERIENCIA EN FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS HACIENDO USO DE CALCULADORAS SIMBÓLICAS

Matías Camacho Machín
Universidad de La Laguna
mcamacho@ull.es

Marta Rojas González*
Universidad de La Laguna
marta.rojas@gmail.es

Introducción

En los últimos años las Tecnologías de la Información y de la Comunicación (TIC) han ido poco a poco formando parte del mundo educativo y en general, de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en particular en mayor o menor medida dependiendo muchas veces de la formación de los profesores y de su actitud hacia su uso en el aula.

Cada vez más, aparece en los libros de texto la alusión al uso de las calculadoras tanto gráficas como simbólicas para la resolución de problemas. Abordamos aquí una experiencia que hemos desarrollado para la formación de un grupo de futuros profesores mediante un primer acercamiento a la calculadora simbólica Voyage 200 utilizando los diferentes entornos de trabajo que nos ofrece la calculadora: simbólico, gráfico, geométrico y numérico.

El NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) estableció lo que se denomina “Principio tecnológico” y señala:

“Las calculadoras y los ordenadores, son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas. Proporcionan imágenes visuales de ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos y hacen cálculos con eficacia y exactitud. Pueden apoyar la investigación de los estudiantes en cada área temática, incluyendo Geometría, Estadística, Álgebra, Medida y Números. Cuando disponen de estas herramientas tecnológicas, los alumnos pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas” (NCTM (2003)** , p. 26).

En algunos países, el impacto de estas tecnologías ha llevado a dedicar un espacio de discusión e investigación emergente, en el que han surgido elementos teóricos que nos ayudan a interpretar las dificultades y potencialidades que aparecen al introducir las TIC en el aula.

Por ejemplo, en Francia, M. Artigue directora del IREM de París, ha liderado un grupo de investigación que ha tratado de explicitar la complejidad que tiene el proceso de enseñanza y aprendizaje utilizando diferentes tecnologías y en particular los Computer Algebra System (CAS) dentro de los cuales se pueden incluir las Calculadoras Simbólicas Voyage 200 (o TI-92).

Desde ese punto de vista (Trouche, 2004), (Guin, y Trouche (2005), (Artigue, 2002), establecen las bases de lo que se viene llamando recientemente la Teoría de la Instrumentación como un elemento que ayuda a organizar la enseñanza e

* Presenta la comunicación

** NCTM (2003) Principios y Estándares para la Educación Matemática. Traducción de la SAEM Thales

interpretar el aprendizaje de los estudiantes. Desde este punto de vista, el trabajo en un entorno de aprendizaje con ordenadores (CLE, Computerized Learning Environments) se hace efectivo mediante lo que se denomina Génesis Instrumental, que es el proceso mediante el cual un instrumento resulta de la construcción hecha por un individuo, en un entorno práctico, sobre la base de un “artefacto” dado, que sería en este caso la Calculadora Simbólica.

No cabe duda que un aspecto importante que no debe pasar desapercibido es la formación que deben tener los profesores de secundaria para poder usar las TIC con sus alumnos. Los Principios y Estándares del 2000 así lo mencionan e indican que:

“El uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende del profesor [...] Los profesores deberían utilizar la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que se beneficien de lo que ella puede hacer bien y eficientemente: hacer gráficas, visualizar y calcular.[...] La tecnología no sustituye al profesor[...] El profesor desempeña varios papeles importantes en un aula bien equipada tecnológicamente; toma decisiones que afectan notablemente al aprendizaje de sus alumnos. En principio, puede decidir si emplea tecnología, cuándo y cómo hacerlo. Cuando los estudiantes utilizan calculadoras u ordenadores en clase, el profesor tiene oportunidad de observarlos y centrarse en su pensamiento”. (NCTM, p. 27)

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, nos proponemos en este trabajo presentar un estudio previo de una investigación más amplia que venimos desarrollando en la Universidad de La Laguna, sobre el uso de las Calculadoras Simbólicas para la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria.

Presentamos aquí una experiencia con estudiantes de La Licenciatura de Matemáticas con los objetivos siguientes:

- Desarrollar con futuros profesores un Programa de Formación (de corta duración) con la calculadora simbólica, para su posterior uso en el aula.
- Analizar los estados de opinión de los futuros profesores hacia el uso de la calculadora simbólica tanto para aprender Matemáticas como para la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria.
- Analizar las destrezas adquiridas por nuestros estudiantes después de seguir el Programa de Formación.

Metodología

La experiencia se llevó a cabo con un grupo de 9 estudiantes que cursaban la asignatura de Didáctica de las Matemáticas I perteneciente a la Licenciatura de Matemáticas, quienes habían desarrollado a lo largo del curso (2004-2005) quince sesiones de trabajo utilizando el software de geometría dinámica Geometer's Sketchpad y tres sesiones con Derive, trabajando tanto los aspectos técnicos como los aspectos procedimentales de ambos programas informáticos.

El trabajo con la calculadora se llevó a cabo en cuatro sesiones de 1 hora durante una semana (la última del cuatrimestre), resolviendo una serie de tareas en grupos de tres alumnos cada uno, la calculadora podían llevársela a su casa.

Para la Formación, se diseñaron una serie de actividades que describimos a continuación:

En las dos primeras sesiones realizaron actividades de instrumentación para el uso de la calculadora en los entornos: algebraico, analítico, geométrico y numérico. En las siguientes figuras (1, 2, 3, 4) aparecen algunas de las actividades desarrolladas:

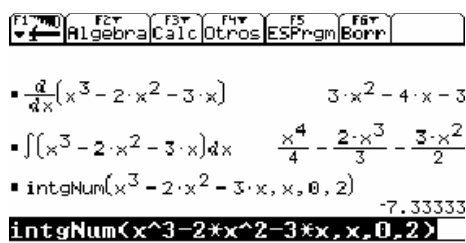


Fig. 1 Cálculo de la derivada y la integral de una función de 2º grado. (Entorno simbólico gráfico)

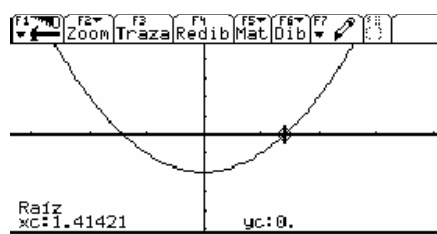


Fig. 2 Cálculo gráfico del valor aproximado de una ecuación de 2º grado. (Entorno gráfico)

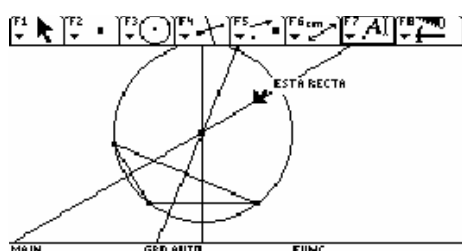


Fig. 3 Cálculo del incentro de un triángulo (Entorno geométrico)



Fig. 4 Cálculo de la recta de regresión de dos variables. (Entorno numérico)

La tercera sesión se dedicó a la resolución de un problema clásico de optimización que ya habían trabajado en su período de formación con Geometría Dinámica, en esta ocasión utilizando el entorno geométrico (Cabri Geometrie) y posteriormente utilizando el entorno simbólico. En dicho problema se pedía obtener, de todos los rectángulos isoperimétricos, el que posee mayor área. Se resolvió primero en el entorno geométrico, haciendo la construcción de un rectángulo de dimensiones variables y de perímetro constante (Fig. 5) Después de hacer una animación, se recogieron los datos de variación del área según el lado del rectángulo formando una tabla de valores (Fig. 6), para a continuación representar en una gráfica los valores de la tabla al objeto de obtener el valor máximo (Fig. 7).

Posteriormente se resolvió el problema analíticamente en el entorno simbólico (Fig. 8)

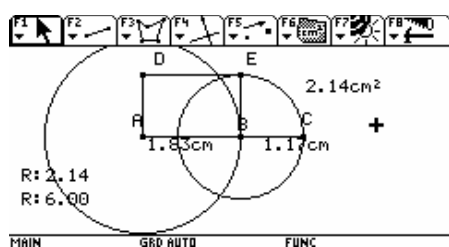


Fig. 5 Construcción de un rectángulo de perímetro constante. (Entorno geométrico)

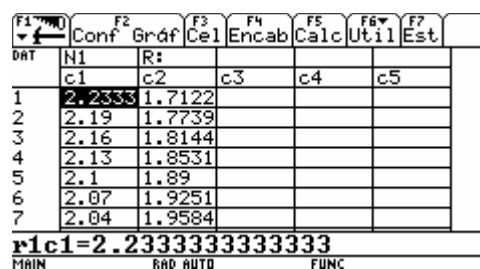


Fig. 6 Recogida de datos (Entorno numérico)

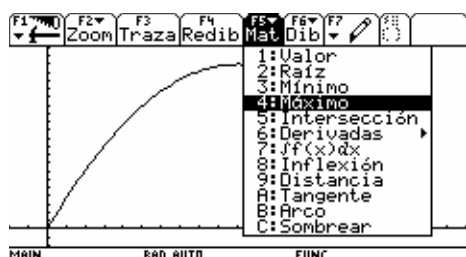


Fig. 7 Representación de los datos en una gráfica (Entorno gráfico)

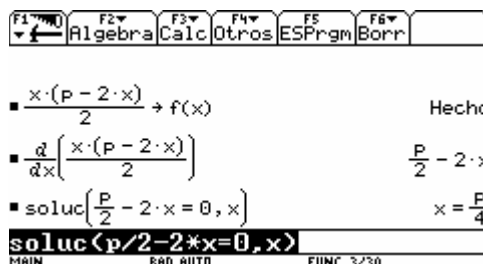


Fig. 8 Resolución analítica (Entorno simbólico)

En la cuarta y última sesión se proporcionó un problema, más complejo que el realizado en la sesión anterior, para que lo resolviesen utilizando los diferentes entornos de trabajo utilizados, al objeto de analizar la capacidad de los estudiantes para resolver el problema propuesto utilizando los diferentes entornos que nos ofrece la calculadora (simbólico, gráfico, geométrico, numérico).

La actividad propuesta era la siguiente:

Cortando una soga de longitud L en dos trozos, construimos un cuadrado y un círculo. ¿Dónde debe hacerse el corte para conseguir que la suma de las áreas del cuadrado y el círculo sea máxima/mínima?

Para resolver la actividad los estudiantes tenían una hoja en la que podían anotar las operaciones que fueran necesarias así como las dudas que les fueran surgiendo tanto sobre el uso de la calculadora, como sobre el propio problema.

En una sesión posterior, se presentó a los estudiantes un cuestionario al objeto de analizar los estados de opinión sobre el uso de la Calculadora Simbólica.

Análisis e interpretación de los resultados

Para el análisis de la experiencia se utilizaron varios instrumentos:

- Las producciones de los alumnos, tanto el material guardado en la calculadora como las notas presentadas en el papel.
- El cuestionario de opinión, en el que tratamos de detectar:
 - Qué dificultades habían tenido en el manejo de la calculadora simbólica.
 - Qué utilidad tenía la calculadora simbólica para la comprensión de los conceptos.
 - Qué utilidad tenía la calculadora simbólica para ellos, como futuros profesores de matemáticas
- Las notas de la observación directa del trabajo de los estudiantes mientras resolvían la actividad propuesta en la cuarta sesión.

En relación con nuestro primer instrumento de análisis, conviene señalar que ninguno de los alumnos tuvo en cuenta el rango de la solución y que en uno de los grupos de trabajo sólo se buscaba la solución mínima hasta que al cabo de cincuenta minutos una de la integrantes del grupo leyó de nuevo el enunciado y se percató que pedía tanto la solución máxima como mínima.

Mediante la observación directa pudimos ver que no todos los alumnos empezaron a resolver la actividad de forma geométrica utilizando la calculadora (en la instrucción el problema se resolvió de esta forma), hubo algunos que empezaron resolviendo el problema analíticamente con lápiz y papel.

En las figuras 9, 10, 11, 12, se muestran algunos ejemplos de los pasos que siguieron los alumnos al desarrollar la tarea propuesta:

$$f(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{12 - 2x + x^2}{4 \cdot \pi}$$

$$f'(x) = \frac{x+4}{8 \cdot \pi}$$

$$\text{soluc}\left(\frac{x+4}{8 \cdot \pi} = 0, x\right) \quad x = \frac{4 \cdot 1}{\pi + 4}$$

$$\text{approx}(x=4 \cdot 1 / (\pi + 4))$$

Fig. 9 Cálculo de la derivada de la función y cálculo de sus raíces

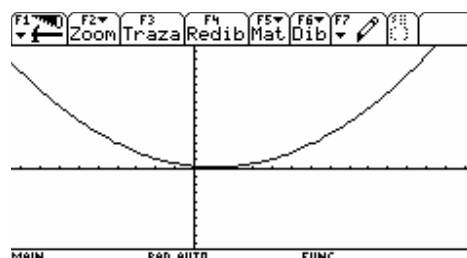


Fig. 10 Representación gráfica de la función a optimizar

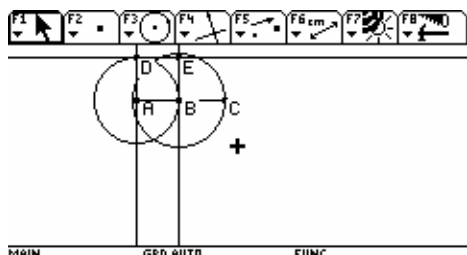


Fig. 11 Construcción de un cuadrado

N1	R1	c1	c2	c3	c4	c5
3	.69912	1.4096				
4	.7309	1.3915				
5	.76268	1.3737				
6	.79446	1.3561				
7	.82623	1.3388				
8	.85801	1.3218				
9	.88979	1.3051				

Fig. 12 Recogida de datos

Analizando las respuestas al cuestionario se puede decir que:

En cuanto a su manejo, la mayoría consideró que no era fácil pero con una buena instrucción se podrían llegar a dominar las instrucciones básicas:

“Sin un manual detallado de cada aplicación y sin la ayuda del profesor es difícil”

“Pienso que a medida que se va profundizando e el manejo de la calculadora, va siendo más sencillo”

“Fácil, porque se parece mucho al manejo de un ordenador, y sólo hace falta conocer algunas teclas”

En cuanto a su utilidad para la comprensión de los conceptos piensan en general, que es útil pero siempre como un método de trabajo complementario:

“Creo que los conceptos toman mayor importancia que los cálculos”

“(La calculadora) Hace que te centres en la cuestión a resolver pudiendo realizar los cálculos complementarios e incluso los propios cálculos de la actividad con la calculadora”

“Los cálculos siguen siendo importantes porque necesitas ser consciente de que las operaciones y resultados que obtienes están de acuerdo con el problema”

Como futuros profesores de matemáticas:

“Pienso que al principio pensarán que el uso de la calculadora les va a hacer todo el problema, pero luego se darán cuenta de que simplemente es una herramienta de cálculo y que tienen que dominar bien los conceptos”

“Abrir mi mente a otros campos (ya que soy reacia a trabajar con nuevas tecnologías porque me cuesta mucho”

“No cabe duda de que aporta mucho, pero es más un sistema de apoyo”

Conclusiones y recomendaciones

Del análisis de la experiencia desarrollada y dentro de la limitaciones propias de un estudio de estas características, destacaremos que a pesar de haber recibido

con anterioridad instrucción con el Geometer`s Sketchpad durante 15 sesiones de una hora, los estudiantes no mostraban la destreza esperada en el manejo de la calculadora simbólica. Como no sabían manejarla bien, optaron por la resolución analítica de la tarea propuesta utilizando lápiz y papel.

A partir del análisis del cuestionario se puede añadir que el período de formación debería ser más largo y espaciado, dejando a los estudiantes tiempo para familiarizarse con la calculadora y proponer ejercicios más sencillos en su resolución antes del problema propuesto.

Del análisis de la resolución del problema observamos que los alumnos tienen muy interiorizado un método de resolución (analítico) del que les es difícil deshacerse. Tomamos como ejemplo el hecho de que en un grupo sólo buscasen la solución mínima (en la mayoría de los problemas de optimización propuestos a los alumnos se busca la solución máxima o mínima exclusivamente, y no la posibilidad de que existan ambas).

Como recomendación general, pensamos que no basta con dedicar solamente 4 horas a la formación, pese a que en nuestro caso, los estudiantes tienen un trabajo de Geometría Dinámica. Hemos visto que los alumnos se sienten más seguros resolviendo el problema en el entorno analítico.

Referencias bibliográficas

- Artigue, M. (2002) Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical learning* 7, 245-274.
- Camacho, M.; Santos, L. M. (2004) a) La relevancia de los problemas en el aprendizaje de las Matemáticas a través de la resolución de problemas. *Números* 58, 45-60
- Camacho, M.; Santos, L. M. (2004) b) El estudio de Fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas* 37:105-122
- Camacho, M.; González-Martín, A. (1998) Una aproximación a los problemas de optimización en libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92 *Aula. Revista de Enseñanza e Investigación Educativa*. 10, 137-152
- Guin, D.; Ruthven, K.; Trouche, L. (eds.) (2005) *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators*. Springer. New York
- Quesada, A.; Edwards, T.; Carroll, J. (2004) *Technology to support differentiated problem-solving experiences for mathematics students*
- Trouche, L. (2000) La Parabole du Gaucher et de la Casserole à bec verseur : étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices symboliques. *Educational Studies in Mathematics* 41, 239-264
- Trouche, L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 9, 281-307