



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 2

“SEGUIMOS CON LOS NÚMEROS Y LAS FUNCIONES”

COMUNICACIONES

UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD	571
UN MÉTODO ALTERNATIVO DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE PARA FUNCIONES CÓNCavas SIN DERIVAR.....	577
EL "POR QUÉ" DE LAS SOLUCIONES "NO VÁLIDAS" AL ELEVAR AMBOS MIEMBROS DE UNA ECUACIÓN AL CUADRADO	583
LA RECTA NUMÉRICA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA	589

UN ENFOQUE CONSTRUCTIVISTA EN LA ENSEÑANZA DE LOS CONCEPTOS DE LÍMITE Y CONTINUIDAD

Eleonora Catsigeras¹, Karina Curione², Marina Míguez³

13 de abril de 2005

RESUMEN

Se analizan procesos cognitivos del aprendizaje significativo, desde un enfoque constructivista, centrado en las prácticas docentes aplicadas a la enseñanza de los conceptos de límite de sucesiones y continuidad de funciones, en un primer curso de Cálculo del semestre de ingreso a la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (Uruguay).

1. INTRODUCCIÓN

Paradójicamente la mayoría de las dificultades en el aprendizaje de los contenidos del primer curso de Cálculo al ingreso a la carrera universitaria de la Facultad de Ingeniería, se encuentra en aquellos contenidos de la asignatura que son revisión de los últimos años de Enseñanza Secundaria: límite, continuidad, topología en la recta, sucesiones y series, entre otros. Una de las razones es la dificultad intrínseca de dichos temas; aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos abstractos que en apariencia quedan desconectados de las vivencias cotidianas de los estudiantes.

Las teorías constructivistas del aprendizaje (Piaget 1929, Vigotsky 1930, Ausubel 2002, [1]) conciben el conocimiento como resultado de la interacción entre la nueva información y la información previa, construyendo modelos para interpretar la nueva información y no sólo recibirla.

Ausubel formula en 1963 la teoría del aprendizaje significativo, una propuesta teórica influyente en el enfoque constructivista. [2] Posteriormente la teoría del cambio conceptual, planteada en el modelo clásico de Posner y Strike (1982) aborda un aspecto esencial de la psicología cognitiva al centrarse en los procesos de transformación del conocimiento, pero aportando una perspectiva aplicada a la educación, con estudios que han llevado a concebir el aprendizaje de los conceptos científicos como un proceso de cambio conceptual. Desde esta última perspectiva aplicada a la educación en las ciencias, uno de los objetivos centrales consiste en transformar, no sustituir sino cambiar, las nociones cotidianas y superficiales con que los alumnos llegan a clase de modo de adquirir los conceptos académicos y científicos. La teoría del cambio

¹ Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL) de la Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565 Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

² Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: curione@fing.edu.uy

³ Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: mmiguez@fing.edu.uy

conceptual en ese sentido se refiere al pasaje de las ideas previas a los conocimientos académicos que se pretende enseñar. [5]

A diferencia del modelo clásico de Posner y Strike sobre la teoría del cambio conceptual, en los modelos contextualistas (Linder, 1987) no se pone énfasis en cambiar las ideas previas sino en potenciar las capacidades de los sujetos para distinguir las distintas concepciones y la manera más correcta de aplicarlas en diversos contextos: el saber aplicar los distintos conocimientos en distintos contextos.

Una de las limitaciones del aprendizaje memorístico o verbalista, si no va acompañado de un componente deliberado de aprendizaje significativo, es que se saturan las capacidades cognitivas. “*El potencial cognitivo humano a diferencia de un ordenador no puede manejar con mucha eficacia información que se enlaza con él de manera literal.*” [2] Esto adquiere particular relevancia en el aprendizaje de la Matemática en el ámbito universitario; requiere tanto de parte del alumno como del docente estrategias que promuevan el enlace significativo de los conceptos, como forma de propiciar un aprendizaje con sentido para el alumno. La significación personal implica que el alumno atraviese un proceso de construcción personal de la información recibida, tendiente a romper con un modelo de aprendizaje repetitivo donde el alumno asimila para luego reproducir información que a corto plazo perderá, o conservará como conocimiento inerte.

Numerosos estudios acuerdan en subrayar que el aprendizaje de conceptos científicos exige como condición fundamental, partir de los conceptos espontáneos con que los alumnos llegan al aula y que se han originado en la vida cotidiana, por fuera del ámbito académico. No obstante es sin duda imprescindible la formalización racional y simbólica en alguna etapa de la enseñanza de los contenidos. Pero debe suceder y no preceder a los procedimientos constructivistas. En las secciones siguientes se detallará un poco más algunos aspectos de las teorías del aprendizaje expuestas antes, en el contexto aplicado a la enseñanza de los conceptos matemáticos de límite de sucesiones y continuidad de funciones, en el curso de Cálculo al ingreso a la Universidad.

2. EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE SUCESIONES

Resulta artificial y limitante introducir el concepto de *sucesión* restringiéndose al espacio de puntos de una recta. Resulta más amplio y fácil de comprender comenzar por sucesiones en un conjunto cualquiera, por ejemplo como subconjunto numerado de puntos de un plano, (que puede ser en el mapa de una región o de una ciudad, para fijar ideas), o el conjunto de personas de un país (que pueden estar ordenadas por su cédula de identidad).

El concepto matemático de sucesión es uno de esos pocos conceptos para los cuales el significado usual de la palabra en la lengua española coincide con el de la definición precisa matemática general.

(1) *Sucesión es un conjunto de cosas que se hallan o pasan una después de la otra* (diccionario Kapelusz de la Lengua Española).

(2) Definición matemática: *Sucesión es una descripción ordenada, según la ordenación natural⁴, de elementos de un conjunto no vacío cualquiera A* (en la que se admite repeticiones y ausencias de elementos de A).

Castorina plantea: “*Las ideas previas pueden ser un obstáculo o también pueden ser ideas precursoras*” [3] del concepto científico que se pretende introducir. Por una parte, en la definición matemática abstracta de sucesión, las ideas cotidianas son precursoras. Pero para eso es conveniente que no estén deformadas por la escolarización previa que

⁴ Ordenado según ordinales que son los números naturales: 1, 2, 3, ..., n, n+1, ...

suele definir sucesión de manera restringida y desconectada del significado usual y general en el lenguaje cotidiano. Por otra parte algunas otras ideas cotidianas constituyen un obstáculo, por ejemplo algunas ideas previas al concepto de límite de una sucesión.

La idea intuitiva pero precisa de límite es la siguiente: *En el paso n el término de la sucesión y todos los que siguen van a encontrarse tan cerca como se desee de su límite.* [4]

La idea previa errónea es el único modo de acercarse al límite consiste en avanzar hacia él de forma que en cada paso se esté más cerca del límite que en el paso anterior. Se cree que la aproximación al límite debe mejorar de un paso al siguiente, y que si esto no sucediera entonces la sucesión no podría ser convergente. El estudiante descarta equivocadamente el acercamiento al límite con sucesivos avances y retrocesos, creyendo que estos implican la oscilación permanente y la inexistencia de límite.

El concepto previo aunque equivocado es persistente y resistente. Cuesta convencer al estudiante de su falsedad. Aunque el alumno reconoce haber entendido un contraejemplo, no resulta fácil que asimile significativamente la afirmación de que no toda sucesión convergente es necesariamente monótona. La persistencia de las ideas previas fue señalada por diversos autores de las teorías de cambio conceptual en el aprendizaje. Pozo señala en [7] uno de los factores explicativos de la tenaz persistencia de las ideas previas: *“Tomando uno de los tantos términos que delimitan el concepto diremos que las ideas previas o espontáneas surgen de la actividad cotidiana del sujeto en un proceso de interacción con el entorno. Sirven entre otras cosas para predecir ese entorno.”* Es necesario lograr el cambio de las ideas cotidianas erróneas; para esto apelamos no solo a contraejemplos teóricos, sino a nuevas ideas cotidianas que los ilustren. Un medio, en el caso del límite de sucesiones no monótonas, puede ser por ejemplo el siguiente argumento informal pero preciso: *Se puede aproximar desde el sur al punto A del Ecuador, sin alcanzarlo nunca, caminando tres pasos hacia el norte, dos hacia el sur, y así sucesivamente tres hacia el norte, dos hacia el sur, cada vez pasos más cortos de modo de no alcanzar nunca al punto A pero de aproximarse a él, como límite asintótico, en infinitos pasos. La sucesión de pasos no es monótona y el límite sería A lateralmente por el Sur.*

Recordamos el planteo de Ausubel para quien la condición más importante para que el aprendizaje sea significativo es que pueda relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe. Consideramos que el ejemplo anterior tiende a esa dirección.

3. EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE CONTINUIDAD.

Al introducir el concepto de continuidad de una función en el aula suelen aparecer, en forma más o menos consciente, diversos conflictos cognitivos con ideas cotidianas y previas. Resulta difícil lograr el aprendizaje significativo del concepto de continuidad de una función, principalmente por la falta inicial de inteligibilidad para el alumno de la primera de las siguientes definiciones matemáticas precisas (aplicable a funciones reales de una variable real):

(3) Definición: *Un función $f: D \rightarrow C$ es continua en el punto a del dominio D si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (llamado módulo de continuidad) tal que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x - a| < \delta$*

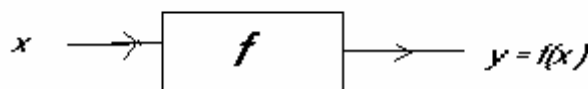
(4) Definición: *Una función $f: D \rightarrow C$ es continua si lo es en todos los puntos de su dominio D .*

La idea intuitiva previa con la que el estudiante accede al curso universitario es la de que “la gráfica de una función continua tiene un trazo continuo”. Eso es incorrecto ya

que depende de la conexión del dominio de la función. Para reconocer el conflicto puede plantearse la siguiente observación práctica: *Si el dominio está formado por dos intervalos disjuntos, la función puede ser continua aunque su trazo en la representación gráfica no puede realizarse sin levantar el lápiz.*

De acuerdo con las formulaciones de la teoría del aprendizaje significativo, la definición (3) presenta un desafío. Es usualmente repetido el concepto de continuidad de una función en un punto, tanto por estudiantes como por docentes, verbalmente y desestructuradamente, a lo sumo relacionándolo con propiedades de la gráfica de la función y con símbolos de implicación lógica. Pero creemos que no es significativamente comprendido el concepto, entre otros motivos, porque queda desconectado de ideas previas intuitivas y cotidianas. Veamos un ejemplo de cómo puede subsanarse este problema.

Ejemplo: Consideremos un aparato f (usemos la letra f de función), por ejemplo una caja con una puerta de entrada, por donde entra la variable independiente " X ", y una puerta de salida, por donde sale la variable dependiente " $Y = f(X)$ ".



--- Hay un valor deseado a la salida Y_0 para el cual la entrada debería ser exactamente X_0 . Es decir $f(X_0) = Y_0$. Ni la variable de entrada ni la de salida se pueden ajustar a valores exactos siempre, sino que hay errores, imprecisiones que hacen que el valor de X sea aproximadamente pero no necesariamente igual a X_0 y por lo tanto el valor de la salida $Y = f(X)$ sea aproximadamente pero no necesariamente igual a $Y_0 = f(X_0)$.

--- El técnico de mantenimiento del aparato debe satisfacer al cliente. El cliente evalúa cómo funciona la caja observando únicamente lo que sucede en la variable a la salida Y . En cambio el técnico acondiciona el aparato de modo de satisfacer la demanda del cliente, ajustando únicamente la variable de entrada X .

--- El cliente demanda que sea $Y = Y_0$, pero admite que la igualdad no se cumpla exactamente sino con un margen de error máximo $\varepsilon > 0$: $|Y - Y_0| < \varepsilon$.

--- El técnico entonces ajusta la variable de entrada, pero no puede siempre ajustarla de modo que $X = X_0$ exactamente. Se admite una tolerancia de variación a la entrada $\delta > 0$: $|X - X_0| < \delta$

--- Finalmente el técnico debe ajustar la entrada con una variación delta adecuada de forma que valga la siguiente premisa: $|X - X_0| < \delta$ IMPLICA $|Y - Y_0| < \varepsilon$. Significa que se ajusta la entrada con una variación adecuada que satisface la demanda del cliente.

Creemos que no alcanza con la exposición del docente de su propia idea cotidiana relacionada con el concepto a definir formalmente. Es necesaria una construcción reflexiva efectuada intra e interpersonalmente a los alumnos. Estas actividades han sido promovidas mediante un foro de discusión en la que los estudiantes preguntan, responden e intentan responder, moderado por el docente. Este foro establece una actividad y actitud social de los alumnos entre ellos y con el docente. Se aprende Matemática cuando se trata de justificar, sustentar y defender ante los otros los conceptos aprendidos. Desde la perspectiva de Vigotsky las formas superiores de conocimiento son socio-generadas. La atención, la memoria lógica, la formación de conceptos, la voluntad, se generan en el plano social y luego se desarrollan en el

psicológico. Incluso al convertirse en procesos psíquicos su naturaleza mantiene el rasgo cuasi-social: Hasta a solas el hombre ejercita funciones de comunicación. [6]

Como conclusión observamos que la definición precisa (3) planteada anteriormente es imprescindible en la enseñanza del concepto de continuidad de una función. No debe ser sustituida por las ideas cotidianas o intuitivas que se utilicen para ilustrarla. Pero debe proceder y no anteceder a la presentación constructiva de la idea que la ilustra. Y esta debe ser ajustada con precisión al concepto científico que se pretende ilustrar.

4. CONCLUSIONES

El racionalismo está implícito en la actitud observada frecuentemente de encarar como primera y a veces única estrategia de resolución o de demostración, tanto por docentes en sus exposiciones en clase, como por estudiantes en la resolución de problemas, el uso exclusivo de premisas lógicas racionales sobre los símbolos formales de las definiciones, apelando a la racionalidad lógica como calidad innata en el conocimiento.

El empirismo, el otro polo en las teorías filosóficas clásicas del conocimiento, también está implícito en la actitud pasiva, no menos frecuente en docentes y alumnos, de encarar el aprendizaje como una impresión de conocimientos provenientes del exterior en una mente rasa, a lo sumo bajo un sistema de estímulo y respuesta, y de encarar como primera y a veces única estrategia de resolución o de demostración la práctica del ensayo y error.

Ambos polos se manifiestan frecuentemente en los textos y las clases expositivas, acopladas al asociacionismo. Ambos, que son en realidad extremos de un continuo de actitudes frente al aprendizaje, son necesarias. Pero no son suficientes si hay poca o nula interacción continua con las actividades y actitudes sostenidas por las teorías constructivistas del aprendizaje.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- [1] Miguez, M; Curione, K: *Aprendizaje de las Ciencias*. Notas del curso de Formación Docente UEFI, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República Montevideo, 2004.
- [2] Ausubel, D: *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva*. Paidós. Barcelona, 2002.
- [3] Bixio, C: *Entrevista a José A. Castorina. Constructivismo. Una tesis epistemológica*. Revista Aula Hoy, N° 2, 1995
- [4] Catsigeras, E: *Elementos de topología usados en Cálculo. Parte I Espacios métricos. Parte II. Sucesiones. Notas para el curso de Cálculo 1*. IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, 2004.
- [5] Posner, J; Strike, K; Hewson, P; Gertzog, W *Acomodación de un concepto científico: Hacia una teoría del cambio conceptual*. (año 1988). En Porlan, R & cols (editores) *Constructivismo y enseñanza de las ciencias*. Diada. Sevilla, 2000.
- [6] Vigotsky, L: *Génesis de las funciones psíquicas superiores*. (año 1931). Obras escogidas III. Visor. Madrid, 1982.
- [7] Pozo, I: *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Morata, Madrid, 1993.

UN MÉTODO ALTERNATIVO DE LA CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA TANGENTE PARA FUNCIONES CÓNCAVAS SIN DERIVAR

Oleksandr Karelin, Carlos Rondero Guerrero, Anna Tarasenko
Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo

Resumen

Las nociones de límite y derivada de una función en un punto, son difíciles de comprender por parte de los alumnos de bachillerato y licenciatura. Las dificultades se encuentran precisamente en las definiciones de estas nociones, no en la aplicación de las reglas formales y en el uso de las fórmulas.

No se pretende sustituir a los métodos clásicos, sino más bien se propone un enfoque alternativo basado en métodos no tradicionales en los que se incluye un análisis del comportamiento de las funciones que posibilite a los estudiantes de matemáticas de diferentes niveles educativos, el entender mejor los conceptos básicos del cálculo y sus conexiones.

Empezamos con el análisis del método de Fermat, que existió antes de Leibnitz y Newton, [1-4]. Aquí se da una interpretación contemporánea del calculo diferencial [5].

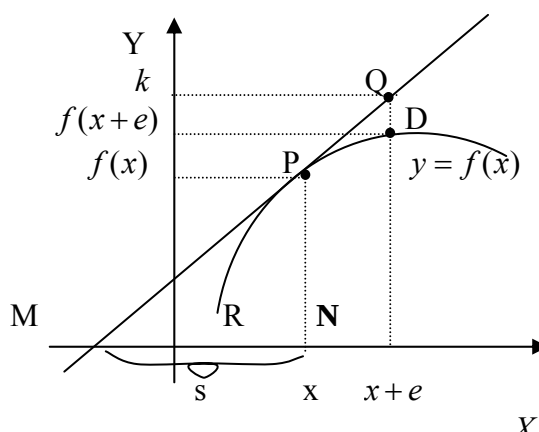


Figura 1

Por triángulos semejantes, obtenemos la siguiente igualdad

$$\frac{s+e}{s} = \frac{k}{f(x)}$$

Despejando s tenemos

$$s = \frac{ef(x)}{k - f(x)} \quad (1.1)$$

Fermat genera la pseudo-igualdad

$$k \sim f(x+e) \quad (1.2)$$

Nuestra interpretación.

Anotamos el incremento del argumento $\Delta x = (x + e) - x = e$, $\Delta x = dx = e$

y el incremento de la función

$$\Delta f = f(x+e) - f(x) \quad (1.3)$$

Al contar que $f(x)$ es una función diferenciable podemos escribir el incremento por dos partes,

$$\Delta f = df + o(e) \quad (1.4)$$

Parte lineal que es diferencial df y parte no lineal que es infinitamente pequeño de orden mas que uno $o(e)$, esto es, $\lim_{e \rightarrow 0} \frac{o(e)}{e} = 0$.

El diferencial de la función $y = f(x)$ en Figura 1 es:

$$df = k - f(x) \quad (1.5)$$

Escribimos la pseudo-igualdad (1.2), en otra forma: $f(x+e) - f(x) \sim k - f(x)$ y

$$\Delta f \sim df$$

De las fórmulas (1.3), (1.4), (1.5) obtenemos la igualdad cierta

$$k = f(x+e) - o(e) \quad (1.2^*)$$

En este sentido es necesario entender la pseudo-igualdad de Fermat.

Posteriormente Fermat sustituye k de (1.2) en la ecuación (1.1), y obtiene

$$s \sim \frac{ef(x)}{f(x+e) - f(x)} \quad (1.6)$$

Dividiendo por e el numerador y denominador el miembro derecho,

$$s \sim \frac{\frac{ef(x)}{e}}{\frac{f(x+e) - f(x)}{e}} \quad \text{se obtiene} \quad (1.7)$$

Vale la pena aclarar que si se sustituye k de (1.2*) en la ecuación (1.1), obtenemos la igualdad cierta

$$s = \frac{ef(x)}{f(x+e) - f(x) - o(e)} \quad (1.6^*)$$

Si hacemos las mismas operaciones obtenemos

$$s = \frac{\frac{f(x)}{e}}{\frac{f(x+e) - f(x)}{e} - \frac{o(e)}{e}} \quad (1.7^*)$$

Fermat factoriza e de la expresión $f(x+e) - f(x)$ y elimina este factor e ,

$$\frac{f(x+e) - f(x)}{e} = [\text{términos sin } e] + [\text{términos con } e],$$

$$s = \frac{f(x)}{[\text{terminos sin } e] + [\text{terminos con } e]}$$

luego de la expresión restante él elimina términos que contienen e

$$s = \frac{f(x)}{\text{terminos sin } e} \quad (1.8)$$

Damos interpretaciones de las transformaciones a la fracción

$$\frac{f(x+e)-f(x)}{e} = \frac{df + o(e)}{e} = \frac{df}{e} + \frac{o(e)}{e} = \frac{df}{dx} + \frac{o(e)}{e}$$

y sentido de los corchetes

$$[\text{términos sin } e] = \frac{df}{dx} = f'(x), \quad [\text{términos con } e] = \frac{o(e)}{e}.$$

La eliminación los términos con e corresponde el calculo del límite $\lim_{e \rightarrow 0} \frac{o(e)}{e} = 0$.

Podemos escribir la formula (1.8) con la derivada

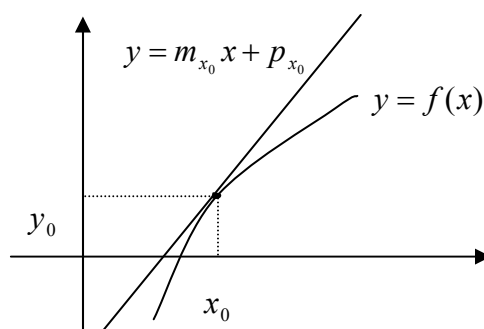
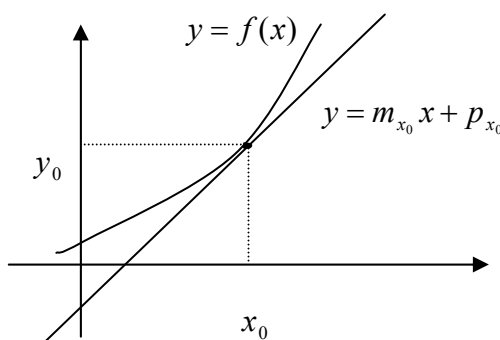
$$s = \frac{f(x)}{f'(x)} \quad (1.8^*)$$

Observamos que la formula (1.8*) para la subtangente s , cuando $f(x) \neq 0$, sigue de (1.1) o (1.7*) si se usa la noción de límite, se obtiene,

$$s = \frac{f(x)}{\lim_{e \rightarrow 0} \frac{f(x+e)-f(x)}{e} - \lim_{e \rightarrow 0} \frac{o(e)}{e}}.$$

Método propuesto [6].

Considérese a las funciones $y = y(x)$ con $x \in D$, $D = [a, b]$ para las cuales en cada punto (x_0, y_0) , $x_0 \in D$ de su gráfica $L : \{(x, y(x))\}$ existe una y sólo una recta $R(x_0, y_0) : y = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$ que pasa por el punto (x_0, y_0) , no tiene otros puntos comunes con la grafica L y está ubicada arriba o abajo con respecto de la recta $R(x_0, y_0)$. La clase de tales funciones vamos a denotar con C . La clase de tales rectas para una función, $y = f(x)$ se denota como $T(f)$ y se les llamará rectas tangentes.



Afirmación 1.

Se escoge una función $y = f(x)$ de la clase C y un punto (x_0, y_0) , $y_0 = f(x_0)$. Una recta $R(x_0, y_0) : y = m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}$ es la recta de la clase $T(f)$ en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$ sí y sólo sí la función $y = F(x)$, $F(x) = f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}]$ tiene su punto mínimo o punto máximo en $x = x_0$.

a) El punto $x = x_0$ es un punto mínimo para $y = F(x)$ entonces se cumple la desigualdad

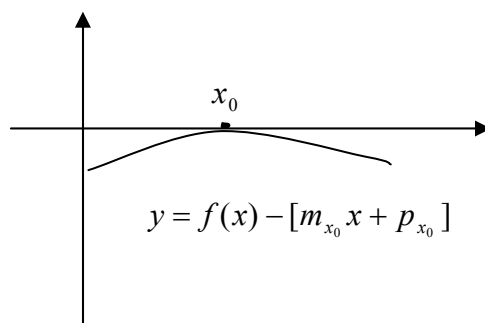
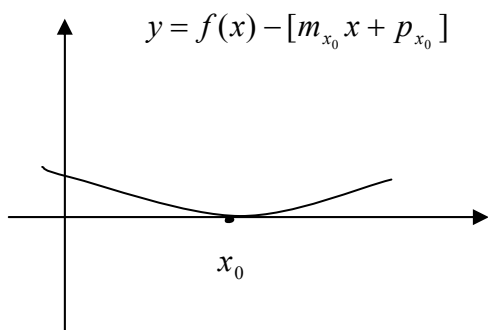
$$(*) \quad F(x) \geq F(x_0) \quad \text{o} \quad f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}] \geq f(x_0) - [m_{x_0} \cdot x_0 + p_{x_0}]$$

Una recta $R(x_0, y_0) : y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es de la clase $T(f)$ en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$ si y solo si, la desigualdad (*) se cumple alrededor de $x = x_0$.

b) El punto $x = x_0$ es un punto máximo para $y = F(x)$ entonces se cumple la desigualdad

$$(**) \quad F(x) \leq F(x_0) \quad \text{o} \quad f(x) - [m_{x_0} \cdot x + p_{x_0}] \leq f(x_0) - [m_{x_0} \cdot x_0 + p_{x_0}]$$

Una recta $R(x_0, y_0) : y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es de la clase $T(f)$ en el punto (x_0, y_0) para $y = f(x)$ si y sólo si, la desigualdad (**) se cumple alrededor de $x = x_0$.



Para construir $R(x_0, y_0) : y = m_{x_0} \cdot x + b_{x_0}$ es necesario hallar m_{x_0} de (*) o de (**) y calcular p_{x_0} por la fórmula $p_{x_0} = f(x_0) - m_{x_0}x_0$. Si

m_{x_0} es un número tal que la desigualdad (*) o (**) se cumple alrededor de $x = x_0$, entonces $x = x_0$ es el punto mínimo o máximo para $y = F(x)$ y m_{x_0} es el pendiente de la recta $R(x_0, y_0)$.

Usando esta conexión entre los puntos mínimos y máximos y la recta tangente de una función de clase C , se propone hallar la recta tangente de algunas funciones simples, para lo cual se considerarán ejemplos que incluyen problemas específicos así como las dificultades de la aplicación del método propuesto a las funciones elementales.

Sea la función $y = x^3$, vamos a encontrar una ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $(1,1)$ sin hacer uso de la derivada.

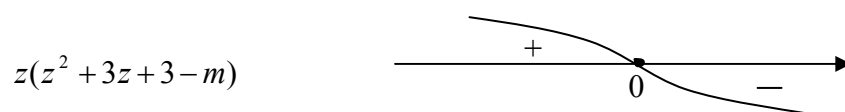
Según la Afirmación 1, función $y = x^3 - [mx + b]$ debe tener su punto mínimo local en $x = 1$, debe cumplirse la desigualdad

$$x^3 - mx - b \geq 1^3 - m \cdot 1 - b \quad \text{o} \quad (z+1)^3 - m(z+1) \geq 1 - m, \quad \text{en una vecindad de } z = 0.$$

Después de las operaciones tenemos

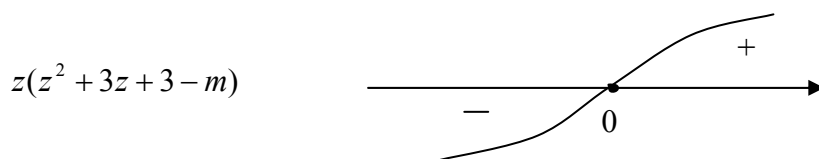
$$z^3 + 3z^2 + 3z - mz \geq 0 \quad \text{o} \quad z(z^2 + 3z + 3 - m) \geq 0.$$

La expresión $(z^2 + 3z + 3 - m)$ es negativa alrededor de $z = 0$, cuando $m < 3$



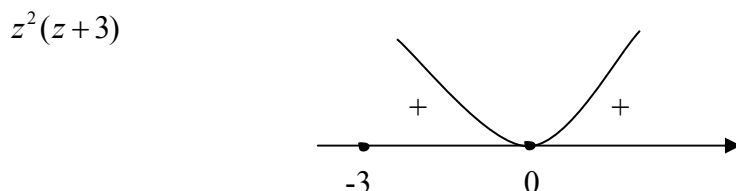
la desigualdad no se cumple alrededor $z = 0$.

La expresión $(z^2 + 3z + 3 - m)$ es positiva alrededor de $z = 0$, cuando $m > 3$



la desigualdad $z(z^2 + 3z + 3 - m) \geq 0$ no se cumple alrededor $z = 0$.

Cuando $m = 3$ la desigualdad toma la forma $z^2(z + 3) \geq 0$



Esta desigualdad se cumple alrededor de $z = 0$.

De aquí tenemos $m = 3$, y la resolución del problema $y = 3x - 2$.

El manejo de tales técnicas puede ayudar a los estudiantes de matemáticas de diferentes niveles educativos a asimilar métodos de análisis sobre características gráficas de las funciones.

El material presentado sirve para entender más profundamente a los conceptos fundamentales del cálculo y algunas de sus articulaciones entre sí.

BIBLIOGRAFIA

1. Boyler, Carl y Uta Merzbach
A History of Mathematics, Nueva York: John Wiley, 1989
2. Edwards, C.H., *The Historical development of the Calculus*, Nueva York: Springer-Verlag, 1979
3. Eves, Howard, *An introduction to the History of mathematics*, 6a. ed., Nueva York: Saunders, 1990
4. Kline, Morris *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Nueva York: Oxford University Press, 1972
5. Stewart, J. *Calculus: Early Transcendentals*, International Thomson Publ. Inc., 1999
6. Rondero, C., Karelin, A., Tarasenko, A., (2004), *Métodos alternativos en la búsqueda de los puntos críticos y derivadas de algunas funciones*, Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Vol. 17, pp. 821-827.

EL "POR QUÉ" DE LAS SOLUCIONES "NO VÁLIDAS" AL ELEVAR AMBOS MIEMBROS DE UNA ECUACIÓN AL CUADRADO

Abel Martín

IES Pérez de Ayala de Oviedo - Asturias

Presentamos el resultado de una experiencia llevada a cabo en el aula con alumnos de 15/16 años, de 4º de ESO, opción B, donde podremos observar diferentes estrategias educativas que han surgido con la aparición de las nuevas tecnologías, para afrontar la enseñanza de las Matemáticas. Comprobaremos la posibilidad de demostrar de forma "gráfica" contenidos realizados con las matemáticas tradicionales y que siempre nos hemos tenido que creer porque el "profesor" lo decía, pero que no llegamos a comprender jamás:



¿Por qué al elevar al cuadrado ambos miembros de una ecuación podemos obtener soluciones NO VÁLIDAS?

Al modificar los procedimientos de enseñanza; propondremos una nueva organización de la clase, coexistiendo, de forma simultánea, la matemática "tradicional" con otra más "innovadora", incluyendo nuevos tipos de actividades ALTERNATIVAS donde la reflexión, la toma de decisiones y la aplicación sean el objetivo fundamental.

Introducción.

La Organización de la enseñanza de las Matemáticas han de cambiar inevitablemente sus objetivos, procedimientos y metodología para adecuar el impacto de la aparición de las nuevas tecnologías, entre las que vamos a destacar los nuevos modelos de máquinas de calcular, por su sencillez, pequeño tamaño, manejabilidad y precio, tal y como se está haciendo en todos los países "desarrollados".

Este ha sido el motor fundamental que nos ha llevado a realizar esta experiencia "piloto" en el IES Pérez de Ayala de Oviedo (España), con alumnos de 15-16 años, utilizando la metodología ClassPad.

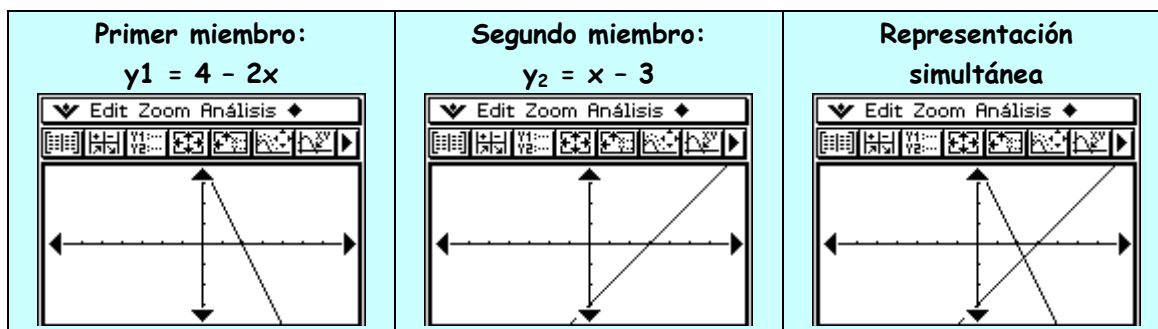
Nociones previas

Recordemos que "resolver una ecuación" es buscar el valor de "x" que verifique la igualdad del enunciado; veamos una ecuación, que resolveremos gráficamente:

$$4 - 2x = x - 3$$

Consideraremos cada uno de los miembros de la ecuación como una función independiente y representaremos independientemente las 2 funciones para observar qué valores toma. Luego representaremos simultáneamente las 2 gráficas para observar cuándo $y_1 = y_2$:

$$y_1 = 4 - 2x \qquad y_2 = x - 3$$



Para conocer el punto exacto que verifica que $y_1 = y_2$ averiguamos el punto de corte de ambas rectas:

$$(2.3333333333... , -0.6666...)$$

Interpretación de dichos resultados: para $x = 2.3333...$ ambas funciones alcanzan el mismo valor $(-0.666666...)$; es decir, la ecuación se verifica para $x = 2.3333...$

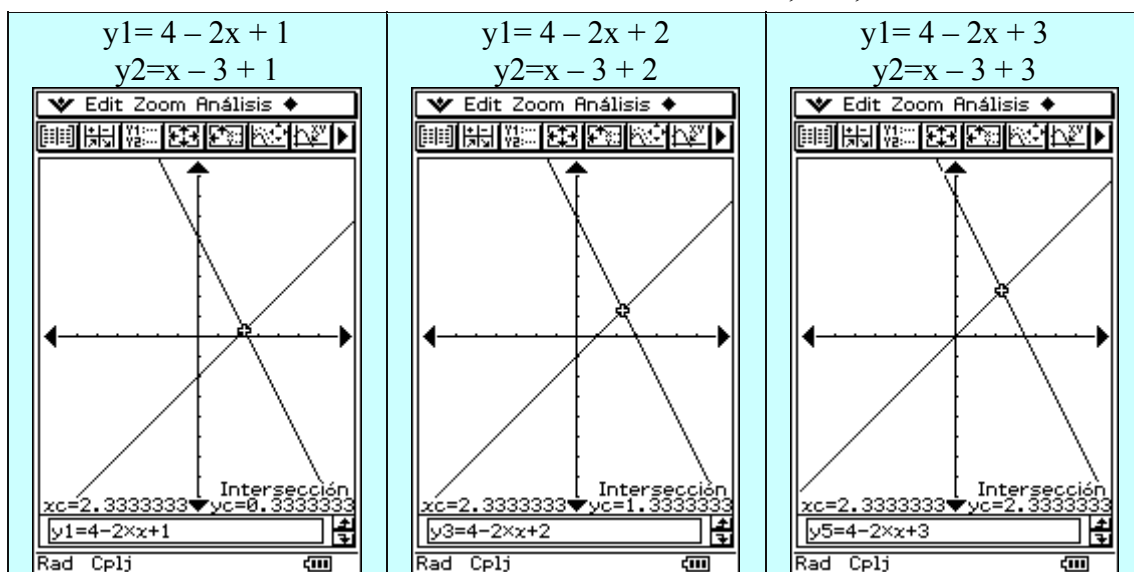
ANALICEMOS QUÉ LE PASA A UNA ECUACIÓN CUANDO SE LE APLICA UNA MISMA OPERACIÓN A AMBOS MIEMBROS:

SUMAR - RESTAR

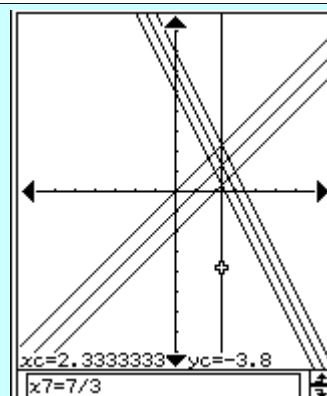
Sea la ecuación $4 - 2x = x - 3$

$$y_1 = 4 - 2x ; \quad y_2 = x - 3$$

Sumamos a ambos miembros diferentes cantidades $+1, +2, +3$



Los valores que toman las funciones en cada momento son distintos pero el valor de "x" donde se cortan sigue siendo el mismo, es decir, la solución de la ecuación no varía.

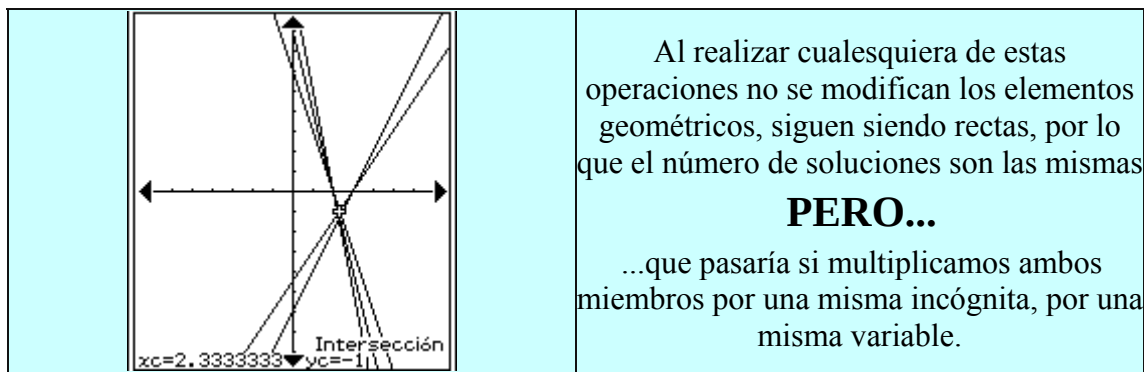


MULTIPLICAR

$$y_1 = 4 - 2x ; \quad y_2 = x - 3$$

Multiplicamos ambos miembros por diferentes cantidades $\cdot 1.5$, $\cdot 2$, $\cdot 2.5$

Los valores que toman las funciones en cada momento son distintos pero el valor de "x" donde se cortan es el mismo, es decir, la solución de la ecuación no varía.



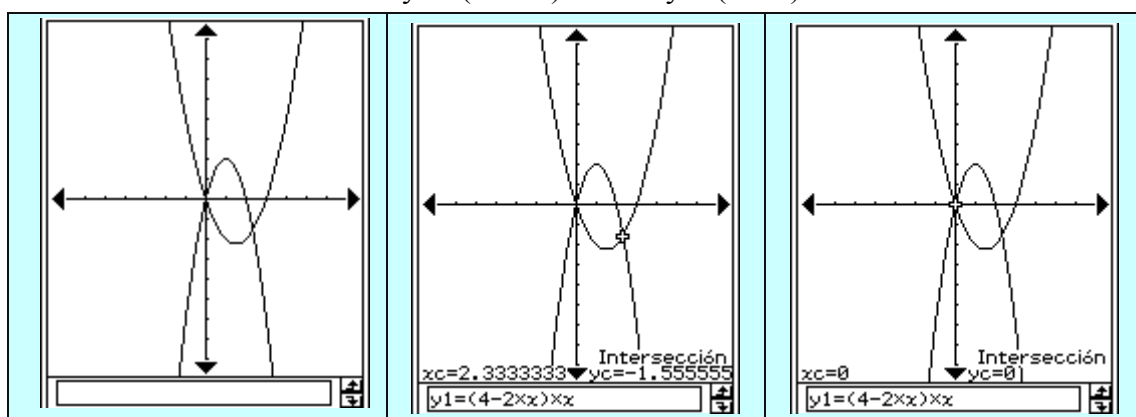
Sea la ecuación $4 - 2x = x - 3$

$$y_1 = 4 - 2x ; \quad y_2 = x - 3$$

Multiplicamos ambos miembros por diferentes cantidades por "x"

$$(4 - 2x) \cdot x = (x - 3) \cdot x$$

$$y_1 = (4 - 2x) \cdot x \quad y_2 = (x - 3) \cdot x$$



Al multiplicar por "x" transformamos cada función en una de un grado superior y, por lo tanto, adoptará una nueva forma. Así, el número de soluciones (**puntos de corte**) aumenta, siendo una de ellas la misma pero otra será **NO VÁLIDA** en la ecuación de partida.

$$x = 0 \quad \text{NO VÁLIDA} \quad x = 2.3333 \quad \text{VÁLIDA}$$



"Eleva al cuadrado es un recurso muy utilizado en la resolución de ecuaciones irracionales"

Veamos unos ejemplos que nos ilustren estas cuestiones realizadas y utilizadas habitualmente en la matemática tradicional y así comprender los resultados obtenidos:



Práctica 1

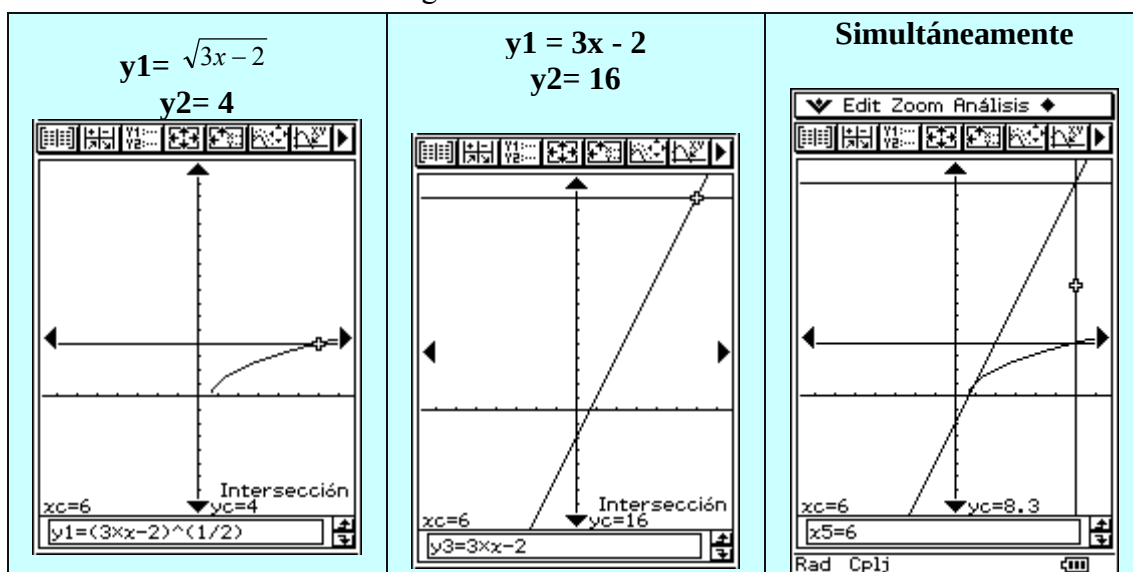
Resuelve la ecuación $\sqrt{3x-2} = 4$

Método I Lápiz y papel

Arch Edit Insert. Acción Pct. 1 $\sqrt{3x-2} = 4$ Método I Con lápiz y papel Elevamos ambos miembros al cuadrado $(\sqrt{3x-2})^2 = 4^2$ $3x-2=16$ $3x=18$ $x=6$ Veamos si este resultado se ha producido como consecuencia de elevar ambos miembros al cuadrado Algeb Decimal Cplj Rad	Arch Edit Insert. Acción Sustituimos en el enunciado $\sqrt{3x-2} = 4$ para $x=6$ Comprobación $\sqrt{3 \cdot 6 - 2} = 4$ $4=4$ Algeb Decimal Cplj Rad
--	---

$x = 6$ SOLUCIÓN VÁLIDA

Método II Resolución gráfica



Aunque por métodos algebraicos originamos modificaciones en las funciones, con sus correspondientes cambios de comportamiento, según se puede ver en sus gráficas, sigue manteniéndose el valor de "x" ($x = 6$) en el punto de corte.



Práctica 2

Método I Lápiz y papel

Act. 2 $\sqrt{7-3x} - x = 7$ Método I Con lápiz y papel $\sqrt{7-3x} = 7+x$ Elevamos ambos miembros al cuadrado $(\sqrt{7-3x})^2 = (7+x)^2$ $7-3x = 49 + x^2 + 14x$ $x^2 + 17x + 42 = 0$ Resolvemos la ecuación de segundo grado Solve $x = -14 ; x = -3$	$x = -14 ; x = -3$ Veamos si estos resultados se han producido como consecuencia de elevar ambos miembros al cuadrado Sustituimos... $\sqrt{7-3 \cdot (-14)} - (-14) = 7$ No Solution $\sqrt{7-3 \cdot (-3)} - (-3) = 7$ $7 = 7$
---	--

$x = -14$ SOLUCIÓN NO VÁLIDA

$x = -3$ SOLUCIÓN VÁLIDA

Método II Resolución gráfica

$y_1 = \sqrt{7-3x}$ $y_2 = 7+x$ xc=-3 yc=4 Intersect $y_1 = (7-3xx)^{(1/2)}$	$y_1 = 7-3x$ $y_2 = 49 + x^2 + 14x$ xc=-3 yc=16 Intersección $y_3 = 7-3xx$	$y_1 = 7-3x$ $y_2 = 49 + x^2 + 14x$ xc=-14 yc=49 Intersección $y_3 = 7-3xx$
Por métodos algebraicos originamos modificaciones en las funciones, con sus correspondientes cambios de comportamiento, según se puede ver en sus gráficas. Aunque sigue manteniéndose el valor de "x" ($x = -3$) en el punto de corte, aparece uno nuevo ($x = -14$) que se desecha como solución a la ecuación inicial. $x = -3$ SOLUCIÓN VÁLIDA $x = -14$ SOLUCIÓN NO VÁLIDA		Edit Zoom Analysis xc=-3 yc=-9.602166 $x_5 = -3$ Rad Cplx

EJERCICIOS DE CONSOLIDACIÓN:

Actividad 1: Resuelve la ecuación $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-4} = 1$

SOLUCIÓN: En esta ecuación se podría observar que obtenemos una única solución, pero que no es válida.

Actividad 2: Resuelve la ecuación $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x-3} = 3$

SOLUCIÓN: En esta nueva ecuación obtendríamos 2 soluciones, y las 2 serían válidas.

Al elevar al cuadrado una función pasa a ser de grado superior, con las modificaciones geométricas correspondientes, que hacen que su forma pueda ser diferente y, por lo tanto, los puntos de corte pueden ser iguales, distintos o más numerosos. Es por ello que hay que verificar cuál de los valores obtenidos sigue verificando la ecuación inicial.

Reflexión final:

La inclusión de estas nuevas herramientas educativas matemáticas de última generación ha supuesto un enriquecimiento en la adquisición de conceptos y en la búsqueda de métodos alternativos a los "tradicionales", posibilitando una metodología "más innovadora" que se ha traducido en unos mejores resultados académicos con respecto a los correspondientes grupos "testigo", donde no se han utilizado en ningún momento este tipo de máquinas.

Es hora de comenzar a derribar esos "muros infranqueables" que presenta la enseñanza secundaria, y no digamos la primaria, esclava de los algoritmos y del cálculo mecánico que, como profesores, vamos transmitiendo de generación en generación, y busquemos ese objetivo fundamental que ha de ser:

¡¡ ENSEÑAR A PENSAR !!

Recordando a Miguel de Guzmán, quien con sus **enseñanzas** me hizo comprender la importancia de las **demostraciones visuales** en la práctica matemática diaria del aula.



Ampliación de contenidos, una vez finalizadas las XII JAEM, en www.classpad.tk

LA RECTA NUMÉRICA EN LOS LIBROS DE TEXTO DE LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA

Alicia Bruno y Noemí Cabrera
Universidad de La Laguna

1. Introducción

Se presenta un estudio de cómo trabajan y utilizan la recta numérica los libros de texto de tres editoriales en España (Edebé, Santillana y SM) en los cursos de la enseñanza obligatoria (Primaria y Secundaria), en las unidades didácticas de números y álgebra.

El uso de la recta numérica no es fácil para muchos estudiantes de primaria y secundaria. En los trabajos de Carr y Katterns (1984) y Ernest (1985) se mostraron evidencias de que la mayoría de los estudiantes de primaria no comprenden los principios en los que se basan las representaciones en la recta de las operaciones de suma y resta de números naturales. También con números negativos los trabajos realizados muestran que la recta no es un modelo obvio para los estudiantes y que necesita de un proceso de instrucción en el aula para su correcto uso (Bruno y Martínón, 1997, Bruno y Cabrera, 2005, Gallardo y Romero, 1999).

Las investigaciones citadas nos llevaron a plantear un estudio del tratamiento que recibe la recta en los libros de textos de la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria, en principio, en tres editoriales, aunque aspiramos a ampliarlo. El análisis se realizó con 10 libros de cada editorial de las ya citadas (un libro de cada curso de Primaria y Secundaria) del actual Sistema Educativo. Aunque la recta suele aparecer en diferentes contenidos (números, funciones, medida, gráficos estadísticos...), en este trabajo nos centramos en sus apariciones en los temas de números y de álgebra, ya que en éstos debe explicarse los principios en los que se basa el modelo de la recta.

2. Objetivos y Metodología

Los principales objetivos que nos planteamos en este trabajo son los siguientes:

1. Estudiar en qué conjuntos numéricos (N , Z , Q y R) y con qué frecuencia se utiliza la recta numérica en la Educación Primaria y Secundaria Obligatoria.
2. Analizar para qué aspectos numéricos y con qué continuidad se emplea la recta: concepto, operaciones u orden.
3. Distinguir cómo son las representaciones utilizadas en la recta para los tres aspectos del objetivo 2. Estudiar los tipos de representaciones, el uso de rectas horizontales o verticales, el uso de contextos asociados a las representaciones y las estructuras de los problemas verbales que se representan con la recta.

Concepto de número

En el aspecto de *concepto de número* entendemos las representaciones de los números cuando no están asociados a ninguna operación ni al orden. Estudiamos si las representaciones en la recta se usan para “colocar los números” (representar los números de manera aislada) o como apoyo para “estimar”. Además, diferenciamos si los números se representan con puntos o con flechas y si las rectas usadas son horizontales, verticales o ejes cartesianos.

Suma y resta

En la suma y resta distinguimos si las representaciones utilizadas son del tipo *puntos-flecha* (ver figura 1) o del tipo *tres flechas* (ver figura 2). En ocasiones, estas

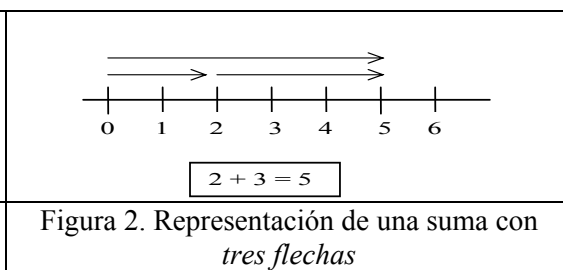
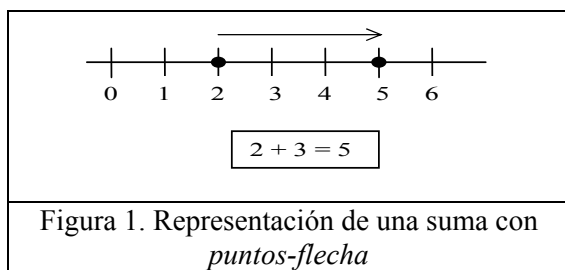
representaciones pueden venir acompañadas de un problema aditivo verbal. Es por ello que también distinguimos el tipo de estructura de problema a las que se asocian. Los problemas aditivos que analizamos los hemos denotado como sigue:

cambio ($e_i + v = e_f$, estado inicial + variación = estado final)

dos cambios ($v_1 + v_2 = v_t$, variación primera + variación segunda = variación total)

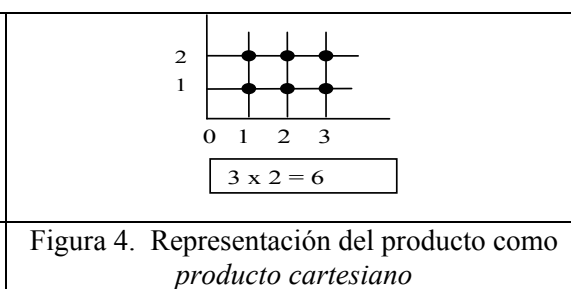
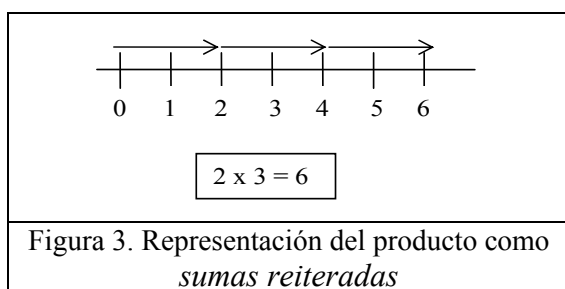
combinación ($e_1 + e_2 = e_t$, estado parcial 1 + estado parcial 2 = estado total)

comparación ($e_1 + c = e_2$, estado menor + comparación = estado mayor)



Producto

Para el producto distinguimos si las representaciones que se utilizan son de *sumas reiteradas* (ver figura 3) o bien como *producto cartesiano* (ver figura 4).



Igual que en las sumas y las restas, estas representaciones pueden aparecer contextualizadas con problemas de multiplicación o división. Distinguimos si los problemas que aparecen son de *razón*, *comparación* o *producto cartesiano*.

3. Resultados

En la tabla 1 podemos ver la frecuencia con la que aparece la recta numérica en los 10 cursos analizados y en cada editorial, además se muestra esta frecuencia desglosada en cada uno de los aspectos numéricos (los porcentajes en la tabla se han calculado con respecto a la frecuencia con la que aparece la recta en cada editorial).

	Edebé		Santillana		S. M.	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
	191		265		163	
Concepto de número	143	75%	157	59%	123	75%
Suma	24	13%	69	26%	25	16%
Resta	4	2%	19	7%	7	4%
Producto	2	1%	7	3%	6	4%
División	0	0%	0	0%	0	0%
Orden	18	9%	13	5%	2	1%

Tabla 1. Frecuencia con la que aparece la recta en las tres editoriales

Vemos que en las tres editoriales, el *concepto de número* es el aspecto en el que más se utiliza la recta, con mucha diferencia respecto a su uso para representar las cuatro operaciones y el orden. Santillana es la editorial que mayor frecuencia presenta para el *concepto de número* (157), sin embargo, SM y Edebé tienen mayores porcentajes respecto al número de veces que usan la recta (75%).

La recta no es un modelo con el que se explican las cuatro operaciones en ninguna de las tres editoriales, ya que nunca aparece relacionada con la *división*. La *suma* es la operación en la que mayor número de rectas se utiliza y porcentajes mucho menores presentan la *resta*, el *producto* y el *orden*. De nuevo, Santillana es la editorial que más utiliza la recta como modelo para *sumar*, *restar* y *multiplicar*.

3.1 Concepto de número

La tabla 2 muestra los datos referidos a la frecuencia con la que aparece la recta en el aspecto de *concepto de número* desglosados por conjuntos numéricos. El porcentaje se ha calculado con respecto a la frecuencia en el *concepto de número* de cada editorial.

Concepto	Frecuencia	N	Q	Z	R
Edebé	143 de 191	48 (34 %)	51 (36 %)	34 (24 %)	10 (7%)
Santillana	157 de 265	71 (45%)	27 (17 %)	36 (23 %)	23 (15 %)
S. M.	123 de 163	16 (13 %)	50 (41 %)	31 (25 %)	26 (21 %)

 Tabla 2. Frecuencia de la recta en el *concepto de número* para cada conjunto numérico

Los datos de la tabla 2 muestran que Santillana es la editorial que más trabaja el concepto de número natural en la recta. En cuanto a los racionales, tanto SM como Edebé, destacan con porcentajes que duplican a Santillana. Para los enteros las tres editoriales tienen un tratamiento similar. Sin embargo, no ocurre igual con los reales, ya que Edebé tiene porcentajes inferiores a las otras dos editoriales. En definitiva, las tres editoriales muestran diferencias entre sí pero, en general, tienen poca continuidad en el uso de la recta para el *concepto de número* en los diferentes conjuntos numéricos.

A continuación se muestra, a modo de ejemplo, para qué se usa la recta y el tipo de representaciones sobre el *concepto de número* en la editorial Santillana (ver figura 5), aunque los resultados son similares en las otras editoriales. La recta se utiliza principalmente para colocar (situar) números, mientras que son escasas las ocasiones en las que sirve de apoyo para estimar. En la mayoría de los casos, los números se representan con puntos y la posición de la recta es horizontal. Llama la atención el hecho de que en el conjunto de los números naturales hay más apariciones de ejes cartesianos que de rectas verticales.

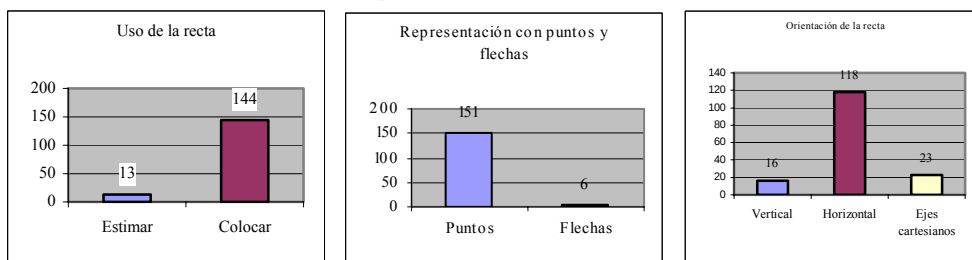


Figura 5. Tipo de representaciones de la recta (editorial Santillana)

3.2 Suma y Resta

En la tabla 3 observamos los resultados sobre el uso de la recta para representar sumas. La recta se usa como modelo para sumar con los naturales y los enteros y, en menor medida, con los racionales y los reales.

Aunque los datos no aparecen en la tabla, las tres editoriales coinciden en sumar utilizando principalmente la representación de *puntos-flecha*, sobre todo en la Educación Primaria, aunque SM y Santillana presentan representaciones de *tres flechas*. En cuanto a los problemas asociados a las representaciones, es SM la que más estructuras diferentes utiliza: $e_i + v = e_f$, $e_l + e_2 = e_t$, $v_l + v_2 = v_t$, $e_l + c = e_f$, pues Edebé sólo utiliza $e_i + v = e_f$ y $v_l + v_2 = v_t$ y Santillana $e_i + v = e_f$ y $e_l + e_2 = e_t$.

Suma	Frecuencia	N	Q	Z	R
Edebé	24 de 191	14	0	8	2
Santillana	69 de 265	38	0	31	0
S. M.	25 de 163	9	4	12	0

Tabla 3. Frecuencia de la suma en la recta por conjuntos numéricos

Observamos en la tabla 4 que la frecuencia de la recta para restar es mucho menor que para la suma.

Resta	Frecuencia	N	Q	Z	R
Edebé	4 de 191	4	0	0	0
Santillana	19 de 265	17	0	2	0
S. M.	7 de 163	0	4	3	0

Tabla 4. Frecuencia de la resta en la recta por conjuntos numéricos

Edebé y Santillana coinciden en restar en la recta números naturales, aunque Santillana también resta enteros. Sin embargo, SM resta en la recta fracciones y enteros. Es decir, existe discontinuidad en el uso de la recta para explicar la resta según los conjuntos numéricos.

Las tres editoriales mantienen coherencia con respecto a la suma en cuanto al uso de las representaciones, ya que Edebé y Santillana utilizan como única representación, *puntos-flecha* y SM además de ésta, usa la representación de *tres flechas*.

3.3 Producto

Las tres editoriales emplean la recta para trabajar el producto, pero con baja frecuencia. Edebé sólo para los números naturales, mientras que SM y Santillana para los números naturales y los números enteros.

Producto	Frecuencia	N	Z
Edebé	2 de 191	2	0
Santillana	7 de 265	6	1
S. M.	6 de 163	5	1

Tabla 5. Frecuencia del producto en la recta por conjuntos numéricos

Las tres editoriales coinciden en usar la representación de *sumas reiteradas* para el producto, es decir, que no aparece en ningún caso el *producto cartesiano*. En cuanto a los problemas asociados a dichas representaciones, la estructura predominante es la de *razón*, aunque SM también utiliza la de *comparación*. Edebé, sin embargo, no utiliza problemas y los productos aparecen en rectas descontextualizadas.

3.4 Orden

La tabla 6 indica que no hay continuidad en ninguna editorial para el uso de la recta como apoyo para *ordenar*. Edebé destaca por ordenar en la recta con todos los conjuntos numéricos, Santillana no ordena reales y SM sólo ordena en la recta enteros.

Orden	Frecuencia	N	O	Z	R
Edebé	23 de 191	6	5	11	1
Santillana	13 de 265	4	2	7	0
S. M.	2 de 163	0	0	2	0

Tabla 6. Frecuencia del uso de la recta para *ordenar* por conjuntos numéricos

Las tres editoriales coinciden en *ordenar* con rectas horizontales. Por otro lado, Edebé y SM ordenan en la recta sin asociarla a ningún contexto, mientras que Santillana sí lo hace en diferentes cursos.

4. Conclusiones

El estudio realizado en las tres editoriales nos permite concluir que no hay continuidad en el tratamiento de la recta a lo largo de la educación obligatoria. Una razón de esto puede ser que los autores de los libros de texto son diferentes en los distintos cursos. También observamos que no hay coherencia en el uso de la recta al trabajar los distintos conjuntos numéricos con respecto a una misma operación y entre las operaciones. En las rectas utilizadas dominan las horizontales frente a las verticales y observamos que no se tiene en cuenta el poco uso de la recta vertical para iniciar las representaciones con ejes cartesianos. En general, la recta se presenta contextualizada, especialmente en el momento de introducir cada conjunto numérico y sus operaciones.

5. Bibliografía

- Almodóvar, J.A. y otros (1997). *Matemáticas 2º ESO*. Santillana. Madrid.
- Bruno, A., Cabrera, N. (2005). Estudio de representaciones en la recta de los números negativos con alumnos de Educación Secundaria. *XI Jaem*. Puerto de la Cruz (por aparecer).
- Bruno, A.; Martín, A. (1997). Procedimientos de resolución de problemas aditivos con números negativos. *Enseñanza de las Ciencias*, 15(2), 249-258.
- Bujanda, M. P. y otros. (1994) *Matemáticas 5º Primaria*. SM. Madrid.
- Bujanda, M. P. y otros. (1995). *Matemáticas 6º Primaria*. SM. Madrid.
- Bujanda, M. P.; Mansilla, S. (2002). *Matemáticas 1º secundaria, números*. SM. Madrid.
- Bujanda, M. P.; Mansilla, S. (2002). *Matemáticas 2º secundaria, números*. SM. Madrid.
- Bujanda, M.P. y otros (1993). *Matemáticas 4º Primaria*. SM. Madrid.
- Bujanda, M.P. y otros (1996). *Matemáticas 3º Primaria*. SM. Madrid.
- Carr, K.; Katterns, B. (1984). Does the number line help? *Mathematic in School*, 113(4), 30-34.
- Doménech, M. A. y otros (1995). *Matemáticas 3º ESO*. Edebé. Barcelona.
- Ernest, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics*, 16, 411-424.
- Gallardo, A.; Romero, M. (1999). Identification of difficulties in addition and subtraction of integers in the number line. *XXI PME-NA*, vol 1, pp 275-282. Cuernavaca. México.
- García, P. y otros (1997). *Matemáticas 1º Primaria*. Santillana. Madrid.
- García, P. y otros (1997). *Matemáticas 2º Primaria*. Santillana. Madrid.
- García, P.; y otros (1997). *Matemáticas 3º Primaria*. Santillana. Madrid.
- García, P.; Rodríguez, M. (1998). *Matemáticas 4º Primaria*. Santillana. Madrid.
- García, P. y otros (1998). *Matemáticas 5º Primaria*. Santillana. Madrid.
- García, P. y otros (1996). *Matemáticas 1º ESO*. Santillana. Madrid.
- Gómez, M. (1996). *Matemáticas 1º ciclo de EP (2)*. Edebé. Barcelona.
- Gómez, M. (1996). *Matemáticas 1º ciclo de EP (1)*. Edebé. Barcelona.

- Gómez, M. (1996). *Matemáticas (B) 4º ESO*. Edebé. Barcelona.
- Gómez, M. (1997). *Matemáticas 2º ESO*. Edebé. Barcelona.
- Gómez, M. (1996). *Matemáticas 1º ESO*. Edebé. Barcelona.
- Lacueva, J.A. y otros (1995). *Matemáticas 3ª ciclo de EP (6)*. Edebé. Barcelona.
- Maideu, J.M. (1993). *Matemáticas 2º ciclo de EP (4)*. Edebé. Barcelona.
- Maideu, J.M. (1993). *Matemáticas 2º ciclo de EP (3)*. Edebé. Barcelona.
- Pedro-Viejo, M.J. y otros (1995). *Matemáticas 2º Primaria*. SM. Madrid.
- Pedro-Viejo, M.J. y otros (1995). *Matemáticas 1º Primaria*. SM. Madrid.
- Rodríguez, M. y otros (1999). *Matemáticas 6º primaria*. Santillana. Madrid.
- Santos, D. y otros (1995). *Matemáticas 3º ESO*. Santillana. Madrid.
- Santos, D. y otros (1995). *Matemáticas 4º ESO*. Santillana. Madrid.
- Segarra, J. Y otros (1994). *Matemáticas 3ª ciclo de EP (5)*. Edebé. Barcelona.
- Vizmanos, J. R.; Anzola, M. (2002). *Matemáticas 3º secundaria, algoritmo 2000*. SM. Madrid.
- Vizmanos, J. R.; Anzola, M. (2002). *Matemáticas 4º secundaria, algoritmo 2000*. SM. Madrid.