



Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas



Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 3

“GEOMETRÍA : LA BELLA DURMIENTE. LA GEOMETRÍA ¿SIGUE OLVIDADA?”

COMUNICACIONES

BARICENTRO DE UN CUADRILÁTERO: UN MISMO NOMBRE PARA DESIGNAR PUNTOS DIFERENTES.....	597
TENSEGRIDAD: UNA GEOMETRÍA EXCLUSIVAMENTE TRIDIMENSIONAL.....	603
LA CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.....	609
LÚNULAS, ALGO MÁS QUE MATEMÁTICAS	617
UN DISEÑO CUASIEXPERIMENTAL. SU IMPLEMENTACIÓN EN UN SISTEMA DE ACCIONES PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS.....	623
PARALELOGRAMOS A PARTIR DE CUADRILÁTEROS	629
FORMAS ESTRELLADAS SOBRE RECTÁNGULOS.....	635
DE LA GEOMETRÍA DEL ELÁSTICO (TOPOLOGÍA) A LOS PUZZLES DE ALAMBRE.....	641
RUTA MATEMÁTICA POR ALCALA DE HENARES	649
UTILIZACIÓN DE HOT POTATOES EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS. EJEMPLIFICACIÓN: MOVIMIENTOS EN EL PLANO.	653
HACIENDO GEOMETRÍA CON LA ROTONDA DE PALLADIO. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE EL NÚMERO DE PLATA Y EL NÚMERO CORDOBÉS.	657

BARICENTRO DE UN CUADRILÁTERO: UN MISMO NOMBRE PARA DESIGNAR PUNTOS DIFERENTES

Cecilia Calvo Pesce

Introducción

Debido al carácter convencional de las definiciones matemáticas, en ocasiones, al nombre de un mismo concepto se asignan definiciones diferentes, en el sentido que son más restrictivas o menos. Como ejemplo, podríamos mencionar el caso de los trapecios cuya definición puede hacer que los paralelogramos sean casos particulares, o no.

También estamos habituados a que se definan objetos matemáticos equivalentes recurriendo a distintas condiciones necesarias y suficientes para determinar un mismo conjunto de ejemplos. Ejemplo de esta situación es la definición de paralelogramo como un cuadrilátero cuyas diagonales se cortan en su punto medio o como un cuadrilátero donde los lados opuestos son paralelos.

Lo que no es tan común y que proponemos analizar aquí es cuando a un mismo nombre (en este caso: baricentro de un cuadrilátero) se asignan definiciones que generan objetos totalmente diferentes.

Las definiciones en Matemáticas

La definición de un concepto matemático es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de ejemplos.

Mientras que desde el punto de vista de la lógica formal: una definición otorga un nombre a un objeto caracterizado por ciertas propiedades, desde la perspectiva de la actividad matemática (y de su aprendizaje): la definición introduce una noción que no “existía” antes, que puede abrir problemas nuevos, brindar nuevas perspectivas para pensar en problemas viejos o colaborar en la organización del sistema teórico en que se inserta (Mariotti & Fischbein, 1997). El establecimiento de una definición matemática, por tanto, responde a ciertas necesidades de organización y crecimiento del conocimiento. En este contexto adquiere relevancia la elección de la definición que se presentará en la clase, puesto que las definiciones no están predeterminadas sino que son convencionales. A primera vista, el carácter convencional de las definiciones en Matemática se pone en evidencia en dos sentidos (Calvo, 2001):

a) Algunos conceptos se pueden definir de manera más o menos restrictiva. Según este punto de vista De Villiers (1998) clasifica a las definiciones en jerárquicas (aquellas que hacen, por ejemplo, que los cuadrados resulten casos particulares de los rectángulos, éstos de los paralelogramos y éstos, a su vez, de los trapecios) o particionales (aquellas que piden, por ejemplo, a los triángulos isósceles tener exactamente un par de lados congruentes, dejando fuera a los triángulos equiláteros).

b) Otras nociones matemáticas pueden ser caracterizadas de distintas maneras, equivalentes entre sí, y es el matemático, el autor de un texto o el profesor quien decide cual de estas caracterizaciones toma como definición. Aunque a veces es difícil tomar partido frente a una u otra caracterización (¿cómo definir baricentro de un triángulo: como el corte de las medianas o como el punto que unido con los vértices determina tres triángulos de igual área?) lo habitual es que esta elección no sea arbitraria sino resultado de un análisis que atiende a distintos factores:

Estéticos Se trata de argumentos relacionados con la elegancia o la sencillez del enunciado (Vinner, 1991). Por ejemplo, en el caso del triángulo “equilátero”: dado el nombre que lleva, puede fundamentarse en argumentos estéticos la preferencia por definirlo en función de la igualdad de sus lados más que de sus ángulos.

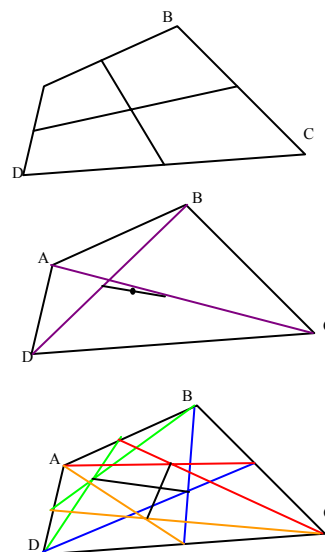
Didácticos El conocimiento académico se somete a un proceso de Transposición Didáctica que lo prepara para ser comunicado en el ámbito escolar; esto requiere que se elijan las definiciones que se presentarán según los conocimientos previos de los alumnos o los objetivos del curso. A menudo el carácter arbitrario que luce una definición es reflejo de esa Transposición Didáctica: en algún momento la definición respondió a una necesidad que hizo pertinente la elección de sus términos pero el rastro de esas necesidades se fue perdiendo con las modificaciones que fue sufriendo al incorporarse al sistema teórico organizado. Como ejemplo se puede mencionar el caso de la definición de determinante de una matriz de $n \times n$ como la suma de $n!$ productos elegidos de una forma dada entre sus elementos (pero no fue así que ingresaron los determinantes al mundo de la Matemática, sino a partir de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales).

Operativos En ocasiones el criterio usado para establecer una determinada definición se explica por las conclusiones que de ella se pueden extraer o por su potencia como instrumento organizador de una prueba o la resolución de un problema (Bills & Tall, 1998). Como ejemplo de este tipo de argumentos podemos presentar el caso de la dependencia lineal de un subconjunto de un espacio vectorial: aunque parecería más natural definir que eso sucede cuando alguno de los vectores que lo conforma depende linealmente de los otros, resulta más eficiente definirlo a partir de la existencia de combinaciones lineales no triviales que permitan obtener al vector nulo.

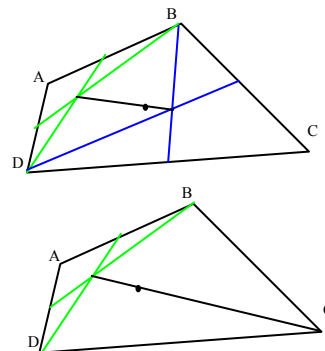
Algunas definiciones de baricentro de un cuadrilátero

Para “baricentro de un cuadrilátero” podemos encontrar diferentes definiciones:

- I. G es el baricentro de ABCD si y sólo si G es el punto de corte de las rectas que unen los puntos medios de los lados AB y CD y los de los lados AD y BC.
- II. G es el baricentro de ABCD si y sólo si G es el punto medio del segmento determinado por los puntos medios de las diagonales AC y BD.



- III. G es el baricentro de $ABCD$ si y sólo si G es el punto de corte de la recta $G_A G_C$ y la recta $G_B G_D$ siendo G_A el baricentro del triángulo ABD , G_B el baricentro del triángulo ABC , G_C el baricentro del triángulo BCD y G_D el baricentro del triángulo ACD .
- IV. G es el baricentro de $ABCD$ si y sólo si G es el punto del segmento $G_A G_C$ que verifica: $G_A G \cdot \text{área}(ABD) = G G_C \cdot \text{área}(BCD)$.
- V. G es el baricentro de $ABCD$ si y sólo si G es el punto del segmento $G_A C$ que verifica: $4 \cdot G_A G = G_A C$.



Equivalencias entre estas definiciones

Las definiciones I y II son equivalentes pues en cualquier cuadrilátero los segmentos que unen los puntos medios de sus lados opuestos y el segmento determinado por los puntos medios de sus diagonales, concurren en sus respectivos puntos medios (en la página: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/AnyQuadri.shtml> se puede encontrar una justificación de esta afirmación).

Falta ver qué sucede con las definiciones III, IV y V. Asignando coordenadas a los vértices del cuadrilátero: $A(a, a')$, $B(b, b')$, $C(c, c')$ y $D(d, d')$, resulta que:

$$G_A \left(\frac{a+b+d}{3}, \frac{a'+b'+d'}{3} \right), G_B \left(\frac{a+b+c}{3}, \frac{a'+b'+c'}{3} \right), G_C \left(\frac{b+c+d}{3}, \frac{b'+c'+d'}{3} \right) \text{ y } G_D \left(\frac{a+c+d}{3}, \frac{a'+c'+d'}{3} \right)$$

A partir de aquí es fácil deducir que las coordenadas del punto determinado por la definición V son $\left(\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{a'+b'+c'+d'}{4} \right)$ (basta calcular las coordenadas de M punto medio de $G_A C$ y las del punto medio de $G_A M$) y coinciden con las del punto determinado por las dos primeras definiciones. Observar que de esta manera además de probar la equivalencia entre las tres definiciones (I, II y V) se está probando que la definición V no depende del triángulo escogido para considerar su baricentro.

Aunque requiere algo más de paciencia y cuentas, no hay dificultades en determinar las coordenadas del punto de corte de la recta $G_A G_C$ y la recta $G_B G_D$. Su abscisa será:

$$[(b^2-d^2)(a'-c')-(b'-d')(a^2-c^2)+(b-d)(aa'-cc')-(a-c)(bb'-dd')]/3[(a'-c')(b-d)-(a-c)(b'-d')]$$

Su ordenada será:

$$[(b'^2-d'^2)(a-c)-(b-d)(a'^2-c'^2)+(b'-d')(aa'-cc')-(a'-c')(bb'-dd')]/3[(a-c)(b'-d')-(a'-c')(b-d)]$$

Resulta evidente que éste no coincide con el punto determinado por las definiciones ya analizadas pero veremos que sí coincide con el determinado por la definición IV.

Para ello se pueden tomar las coordenadas del punto G determinado por la definición III y verificar que $G_A G \cdot \text{área}(ABD) = G G_C \cdot \text{área}(BCD)$. Esto requiere unas cuantas cuentas que no son difíciles y así, no sólo se prueba la equivalencia entre las definiciones, sino la independencia de la definición IV respecto a los triángulos escogidos.

Podemos demostrar entonces que las definiciones I, II y V son equivalentes entre sí y las definiciones III y IV también son equivalentes entre sí, aunque no con las otras tres.

O sea, que no siempre se habla de un mismo punto cuando se nombra al baricentro de un cuadrilátero: El baricentro definido de manera equivalente a las definiciones I, II y V lo podemos encontrar en el diccionario ubicado en <http://mathworld.wolfram.com> bajo la entrada “geometric centroid” y el baricentro tal como es considerado en las definiciones III y IV es el que aparece en la obra de Arquímedes.

Motivación para las diferentes definiciones

Tal como plantean Hanna y Jahnke (1999) algunos modelos de la física pueden ofrecer enormes contribuciones a la explicación y validación de resultados matemáticos, a ellos recurriremos en este apartado.

Un cuadrilátero se puede modelar como un sistema de cuatro pesas (cada una ejerciendo una fuerza u) ubicadas cada una en uno de sus vértices y unidas por varillas “sin peso” (Shigalis y Benson, 2001). Tenemos diferentes formas de encontrar el centro de gravedad de tal sistema:

- a) Equilibramos las pesas ubicadas en los puntos A y B con una fuerza ejercida en el punto medio de AB y equilibramos las pesas ubicadas en los puntos C y D con otra fuerza ejercida en el punto medio de CD. Ahora estas dos fuerzas las podríamos cambiar por otra ejercida en un punto del segmento que aquellos puntos medios determinan. Procediendo de igual manera pero con A y D por un lado y B y C por otro, llegamos a que el centro de gravedad deberá estar en el segmento determinado por los puntos medios de AD y BC. En conclusión, resulta que el baricentro deberá estar en el corte de los segmentos determinados por los puntos medios de lados opuestos del cuadrilátero (definición I).
- b) Equilibramos las pesas ubicadas en los vértices opuestos A y C con una fuerza ($2u$) ejercida en el punto medio de AC y equilibramos las pesas ubicadas en los otros dos vértices opuestos con otra fuerza ($2u$) ejercida en el punto medio de BD. Ahora estas dos fuerzas las podríamos cambiar por otra ejercida en el punto medio del segmento que aquellos puntos medios determinan (definición II).
- c) Equilibramos las pesas ubicadas en los puntos A y B con una fuerza ($2u$) ejercida en el punto medio de AB y después compensamos las fuerzas ejercidas en este punto medio y en el vértice D con una fuerza ($3u$) ejercida en un punto del segmento que estos puntos determinan (la mediana desde D respecto al triángulo ABD). Dado que las fuerzas ejercidas en los dos extremos de dicha mediana son una el doble de la otra, por la ley de la palanca, sabemos que este punto se ubica de tal manera que su distancia a D es el doble de su distancia al punto medio de AB, lo que permite deducir que la fuerza ($3u$) es ejercida en G_A , el baricentro del triángulo ABD. Quedan ahora en el sistema dos fuerzas: la ejercida en G_A ($3u$) y la ejercida en C (u), las cuales podríamos cambiar por otra ($4u$) ejercida en un punto del segmento CG_A (exactamente en un punto cuya distancia a C sea el triple de su distancia a G_A). En conclusión, resulta que el centro de gravedad deberá ser un punto del segmento CG_A tal que su distancia a G_A es un cuarto de la longitud del segmento (definición V).

Pero un cuadrilátero también se puede modelar como una placa cuyo peso se distribuye uniformemente sobre la superficie (Shigalis y Benson, 2001). Tenemos diferentes formas de encontrar ese centro de gravedad donde aplicar una fuerza que mantenga la placa en equilibrio:

- a) Equilibramos el triángulo ABC aplicando una fuerza proporcional a su área en su baricentro G_B (damos por sabido que en una placa triangular el punto donde aplicar la fuerza que la equilibre es su baricentro) y para equilibrar el triángulo que junto

con ABC determinan al cuadrilátero, aplicamos una fuerza proporcional al área de ACD en G_D . El centro de gravedad del cuadrilátero se encontrará pues en el segmento $G_B G_D$ y razonando de manera análoga se encontrará también sobre el segmento $G_A G_C$. En conclusión, resulta que el baricentro deberá estar en el corte de los segmentos $G_B G_D$ y $G_A G_C$ (definición III).

- b) Equilibramos el triángulo ABD aplicando una fuerza proporcional a su área en su baricentro G_A y equilibramos el triángulo BCD aplicando una fuerza proporcional a su área en G_C . El centro de gravedad del cuadrilátero se encontrará pues en un punto G del segmento $G_A G_C$ de tal manera que, por la ley de la palanca, $G_A G \cdot \text{área}(\text{ABD}) = G G_C \cdot \text{área}(\text{BCD})$ (definición IV).

¿Cuándo coinciden estos dos puntos?

Llamemos G_I al punto determinado por las definiciones I, II y V y G_{III} al determinado por las definiciones III y IV. Ya hemos visto que, en general, los puntos G_I y G_{III} son diferentes para un mismo cuadrilátero; veamos ahora bajo qué condiciones coinciden esos dos puntos. Por la definición V sabemos que $\{G_I\} = G_A C \cap G_B D \cap G_C A \cap G_D B$ y por la definición III sabemos que $\{G_{III}\} = G_A G_C \cap G_B G_D$

Si los puntos G_I y G_{III} coinciden, como G_I está alineado con G_C y A y como G_{III} está alineado con G_A y G_C , se deduce que A, G_A y G_C están alineados. Análogamente se deduce que C, G_A y G_C están alineados, o sea que A, C, G_A y G_C están en una misma recta que pasa por el punto medio de DB puesto que AG_A y CG_C son medianas de ADB y CDB respectivamente. Esto quiere decir que la recta AC corta a DB en su punto medio, razonando análogamente se deduce que también DB corta a AC en su punto medio y esto sucede únicamente cuando ABCD es un paralelogramo.

En resumen, sabemos que si los puntos determinados por los dos grupos de definiciones son el mismo entonces el cuadrilátero es un paralelogramo y es claro que el recíproco de esta afirmación es también verdadero. O sea que las cinco definiciones presentadas determinan el mismo punto si y sólo si el cuadrilátero es un paralelogramo.

Conclusiones

Hasta ahora entendíamos que el carácter convencional de una definición (Calvo, 2001) se podía reflejar en dos sentidos:

- la amplitud, más o menos restrictiva, del conjunto de objetos que abarca, y
- la elección según criterios estéticos, operativos o didácticos de los términos escogidos para enunciar tal definición.

El ejemplo del baricentro de un cuadrilátero nos da idea de otro sentido que podemos dar al carácter convencional de las definiciones matemáticas: el que deriva de la situación física que puede estar modelando un cierto concepto.

Bibliografía

- BILLS, L. & TALL, D. (1998) Operable Definitions in Advanced Mathematics: the Case of the Least Upper Bound. *Proceedings XXII PME Conference*. Southafrica.
- CALVO, C. (2001) *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis de Doctorado. Universidad Autónoma de Barcelona.
- De VILLIERS, M. (1998) To Teach Definitions in Geometry or to Teach to Define? *Proceedings XXII PME Conference*. Southafrica.
- HANNA, G. & JAHNKE, H.N. (1999) Using arguments from Physics to promote understanding of mathematical proofs. *Proceedings XXIII PME Conference*. Israel.

- MARIOTTI, M. A. & FISCHBEIN, E. (1997) Defining in Classroom Activities. *Educational Studies in Mathematics*. N°34. Pp. 219.
- SHIGALIS, W. & BENSON, C. (2001) Centroid of a Polygon. Three Views. *Mathematics Teacher*. Vol 94, N° 4. Pp. 302.
- VINNER, S. (1991) The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publisher. Pp. 65.

TENSEGRIDAD: UNA GEOMETRÍA EXCLUSIVAMENTE TRIDIMENSIONAL

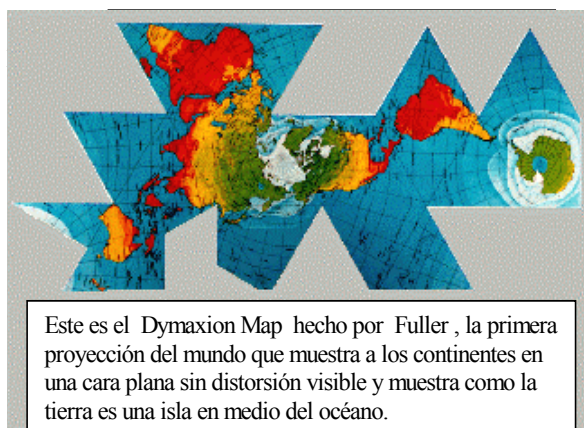
Covadonga Rodríguez-Moldes Rey Errose Landa Jáuregui José Luis Mayobre Antón

IES MUGARDOS (A Coruña)

Los nombres de los dos pioneros en el estudio de las tensegridades son, en orden cronológico, R. Buckminster Fuller y Kenneth Snelson; el primero, Fuller, nacido en Milton, Massachusetts, en el año 1895 y fallecido en Los Ángeles el año 1983 fue un innovador, un hombre que vivió por delante de su tiempo y que destacó en múltiples facetas; es conocido como filósofo, pensador, inventor, visionario, arquitecto, matemático, poeta, ingeniero, cosmólogo, comunicador



R.B.Fuller



Este es el Dymaxion Map hecho por Fuller, la primera proyección del mundo que muestra a los continentes en una cara plana sin distorsión visible y muestra como la tierra es una isla en medio del océano.

A él se debe el invento de la cúpula geodésica y fue precursor en la utilización de formas geométricas básicas en diseño; uno de sus lemas más conocidos fue '*more with less*' (*más con menos*). Corría el año 1961 cuando explicó los principios y principales conceptos que rigen los sistemas de tensión-compresión en un artículo titulado *Tensegrity*, palabra que crea a partir de otras dos: *tensional integrity*.

El segundo nombre corresponde al escultor Kenneth Snelson, nacido en Pendleton, Oregon, el año 1927. El fue quien, a través de sus esculturas, popularizó el término *tensegridad*; en ellas los elementos en compresión (barras) pueden mantenerse rígidos y estables, separados unos de otros, sin tocarse, manteniéndose suspendidos unidos únicamente por elementos en tensión (cables, gomas, etc). Snelson asistió como alumno a un seminario de Fuller e inspirado por él realizó su primer prototipo de escultura utilizando tensión-compresión en el que aparecía el prisma oblicuo triangular, base de sus posteriores estructuras que él definió como elementos extendidos, separados unos de otros, en tensión o en compresión formando un enrejado en el que los elementos en compresión permanecen separados unos de otros y los elementos en tensión están conectados formando una malla en continua tensión.



Kenneth Snelson

B-Tree II, 1981
aluminio y cable de acero
180.3 x 199.4 x 214.6cm

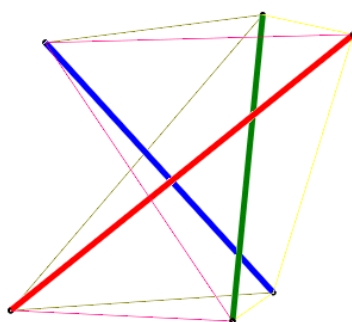


La descripción anterior dada por Snelson no se adapta a muchas estructuras consideradas hoy en día como tensegridades; el término tensegridad, a pesar de los muchos intentos, todavía no tiene una definición consensuada por todos los estudiosos del tema; en la búsqueda de la definición precisa se debe mencionar a René Motro, Director del Laboratorio de Mecánica e Ingeniería Civil en la Universidad de Montpellier II quien en el año 2003 da la siguiente¹:

“Una estructura de tensegridad es un sistema estable, en un estado de equilibrio propio, formado por un conjunto discontinuo de componentes en compresión dentro de un conjunto continuo de componentes en tensión”.

- ❑ Es un sistema pues tiene *componentes* –de dos tipos: compresión y tensión-, *relaciones estructurales* entre los componentes, *estructura global* –asociando las relaciones estructurales entre los componentes a las características de los mismos- y *forma* proyectada en un sistema de referencia tridimensional
- ❑ Es estable pues puede recuperar el equilibrio después de una perturbación
- ❑ En equilibrio propio pues es independiente de fuerza externas (incluso la gravedad) o anclajes
- ❑ En discontinua compresión y continua tensión porque los componentes en compresión tienen que ser desconectados mientras que los elementos en tensión están creando un “océano” de continua tensión.
- ❑ Los elementos en compresión están “dentro” cuando no están en la frontera –o envoltura- del sistema

ELEMENTO SIMPLE DE TENSEGRIDAD: El prisma triangular oblicuo



El recordado profesor Miguel de Guzmán, abanderado del estudio de las tensegridades en España, poco antes de fallecer en el año 2004, dio la siguiente definición con la que

¹ “A tensegrity system is a system in a stable self-equilibrated state comprising a discontinuous set of compressed elements inside a continuum of tensioned components”.

trataba de conseguir un tratamiento matemático más eficaz de los problemas que suscitan estas estructuras :

“Consideramos una configuración geométrica constituida por un número finito de puntos en el espacio, no cuatro en un plano, y por unos cuantos segmentos que unen estos puntos.

Diremos que esta configuración de puntos y segmentos admite una estructura de tensegridad cuando es posible asignar a cada punto de la configuración, vectores en dirección de cada uno de los segmentos de la configuración que concurren en él de tal forma que:

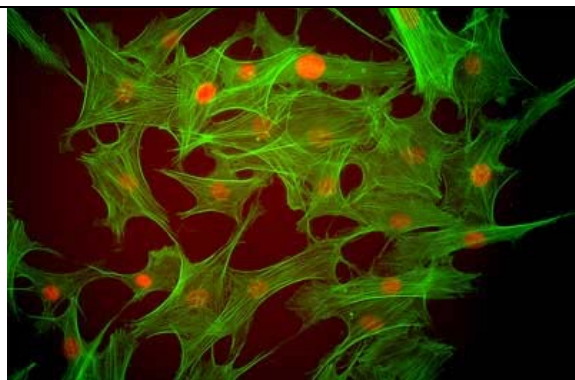
- (a) la resultante de los vectores asignados a cada punto es nula*
- (b) para cada segmento de la configuración la suma de los dos vectores asignados a sus extremos es cero.*

Aplicaciones de las tensegridades

Los primeros en interesarse en la aplicación práctica de las estructuras de tensegridad de Snelson fueron los arquitectos que las aplicaron a la construcción de cúpulas, puentes y edificios; también en el campo del diseño se utilizaron en muebles, cubiertas o toldos.



“Georgia Dome” (Atlanta)
Levy y Weidlinger Associates,
con 233.5X186m está considerada la más grande cúpula del mundo.



Red de microfolamentos tensados (en verde) y nucleo central (rojo) en un grupo de células de sangre en los vasos sanguíneos capilares

Desde finales del pasado siglo, las estructuras de tensegridad está siendo estudiadas por ingenieros para aplicarlas en distintos campos, principalmente en la ingeniería espacial y en la creación de robots; también está surgiendo con gran fuerza en la Biología aplicaciones de la tensegridad , especialmente en el estudio del citoesqueleto que podría ser modelizado por estas estructuras como asegura Donald E. Ingber ² quien descubrió que, no solo las células sino también una gran variedad de sistemas naturales – como los átomos o la espina dorsal- están contruidos siguiendo modelos de tensegridad pues en todos ellos aparecen los elementos de los sistemas de tensegridad: continua tensión y discontinua compresión.

Además, hay quien descubre los modelos de tensegridad en las relaciones entre las personas, como el físico y científico norteamericano Timothy Wilken quien asegura que las relaciones profesor-alumno o mujer-hombre son de este tipo.

Por lo que se refiere a las aplicaciones de las tensegridades en la enseñanza de las matemáticas, no parecen estar suficientemente explotadas en el momento actual, sin

² Donald E Ingber, The Architecture of live, Scientific American Magazine, Enero 1998

embargo, a pesar de las dificultades que entraña un estudio geométrico de estas estructuras por la complejidad que presentan, la característica común de tridimensionalidad las hace atractivas para explorar y mejorar la visión espacial de alumnos y profesores.

A continuación se presenta un acercamiento a la geometría de un tipo de tensegridades, las tensegridades canónicas, utilizando herramientas conocidas por los escolares de secundaria como el teorema de Pitágoras.

Una tensegridad simple: la tensegridad canónica

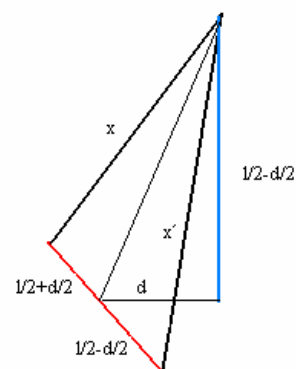
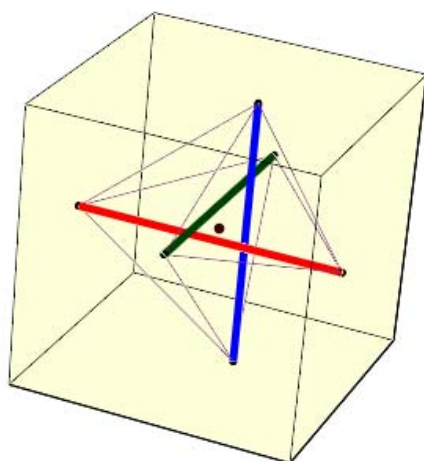
Consideraremos *tensegridad simple* al prisma oblicuo triangular formado por tres barras de la misma medida, l , y nueve tendones de forma que los tendones son las aristas del prisma y las barras son diagonales de las caras laterales del prisma.

Llamaremos *tensegridad canónica* a un tipo de tensegridad simple, la formada por tres barras de la misma longitud, l , perpendiculares entre sí y situadas cada una a una misma distancia, d , de las demás.

En una tensegridad canónica, de los nueve tendones, seis tienen la misma longitud, x , y son los que forman los triángulos equiláteros de las bases del prisma; los otros tres son de igual medida entre sí, x' y corresponden a las aristas laterales del prisma.

Intentaremos averiguar la longitud, L , suma de todos los tendones de una tensegridad canónica

Si inscribimos la figura en un hexaedro y con origen en el centro del mismo establecemos unos ejes de referencia ortogonales paralelos a las barras de la tensegridad, podemos hallar el valor de x sin más que aplicar el teorema de Pitágoras:



supongamos $x = x(l, d)$

$$x(l, d) := \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 + d^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{d}{2}\right)^2} \text{ simplify } \rightarrow x(l, d) := \left[\left(\frac{1}{2} \cdot l - \frac{1}{2} \cdot d\right)^2 + d^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot d\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

o lo que es lo mismo: $x(l, d) := \sqrt{\frac{l^2 + 3 \cdot d^2}{2}}$

de forma análoga:

$$x'(l, d) := \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{d}{2}\right)^2 + d^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{d}{2}\right)^2} \text{ simplify } \rightarrow x'(l, d) := \left[2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot l - \frac{1}{2} \cdot d\right)^2 + d^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

o sea

$$x'(l, d) := \sqrt{\frac{l^2 + 3 \cdot d^2 - 2l \cdot d}{2}}$$

La longitud total de los tendones será por tanto:

$$L(l, d) := 6x + 3x' \quad L(l, d) := 6 \cdot \sqrt{\frac{l^2 + 3 \cdot d^2}{2}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{l^2 + 3 \cdot d^2 - 2l \cdot d}{2}} \quad (*)$$

Así, si por ejemplo, $l = 20 \text{ cm}$ y $d = 4 \text{ cm}$ se tiene $x = 14,97 \text{ cm}$ $x' = 12 \text{ cm}$ y $L = 125,8 \text{ cm}$

O si $l = 12 \text{ cm}$ y $d = 3 \text{ cm}$ se tiene $x = 9,25 \text{ cm}$ $x' = 7,04 \text{ cm}$ y $L = 76,59 \text{ cm}$

Ahora buscaremos la ecuación de la tensegridad canónica:

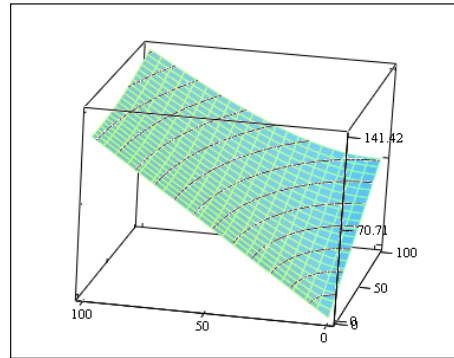
A partir de $x(l, d) := \sqrt{\frac{l^2 + 3 \cdot d^2}{2}}$

podemos escribir

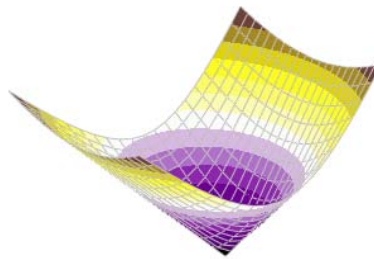
$$l^2 + 3 \cdot d^2 - 2 \cdot x^2 = 0$$

que podemos considerar como *ecuación de la tensegridad canónica*.

La representación gráfica de esta ecuación nos permite averiguar cuales son los valores de x , l y d para los cuales existe una tensegridad canónica en la gráfica se representan los puntos (l, d, x) que satisfacen la ecuación de la tensegridad .



Si la representación se extiende a valores reales positivos y negativos la figura resultante es un hiperboloide de revolución:



Miguel de Guzmán demostró que si fijamos cinco puntos, no cuatro en el mismo plano, el lugar geométrico del sexto punto para que los seis formen una estructura de tensegridad simple, es un hiperboloide de revolución, ¿tendrá algo que ver con lo visto anteriormente?

Parece que el estudio de las tensegridades canónicas podría abrirnos una puerta al estudio de las tensegridades utilizando herramientas matemáticas escolares, pero para eso habría que tratar de resolver el siguiente problema:

Dada una tensegridad simple cualquiera con longitud de barras l , si la longitud total de sus tendones es L ¿existe siempre una tensegridad canónica con esas barras que tenga esa misma longitud total de tendones?

La solución de este problema se obtendría despejando d en (*) , ¿es eso posible? ¿cuándo? ¿cómo?

LA CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA.

Manuel Alcalde Esteban

Área Didáctica de la Matemática,
Departamento de Educación, Universitat Jaume I

1. INTRODUCCIÓN

La clasificación es un procedimiento utilizado por las distintas ciencias mediante el cual se obtienen nuevos conceptos, se crean nuevas familias, etc., que posibilitan su desarrollo como ciencia y su utilización en los respectivos campos de aplicación.

En Educación Primaria dicho recurso es utilizado en reiteradas ocasiones. En el Segundo y Tercer ciclo se procede a la clasificación de los polígonos en general y, concretamente, de los triángulos y cuadriláteros.

En esta comunicación empezamos presentando la localización exacta de dichos contenidos en el currículo de Educación Primaria de la Comunidad Valencia, seguimos con el tratamiento didáctico de la construcción de la clasificación inclusiva de los cuadriláteros convexos, después vemos cómo presentan los libros de texto las clasificaciones de triángulos y cuadriláteros y, finalizamos, con unas conclusiones y recomendaciones para una mejor enseñanza-aprendizaje de estas clasificaciones en las aulas de los colegios.

2. LA CLASIFICACIÓN DE POLÍGONOS EN EL CURRÍCULO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Del estudio del Decreto 20/1.992, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Valenciana, en la enumeración de los contenidos del *Bloque 3. Geometría*, destacamos la siguiente información:

2. Reconocer, describir, clasificar, nombrar y definir formas y configuraciones geométricas de tres, dos y una dimensiones.

[...]

3. Construir, dibujar, modificar y explorar las formas y configuraciones geométricas.

[...]

Estudio de triángulos, cuadriláteros, círculo y circunferencia³.

Al estudiar la Resolución de 12 de septiembre de 1.992, de la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, por la que se dan orientaciones metodológicas y para la evaluación, así como orientaciones para la secuenciación de contenidos por ciclos de la Educación Primaria, encontramos en el cuadro resumen del *Bloque 3. Geometría*, en el Segundo ciclo, correspondiente al contenido Reconocimiento, descripción de cuerpos y formas: "Criterios de clasificación elementales"⁴.

³ Decreto 20/1.992, de 17 de febrero, del Gobierno Valenciano, pág. 1.498

⁴ Resolución de 12 de septiembre de 1.992, pág. 11.802

Vemos por tanto que las clasificaciones de triángulos y cuadriláteros son contenidos específicos de las matemáticas de Educación Primaria.

3. CLASIFICACIONES INCLUSIVAS Y CLASIFICACIONES EXCLUYENTES

Al proceder a clasificar los triángulos o los cuadriláteros podemos hacerlo utilizando definiciones de las clases que nos proporcionen una clasificación inclusiva (algunas familias están contenidas en otras) o excluyente (ninguna familia está contenida en otra). Veámoslo con los triángulos.

Si vamos a clasificar los triángulos por sus lados y definimos: *triángulos isósceles son aquellos triángulos que tienen sólo dos lados iguales*, entonces los triángulos equiláteros no son isósceles, con lo que obtendremos que las tres familias Equiláteros, Isósceles y Escalenos serán excluyentes, no compartes elementos.

En cambio si definimos: *triángulos isósceles son aquellos triángulos que tienen dos lados iguales*, entonces los triángulos equiláteros son también isósceles, con lo que obtendremos que la familia Equiláteros está contenida en la clase de los Isósceles, con lo que obtenemos una clasificación inclusiva o incluyente.

4. CLASIFICACIÓN INCLUSIVA DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

La Resolución de 12 de septiembre de 1.992, en Criterios para la secuenciación de contenidos por ciclos, sugiere que: “se planteen las matemáticas en Primaria a partir de situaciones concretas y contextos cercanos a las alumnas y los alumnos, fomentando la observación, la experimentación, la intuición, el descubrimiento, el razonamiento lógico”⁵ y, en el Segundo Ciclo, recomienda: “las nociones geométricas deberán ser objeto de descubrimiento y construcción por parte de los alumnos”⁶.

Vamos a ver como todo esto se satisface al proceder a realizar experimentalmente la clasificación inclusiva de los cuadriláteros convexos partiendo de las enseñanzas de Emma Castelnuovo (1.981).

El material que vamos a utilizar será listones (de cartón o plástico rígido, madera, metal, etc.) con tres agujeros: uno en cada extremo y otro en el centro; goma elástica redonda del grosor necesario para que pase por los agujeros de los listones, encuadernadores o tornillos para unir y poder articular (mover) los listones, y un geoplano cuadrado, de 10 por 10 clavos o pivotes, con las correspondientes gomas elásticas.

Consideremos el rombo el contorno del cual formamos uniendo cuatro listones iguales (figura 1). Como el contorno construido no es rígido, podemos deformarlo, por ejemplo tirando hacia el exterior del rombo desde ambos extremos de la



Figura 1

diagonal menor, observando que se transforma en el contorno de muchos rombos (teóricamente infinitos), uno de los cuales es un cuadrado, cuando los ángulos que forman los listones son ángulos rectos (figura 2). Seguimos la deformación hasta que la diagonal horizontal pasa a ser la diagonal mayor (figura 3), procediendo

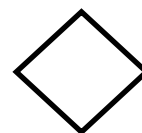


Figura 2

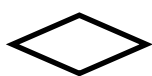


Figura 3

entonces a realizar la deformación en sentido contrario, es decir, presionando en ambos extremos de la diagonal horizontal hacia el

⁵ Resolución de 12 de septiembre de 1.992, pág. 11.794

⁶ Op. Cit. 11.797

interior del rombo, con lo que los listones materializan el contorno de muchos rombos (teóricamente infinitos),

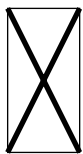


Figura 4

volviendo a obtener el cuadrado, terminando en el rombo del que habíamos partido. Por tanto el cuadrado es un rombo particular y por ello podemos concluir que los cuadrados son un subconjunto de los rombos:

$$\{\text{Cuadrados}\} \subset \{\text{Rombos}\}.$$

Consideremos el rectángulo (figura 4) que tiene por



Figura 6

diagonales dos listones iguales, unidos por el agujero central, y por contorno una goma elástica, que pasamos por los agujeros de los extremos de los listones y que atamos para cerrarla.

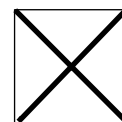


Figura 5

Como este contorno lo podemos deformar, al coger las diagonales por sus extremos inferiores y aumentar la separación de dichos extremos, podemos observar que la goma se convierte en el contorno de muchos rectángulos (teóricamente infinitos), uno de los

cuales es un cuadrado, cuando las diagonales son perpendiculares (figura 5). Continuamos la deformación de esta estructura hasta que los lados horizontales del rectángulo son los de mayor dimensión (figura 6), entonces pasaríamos a realizar la deformación en sentido contrario, con lo que la goma se convierte en el contorno de muchos rectángulos (teóricamente infinitos) volviendo a obtener el cuadrado, terminando la deformación en el rectángulo con el que habíamos empezado. El cuadrado es pues un rectángulo particular y, por tanto, los cuadrados son un subconjunto de los rectángulos: $\{\text{Cuadrados}\} \subset \{\text{Rectángulos}\}$.

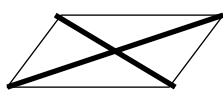


Figura 7

Tenemos pues que: $\{\text{Rombos}\} \cap \{\text{Rectángulos}\} = \{\text{Cuadrados}\}$.

Consideremos el paralelogramo que tiene por diagonales dos listones desiguales unidos por el agujero central y por contorno una goma elástica, que pasamos por los agujeros de los extremos de los listones y que atamos para cerrarla (figura 7). Deformamos esta construcción

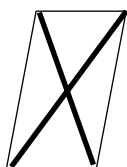


Figura 9

moviendo las diagonales por sus extremos inferiores aproximando dichos extremos, observamos que la goma se convierte en el contorno de muchos paralelogramos (teóricamente infinitos), uno de los cuales es un rombo, cuando las diagonales son perpendiculares (figura 8). Proseguimos con la deformación hasta que las bases del paralelogramo sean los lados de menor dimensión (figura 9), deteniéndonos entonces y pasando a deformar

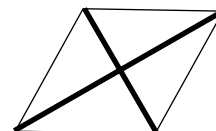


Figura 8

en sentido contrario, análogamente a los dos casos anteriores. Vemos, de manera análoga también, que el rombo es un paralelogramo particular, luego: $\{\text{Rombos}\} \subset \{\text{Paralelogramos}\}$.

Consideremos el paralelogramo el contorno del cual formamos con cuatro listones desiguales, siendo de la misma longitud los pares de listones opuestos (figura 10). Al deformar la estructura

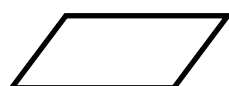


Figura 10

buscando que los ángulos que forman los listones sean ángulos rectos, podemos observar que el contorno se va transformando en la frontera de muchos paralelogramos (teóricamente infinitos) hasta que obtenemos un rectángulo (figura 11), continuando la deformación tenemos otra vez



Figura 11



Figura 12

paralelogramos de lados que no son perpendiculares (figura 12). Realizamos la deformación en sentido contrario, obteniendo: $\{\text{Rectángulos}\} \subset \{\text{Paralelogramos}\}$.

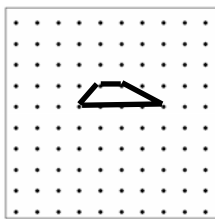


Figura 13

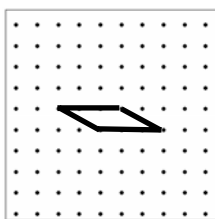


Figura 15

Consideremos un geoplano cuadrado de 10 x 10 y materialicemos con una goma elástica cerrada el contorno de un trapecio (figura 13). Cogemos la goma por el vértice superior derecho del trapecio y la desplazamos, hacia la derecha, por los pivotes del geoplano, sin variar la altura del cuadrilátero original. Va apareciendo el contorno de algunos trapecios (teóricamente infinitos), uno de los cuales es el contorno de un paralelogramo (figura 14). Procedemos a recorrer con la goma elástica los mismos pivotes de antes pero en orden inverso, volviendo a aparecer el paralelogramo, llegando al trapecio original. Cojamos ahora la goma por el vértice superior izquierdo del trapecio del principio y la desplazamos hacia la izquierda por los pivotes del geoplano, sin variar la altura del primer trapecio, apareciendo el contorno de varios trapecios (teóricamente infinitos), uno de los cuales es el contorno de un paralelogramos (figura 15). Finalmente vamos sujetando la goma

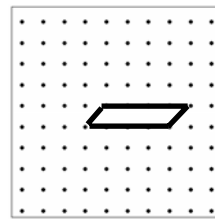


Figura 14

elástica en los mismos pivotes anteriores pero en orden inverso, volviendo a aparecer el paralelogramo, terminando en el trapecio original. El paralelogramo es pues un trapecio particular, por tanto: $\{\text{Paralelogramos}\} \subset \{\text{Trapezios}\}$.

Los trapezoides, cuadriláteros convexos que no tienen lados paralelos, completarían la clasificación.

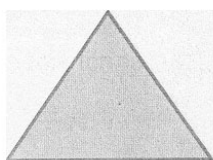
5. LAS CLASIFICACIONES DE LOS TRIÁNGULOS EN LOS TEXTOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Hemos realizado una búsqueda de cómo aparecen estos contenidos en algunas de las editoriales de textos para enseñanza Primaria. Concretamente hemos revisado libros de las editoras Anaya, SM y Santillana, tres de las empresas con más implantación en este campo.

En la clasificación de los triángulos por sus lados hemos encontrado que en el

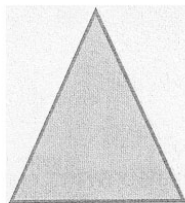
Según sean sus lados, un triángulo puede ser:

Equilátero



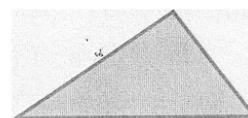
3 lados de igual longitud

Isósceles



2 lados de igual longitud

Escaleno



3 lados de diferente longitud

Triángulo equilátero es el que tiene los tres lados iguales.

Triángulo isósceles es el que tiene sólo dos lados iguales.

Triángulo escaleno es el que tiene los tres lados distintos.

manual de la editorial SM editado en 1.999 *Matemáticas de 3.º de Primaria*, en la página 153 (figura 16), en las definiciones que ilustra con una imagen del correspondiente triángulo, el criterio de clasificación elegido ha sido el incluyente, mientras que en las definiciones presentadas completas con texto escrito se ha optado por la clasificación excluyente.

En los libros de esta misma editorial correspondientes a los dos cursos siguientes *Matemáticas de 4.º de Primaria* edición del año 2.001 (página 161) y *Matemáticas 5.º de Primaria* editado en 2.002 (página 165), las clasificaciones adoptadas son de tipo incluyente, evitando la dualidad clasificatoria del texto de tercer curso, que únicamente puede producir conceptualizaciones erróneas en los niños y niñas.

Las publicaciones analizadas de las otras editoriales citadas han optado por la clasificación inclusiva de los triángulos por sus lados, como podemos ver en la página 109 del libro *Entre amigos 3.º de Primaria*, , editado en el año 2.002 por Santillana.

6. LAS CLASIFICACIONES DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS EN LOS TEXTOS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

En el texto de la editorial SM *Matemáticas de 3.º de Primaria*, editado en 1.999, en la página 154 (figura 17) encontramos que las definiciones nos indican claramente que se hace una clasificación excluyente.

Los cuadriláteros que tienen sus lados paralelos, dos a dos, se llaman paralelogramos.

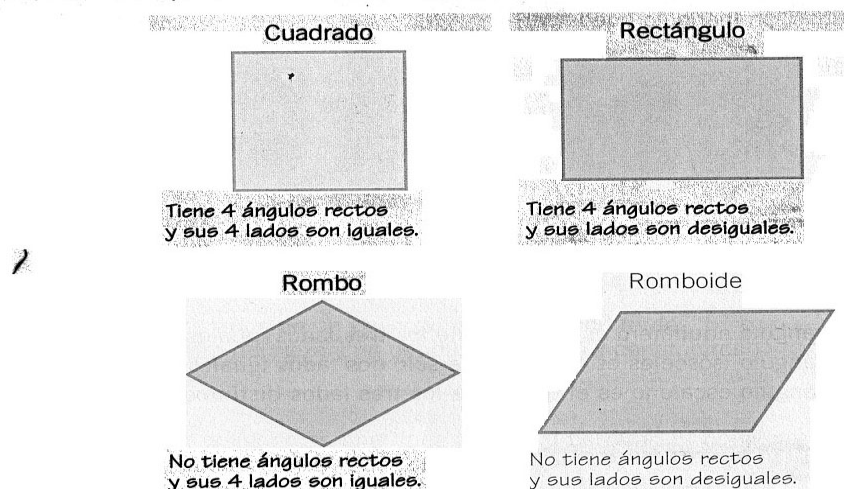


Figura 17

En el libro del curso siguiente, *Matemáticas de 4.º de Primaria*, edición del año 2.001, podemos ver en la página 162 (figura 18) que las definiciones de cuadrado, rectángulo y rombo nos indican que la opción elegida ha sido la clasificación inclusiva, análogamente que en el texto *Matemáticas 5.º de Primaria* (página 166) editado en 2.002, en evidente discordancia con la opción seguida en el manual de tercer curso.

No es esta la única diferencia entre estos textos, pues mientras en el de tercero de Primaria los romboides están bien definidos (figura 17), en los de cuarto y quinto (figura 18) los cuadrados, rectángulos y rombos también cumplen la definición de romboide.

La incorrecta definición de romboide también la encontramos en los libros de Santillana (*Entre amics 4t de Primària* -página 133-, del 2.002, publicado en la Comunidad Valenciana por Voramar) y Anaya (*Matemàtiques 5é Primària*, edición de 2.002).

Los cuadriláteros con lados paralelos dos a dos se llaman paralelogramos.

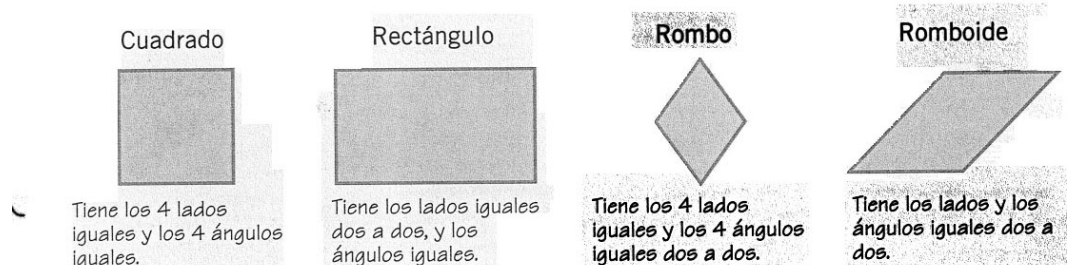


Figura 18

Excepto el manual de *Matemáticas de 3.º de Primaria* de la editorial SM, los restantes textos analizados presentan la clasificación inclusiva de los paralelogramos, en cambio, llama poderosamente la atención que, en la relación paralelogramos-trapecios, eligen la opción excluyente, como podemos ver (figura 19) en el texto *Matemàtiques 5é Primària* de Anaya, no siguiendo un mismo criterio en todas las clasificaciones en que existe la posibilidad de elegir.

PARAL·LELOGRAMS Són quadrilàters amb els costats paral·lels dos a dos.		NO PARAL·LELOGRAMS
RECTANGLE Costats iguals dos a dos. Quatre angles rectes.	QUADRAT Quatre costats iguals. Quatre angles rectes.	TRAPEZI Sols dos costats paral·lels.
ROMBOIDE Costats iguals dos a dos. Angles iguals dos a dos.	ROMBE Quatre costats iguals. Angles iguals dos a dos.	TRAPEZOIDE No té costats paral·lels.

Figura 19

7. CONCLUSIONES

En el libro de *Matemáticas de 3.º de Primaria* de la editorial SM se presentan los dos tipos de clasificaciones de los triángulos por sus lados, en los demás textos revisados se transmite sólo un tipo de esta clasificación, la inclusiva.

Nos parece que los autores de los manuales escolares deberían evitar presentar en un mismo curso dos tipos de clasificaciones, pues los niños y niñas de Primaria no poseen el desarrollo cognitivo necesario para poder entender y discernir ambas opciones de clasificación, lo que les puede provocar malas conceptualizaciones.

Excepto el manual de *Matemáticas de 3.º de Primaria* de la editorial SM, los restantes libros analizados presentan la clasificación inclusiva de los paralelogramos.

Nos alegra comprobar que el criterio mayoritario en las clasificaciones de triángulos y de paralelogramos es el inclusivo, el más natural desde el punto de vista de la construcción didáctica como hemos visto.

En la relación paralelogramos-trapecios, los autores de los textos eligen la opción excluyente, lo cual no acabamos de comprender dado que para la clasificación de los paralelogramos y para la de los triángulos se decantan por la otra opción.

Por último quisiéramos proponer a las editoriales una mayor coordinación entre los diferentes equipos de redactores de los textos de matemáticas de los distintos cursos de Educación Primaria para evitar casos como los mencionados.

8. BIBLIOGRAFÍA

ANAYA (2.002): *Matemàtiques 5é Primària*. València. Anaya.

CASTELNUOVO, Emma (1.981): *La Matemática. La Geometría*. Barcelona. Ketres.

DIRECCIÓN GENERAL DE ORDENACIÓN E INNOVACIÓN EDUCATIVA DE LA COMUNIDAD VALENCIANA (1.992): *Resolución de 12 de septiembre de 1.992, de la Dirección General de Ordenación e Innovación Educativa, en la cual da orientaciones metodológicas y para la evaluación, así como orientaciones para la secuenciación de contenidos por ciclos de la Educación Primaria* (DOGV - Núm. 1.912, de 26 de noviembre de 1.992, pp.11.713-11.804)

GENERALIDAD VALENCIANA (1.992): *Decreto 20/1.992, de 17 de febrero, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Valenciana* (DOGV Núm. 1.728, de 20 de febrer de 1.992, pp.1.428-1.502)

SANTILLANA (2.002): *Entre amigos 3.º de Primaria*. Madrid. Santillana.

SM (1.999): *Matemáticas 3.º de Primaria*. Madrid. SM.

(2.001): *Matemáticas 4.º de Primaria*. Madrid. SM.

(2.002): *Matemáticas 5.º de Primaria*. Madrid. SM.

VORAMAR (2.002): *Entre amics 4t de Primària*. València. Voramar.

LÚNULAS, ALGO MÁS QUE MATEMÁTICAS

M. Adán, R. Cano, J.A. Contreras, F. Ropero, C. Ruiz, A. Solla
*I.E.S. Stª. Mª de Alarcos, Ciudad Real*⁷

Resumen

Se presenta una experiencia de aula realizada en el I.E.S. Stª Mª de Alarcos de Ciudad Real por el Departamento de Matemáticas en los cursos 3º y 4º de E.S.O. y 1º Bachillerato. La figura geométrica denominada *lúnula*, conocida pero poco estudiada, es el objeto de la experiencia. A través del empleo de herramientas informáticas como son un navegador de internet y un programa de geometría dinámica, se introduce, se motiva y se estudia dicha figura y algunas de sus peculiaridades.

1. Introducción

Entre los factores que influyen en el éxito o fracaso de la enseñanza en la educación secundaria, pensamos que está el de su conexión con el mundo real [1]. Por desgracia, nuestras prácticas muchas veces están tremendamente alejadas de la realidad. No solo de la particular realidad de nuestros alumnos sino de la propia realidad de la materia que queremos enseñar. Así, la omnipresencia de las nuevas tecnologías y el nuevo mundo de internet, tan apreciado por todos y en especial por nuestros alumnos, queda habitualmente fuera de una enseñanza en la que la pizarra es la única “referencia tecnológica”.

Como ocurre en muchos centros, en ocasiones hemos llevado a cabo alguna experiencia en la que el uso del ordenador nos ayuda al liberarnos de cálculos y realizar largas y complejas tareas matemáticas en pocos segundos. En esta experiencia hemos pretendido ir un poco más allá: hemos puesto el foco de atención en un concepto matemático novedoso para nuestros alumnos y lo hemos abordado desde una perspectiva cultural más amplia. Así, nos han interesado conocimientos sobre su presencia en el mundo, su aparición como concepto matemático, su utilización histórica y su aportación estética. Y todo nuestro trabajo se ha desarrollado integrando diversas herramientas informáticas sin las cuales no hubiéramos podido desarrollarlo. Los resultados obtenidos de la experiencia nos animan a continuar en esta línea.

En primer lugar nos hemos ayudado de la navegación por internet para proponer en una página web un guión que informe y dirija el trabajo de los alumnos (web-quest). A través de internet hemos propuesto una búsqueda de aspectos históricos y culturales que motive el trabajo matemático posterior. En éste hemos utilizado un programa de geometría dinámica como es Cabri para responder a los problemas que se planteaban. Por último, hemos sugerido el uso de herramientas generales como programas de dibujo y procesador de texto para realizar un diseño artístico y un informe final de la experiencia.

2. Nuestra experiencia: Las lúnulas de Hipócrates.

Hemos elegido como centro de interés una forma geométrica plana de entre las formas redondeadas clásicas como es la *lúnula*. Es decir, la delimitada por dos arcos de circunferencia con igual concavidad y tangentes en dos puntos. Dicha forma aparece en la antigüedad ligada al nombre de Hipócrates de Chios (siglo V a.C.) quién la utilizó en su intento de cuadrar el área del círculo [2]. Su intento fracasó pero fue el primero en

⁷ Correspondencia por e-mail: madan@roble.pntic.mec.es

calcular el área de una región limitada por líneas curvas: una lúnula. En el siglo XVIII, Euler las utiliza en su “Solutio Problematis Geometrici circa Lunulas a Circuli formatas” (1744) en el que presenta sus soluciones a un problema de Daniel Bernouilli relacionado con la disección del círculo en piezas de igual área [3].

Aparte de estos trabajos matemáticos, las lúnulas aparecen en numerosas situaciones relacionadas con el arte, la joyería, la naturaleza, el diseño gráfico, ..., como podemos ver en la figura 1, y, por supuesto, ¡si miramos al cielo en una noche despejada!.



Figura 1.

Los objetivos culturales que hemos planteado para los alumnos y también para nosotros mismos han sido de índole matemática, técnica y estética. Hemos querido conocer algo sobre la historia de dicha figura, en concreto su aparición ligada al importante problema de la cuadratura del círculo y aprovechar esta situación para proponer algunos problemas geométricos, algunos de ellos son sencillos y pueden resolverse con geometría de lápiz y papel. Sin embargo, los atractivos programas de geometría dinámica invitan a resolver los problemas con unos nuevos modos de actuación, permitiéndonos resolver problemas que de otro modo son inabordables. Nuestra experiencia anterior con estos programas nos ha hecho enfocar así el trabajo con garantías de éxito. Y ya que tenemos en nuestras manos un programa de dibujo geométrico, ¿como no plantearnos una actividad sencilla de diseño!. Una reflexión posterior a las tareas propuestas y la evaluación de las mismas nos ayuda a integrar los conocimientos adquiridos y revisar, para mejorar, las actividades realizadas.

Para el grupo de compañeros del departamento el diseño, la puesta en marcha y la organización de esta actividad también ha sido un pequeño reto. Con el objetivo de facilitar la organización, cada una de las tareas realizadas: el diseño de una web-quest, la elaboración de los problemas, la preparación de las aulas de informática, etc, han recaído sobre dos o tres compañeros, con ello se enriquecen las aportaciones individuales, se favorece el intercambio de ideas y se obtiene una trabajo más homogéneo y coordinado.

La experiencia se ha desarrollado teniendo en cuenta que:

- los grupos han sido de 3º, 4º de E.S.O. y 1º de Bachillerato
- cada grupo dedicaría entre las 7 y las 10 horas de trabajo en el aula y unas 2 horas en casa
- los alumnos trabajarían todo el tiempo en pequeño grupo (2 a 4 personas)
- disponíamos de dos aulas de informática y cada dos alumnos compartían un ordenador conectado a internet.

El esquema del proceso seguido ha sido el siguiente. Se presenta a los alumnos la web-quest [4] explicándoles su sentido y utilidad. Una vez que han abordado las primeras cuestiones históricas (1), se les introduce en el uso del programa de geometría dinámica, y empiezan a resolver las cuestiones geométricas (2) y posteriormente las de diseño artístico (3). Una vez concluidas, se les pide que entreguen una evaluación

personal de la experiencia (4). En el Apéndice se presenta el contenido de estos epígrafes.

3. Resultados

En el aspecto organizativo hemos tenido las habituales dificultades en las aulas de informática: problemas horarios, de funcionamiento, de inexperiencia,..., no obstante queremos resaltar la importancia de éstas aulas que día a día se van convirtiendo en verdaderos laboratorios de matemáticas.

En cuanto al trabajo desarrollado por profesores y alumnos merece la pena anotar que:

- * la práctica totalidad de ellos se involucra con interés en las tareas propuestas, consiguiendo enganchar a alumnos que habitualmente no tienen el menor interés. De todas formas también se ha visto a algunos alumnos a los que les ha ocurrido lo contrario, posiblemente por su inseguridad con la herramienta informática.

- * todos valoran muy positivamente la autonomía que les da este trabajo, lo que les lleva a considerar estas clases muy amenas y relajadas. En el caso de los profesores pensamos que sería deseable una actividad trimestral de este estilo.

- * utilizan muchos conceptos geométricos de manera integrada: simetrías, movimientos, perpendicularidad, medida, ...

- * son pocos los alumnos que terminan las tareas en su totalidad, les suele quedar algún problema por terminar y algunos no entregan el trabajo artístico

- * pasan muy rápidamente de las cuestiones iniciales (1) a los problemas (2), seguramente provocado por la falta de costumbre en trabajar en otros aspectos que los puramente matemáticos y motivados por la herramienta geométrica. Además creemos que la distribución del tiempo ha contribuido a ello.

- * en los trabajos artísticos se observa excesiva repetición de ideas en los alumnos de un mismo curso, evidenciando falta de creatividad. No obstante, siempre aparecen ideas muy interesantes y divertidas como podemos ver en la figura 2.

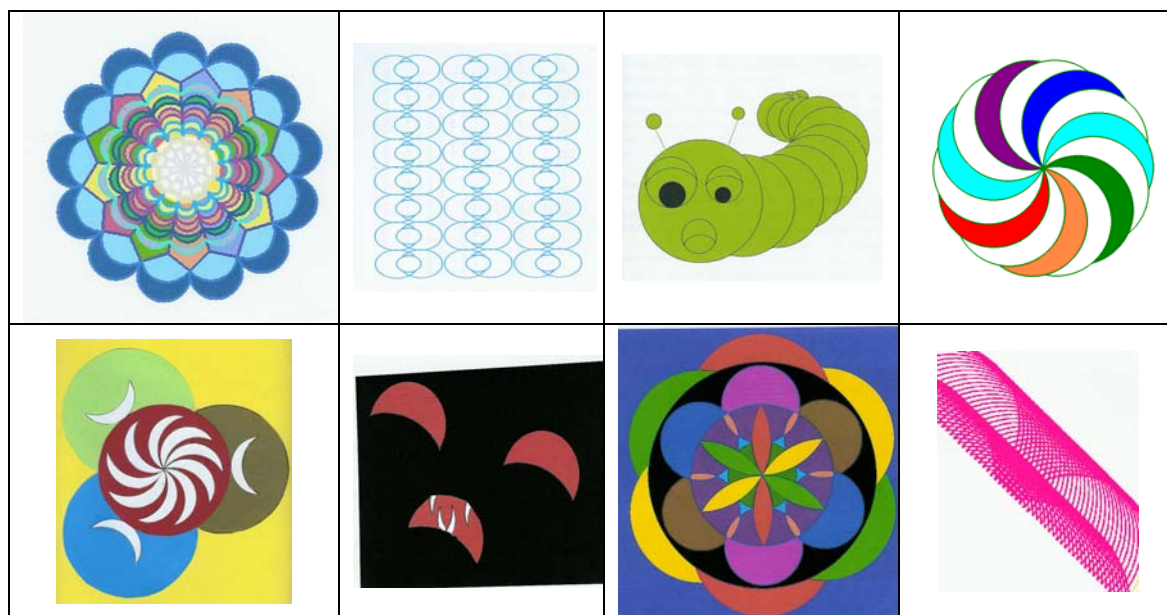


Figura 2

- * por nuestra parte hemos sentido que la experiencia ha sido más positiva de lo que esperábamos en algunos aspectos como el interés y esfuerzo demostrado por los alumnos, en la pérdida del respeto a la utilización del aula de informática, la excelente

ocasión para unir criterios y debatir entre compañeros del mismo departamento. En otros, al contrario, esperábamos un resultado más satisfactorio, por ejemplo en los aspectos más matemáticos y algún otro ya comentado.

* valoramos muy positivamente la especial unión de la geometría y el arte.

Como resumen de la valoración que hacen los alumnos podemos citar algunas frases de las que han escrito en su evaluación:

* “Lo que nos ha gustado ha sido el programa Cabri, nos ha hecho hacer y conocer la geometría como algo divertido y entretenido, no como algo aburrido y cuadriculado”

* “De manera práctica se memorizan mejor los resultados”

* “La forma de plantear el trabajo ha sido original ya que nunca habíamos hecho un trabajo de matemáticas por ordenador ni trabajar con una web-quest”

* “Me ha gustado la curiosidad de las lúnulas y porque se pueden encontrar en muchos lugares, tanto en nuestras uñas como en el universo”

* “Lo que más nos ha gustado ha sido la forma de aprender ya que nunca hemos aprendido nada así”

Para nosotros, esta experiencia ha supuesto un primer paso dado de manera conjunta en la dirección de una enseñanza en la que es posible la innovación, levantar la mirada más allá de las páginas del libro, la crítica, el estudio y el cambio de los métodos de enseñanza, la consideración del mundo en el que vivimos y de las posibilidades que ofrece la tecnología actual para llegar, como decía nuestro maestro Miguel de Guzmán, “a un dialogo inteligente con las herramientas que ya existen, de las que algunos ya disponen y otros van a disponer en un futuro que ya casi es presente” . .

Referencias

[1] <http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/>

[2] Douglas Jiménez. *Matemáticas recreativas*. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol.XI, nº1 (2004)

[3] <http://math.dartmouth.edu/~euler/>

[4] <http://www.jccm.es/edu/ies/santamariadealarcos/>

Apéndice

1.- Adquisición de conocimientos.

Responded a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué son las lúnulas de Hipócrates?
- ¿En dónde las podéis observar?
- ¿Qué importancia histórica han tenido?
- Construid una lúnula de Hipócrates con los utensilios de dibujo.
- Construid una lúnula de Hipócrates con el programa Cabri.

2.- Resolución de problemas.

Problema 1 (3º ESO): Dado un triángulo equilátero de lado a , dibuja un cuadrado que tenga igual área que él.

Problema 2 (3º ESO): Demuestra que el área de un triángulo rectángulo isósceles de

Problema 1 (4º ESO): Demuestra que el área de un cuadrado de lado a coincide con la suma de las áreas de las lúnulas construidas sobre cada uno de los lados.

Problema 2 (4º ESO): Se considera un cuadrado de lado r . Se considera el

cateto a coincide con el área de la lúnula construida sobre la hipotenusa.

Problema 3 (4º ESO): Sobre una circunferencia, podemos dibujar muchas lúnulas. Algunas son pequeñas y otras son más grandes como las de la figura. ¿Sabrías encontrar la lúnula más grande?



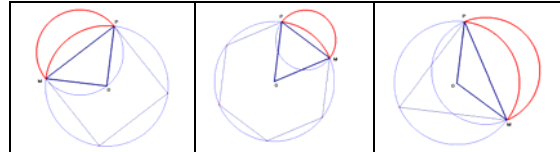
Ayúdate de Cabri para representar una lúnula, para medir su área y luego investiga la posición de la que encuentres con mayor área. ¿Qué valores de los siguientes crees que serían correctos como respuesta?: la longitud del arco mayor, la longitud del arco menor, el ángulo POQ, la longitud del radio, el valor del área de la lúnula, la medida del segmento PQ, el valor del sector circular, el área del segmento circular...

Problema Común 1: Como ya hemos visto en un problema anterior, si dividimos la circunferencia en cuatro partes iguales y construimos una lúnula sobre una de ellas, el área de la lúnula (L) coincide con el área del triángulo rectángulo (T) de vértices OPM. Es decir, que $L - T = 0$.

triángulo rectángulo isósceles de altura r . Demuestra que el área del cuadrado coincide con el área de la lúnula construida sobre la hipotenusa del triángulo.

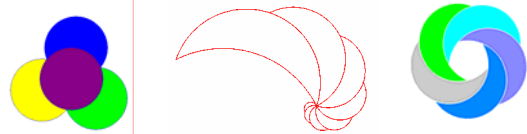
Supongamos ahora que dividimos la circunferencia en 6 partes. ¿Qué área es mayor, la de T o la de L?. ¿Sabrías calcular el valor de $T - L$?

Supongamos por último que dividimos la circunferencia en 3 partes. ¿Qué área es ahora mayor?. ¿Sabrías calcular ahora el valor de $L - T$?



Problema Común 2:

Fíjate en las figuras que te presentamos.



Constrúyelas utilizando Cabri de manera que al variar su tamaño inicial, se mantenga su aspecto (es decir, tienes que realizar una construcción geométrica y no un simple dibujo artístico).

3.- Creación artística.

Usando las lúnulas realizad una construcción artística (mosaico, composición, collage, ...). Como ejemplo véase la figura 3.

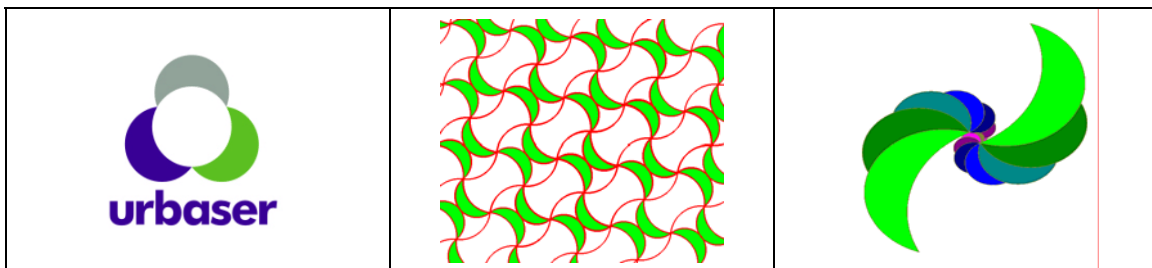


Figura 3

4.- Elaboración de un informe final.

En él se recogerán los aspectos más interesantes y destacados de la actividad, así como una valoración personal de la misma destacando los conceptos que habéis

aprendido, los procedimientos adquiridos, las dificultades encontradas y la manera en la que las habéis resuelto.

UN DISEÑO CUASIEXPERIMENTAL. SU IMPLEMENTACIÓN EN UN SISTEMA DE ACCIONES PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS.

Dra. María de Lourdes Bravo Estévez
Universidad de Cienfuegos. Cuba

Dr. José Joaquín Arrieta Gallastegui.
Universidad de Oviedo. España.

Durante varios años nos hemos dedicado a estudiar y a profundizar en los aspectos relacionados con la resolución de problemas, poniendo énfasis en los relacionados con las demostraciones en Geometría. Especialmente, nos hemos centrado en investigar qué sucede con tales problemas cuando se enfrentan a ellos los estudiantes que se forman para ser, en el futuro, profesores y profesoras de Matemáticas, dada su importancia para su posterior labor docente.

Esta problemática nos condujo a reflexionar sobre nuestra propia práctica educativa, como docente en la carrera de Licenciatura en Educación Especialidad Matemática-Computación, elaborando y aplicando un sistema de acciones para la enseñanza de las demostraciones geométricas, en busca de mejoras en su aprendizaje y en la actuación, de forma independiente, de los estudiantes en la resolución de problemas de demostración.

Para este trabajo, partimos del estudio de investigaciones, relacionadas con el aprendizaje de las demostraciones, de autores como Hanna (2000), Dreyfus (2000), Martínez Recio (2000), Ibañez (2001), De Villiers (2003) y Balacheff (2004), además de analizar las acciones para resolver problemas geométricos propuestas por estudiosos del tema como George Polya (1982), Jungk (1988), Butkin (Talízina 1992) o Valverde (1990), entre otros.

Al investigar acerca de nuestra propia práctica diaria, con experiencia de trabajo en la disciplina Geometría y en la formación del profesorado, consideramos oportuno seleccionar un tipo de investigación práctica, recurriendo a un método de experimentación, para estudiar los resultados del sistema aplicado en un grupo, para compararlos con los de otro que continuaba con los procedimientos que empleábamos habitualmente. **El objetivo** de esta comunicación es, precisamente, el de describir y exponer los resultados obtenidos en la implementación de un diseño cuasiexperimental, recurriendo a un sistema de acciones que contribuye al desarrollo de la habilidad “demostrar” (para una comprensión detallada de la investigación, ver Bravo, 2002).

En nuestra investigación, utilizamos un diseño similar al experimental, en su programación de procedimientos, pues no hemos podido tener un control total sobre el experimento, debido a las complejidades de las carreras pedagógicas, especialmente en cuanto a la rápida inserción en el aula de los estudiantes que se forman para profesores y profesoras como docentes en Cuba.

En la aplicación del sistema de acciones tuvimos bien presente que los elementos en que nos faltó un control no influyeran en los resultados de los instrumentos para la validación, por lo que empleamos uno de los tipos de diseño cuasiexperimental de los propuestos por Campbell y Stanley (1988), lo suficientemente válido como para poder ser utilizado allí donde no se pueda recurrir a otras formas de estudio más experimentales.

El diseño cuasiexperimental seleccionado fue el de “grupo de control no equivalente”, esto es, comprende un grupo experimental y otro de control, recibiendo ambos uno o varios pretest al inicio del estudio y un posttest al finalizar éste.

En nuestra fase experimental planteamos la siguiente **hipótesis**: la aplicación del sistema de acciones para guiar la actividad de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos de demostración, provoca cambios significativos en el desarrollo de la habilidad para realizar demostraciones de forma independiente, con relación a los grupos que no la utilizan.

Las variables del experimento eran:

- **Variable Independiente**: sistema de acciones para guiar la actividad de los estudiantes en la resolución de problemas geométricos de demostración.

Definimos el sistema propuesto como la combinación ordenada de acciones que, a pesar de que trabajan de manera independiente, se relacionan e interactúan entre sí, con el fin de alcanzar un desarrollo significativo de la habilidad “demostrar”, lo que contribuye a la formación geométrica de los estudiantes. Las acciones del sistema son las siguientes: modelar geoméricamente el problema, identificar premisa y tesis, reformular el problema, seleccionar el método de demostración, recopilar información independientemente de su utilidad, representar la demostración (materializar el plan de solución) y analizar los resultados según las distintas vías de solución.

El sistema se caracteriza por un continuo uso del desarrollo del componente de imaginación espacial, su carácter generalizado, sus funciones orientadora, ejecutora y de control, una formación instructiva y educativa para su futura profesión, un trabajo sistemático, en cuanto a algunos de los procesos básicos del pensamiento, y que da paso a la discusión de vías de solución que propician flexibilidad y fluidez del pensamiento.

Para la variable independiente mencionada se tendrían dos niveles: el primero, experimental, asociado a la utilización del sistema de acciones para el tratamiento de las demostraciones geométricas, mientras que el segundo está relacionado con el método didáctico hasta entonces utilizado, en el que no se tiene en cuenta un sistema de acciones con elementos potenciadores de la imaginación espacial y rasgos de la creatividad en las acciones.

- **Variable Dependiente**: habilidad “demostrar”.

La habilidad “demostrar” la definimos como el dominio de un sistema de acciones psíquicas y prácticas que permiten una regulación racional de la actividad demostrar proposiciones geométricas con ayuda de conocimientos y hábitos que el sujeto posea, caracterizando su forma de interactuar con el objeto de estudio hasta transformarlo (tomamos como referencia la definición de Valverde, 1990).

El nivel de desarrollo de la habilidad “demostrar” se medirá básicamente por el conocimiento y ejecución independiente de las acciones propuestas en el sistema, utilizando, para ello, una escala ordinal, poniendo el énfasis más bien en “qué conocen los estudiantes”, en lugar de prestar atención a aquello “que no conocen”, centrándonos en el progreso (con o sin ayuda) de las acciones.

Aplicamos un pretest y un postest a los estudiantes del segundo año de la carrera Licenciatura en Educación Especialidad Matemática-Computación de la Universidad Pedagógica de Cienfuegos, para evaluar el nivel de desarrollo de la habilidad “demostrar”, repitiendo en dos cursos escolares la experimentación, es decir, en un curso se toman el grupo experimental y de control #1 y al siguiente curso el #2.

Los grupos anteriores constituyeron entidades formadas naturalmente, de equivalencia no asegurada, por lo que hicimos un estudio preliminar que nos permitió asegurar que los mismos estaban en igualdad de condiciones al iniciar el experimento. La asignación del grupo experimental fue aleatoria y controlada por los investigadores.

Con los instrumentos aplicados utilizamos un conjunto de técnicas para el análisis de los resultados en la comparación pretest–postest en los grupos experimentales y de control, técnicas que se mencionan a continuación:

- Prueba U Mann-Whitney: la utilizamos para conocer si los grupos experimentales y de control eran muestras independientes tomadas de la misma población antes y después de aplicar la estrategia (análisis vertical).
- Prueba de Wilcoxon: la usamos para comparar los resultados del pretest y postest con respecto al desarrollo de la habilidad “demostrar” en cada grupo (análisis horizontal).

Los resultados principales arrojados por la Prueba U Mann-Whitney al comparar los grupos experimentales y de control en el pretest y en el postest fueron los siguientes:

	SIGNIFICACIÓN DE LA PRUEBA U MANN-WHITNEY	
	PRETEST	POSTEST
Primer curso	0,763	0,002
Segundo curso	0,851	0,020

De la lectura de los resultados obtenidos pudimos asumir que, antes de aplicar la estrategia didáctica, no existían diferencias significativas entre los estudiantes de los grupos experimentales y de control en ambos cursos escolares, pues la probabilidad asociada (0,763 y 0,851) era mayor que 0,05, nivel de significación que establecimos; mientras que después que se trabajó con la propuesta en los grupos experimentales, resultó que había diferencias significativas entre los estudiantes del grupo experimental con respecto a los del grupo de control, ya que la probabilidad asociada (0,002 y 0,020) era menor que el nivel de significación fijado.

A su vez, los resultados obtenidos por la Prueba Wilcoxon al comparar los grupos experimentales y de control en la relación pretest-postest fueron los siguientes:

PRUEBA WILCOXON			
Primer curso		EXP #1	CON #1
	Sig. asintót. (bilateral)	,000	,083
Segundo curso		EXP #2	CON #2
	Sig. asintót. (bilateral)	,000	,083

Al contrastar los resultados del grupo experimental del primer curso y del segundo en la relación pretest-postest resultó que, en ambos, la probabilidad asociada era casi nula, por lo que podíamos afirmar que había diferencias significativas entre los resultados del pretest y postest en los grupos donde fue aplicado el sistema. Sin embargo, en los dos grupos de control se obtuvo una probabilidad asociada de 0,083, que no es menor que 0,05, por lo que no había diferencias significativas entre los resultados del pretest y postest en los grupos donde no fue aplicado el sistema, sólo se apreciaban algunos cambios positivos, de forma general, en el desarrollo de la habilidad, pues recibían un contenido que propiciaba tales cambios.

Conclusiones de la investigación

Los resultados obtenidos en la fase experimental nos permitieron arribar a las siguientes conclusiones:

- No existen diferencias significativas entre los grupos experimentales y de control en los resultados del pretest. Tal situación se entiende como que antes de utilizar el sistema de acciones, todos los estudiantes tienen las mismas posibilidades para un desarrollo de la habilidad “demostrar”.
- Existen diferencias significativas entre los grupos experimentales y de control en los resultados del postest. Se interpreta de los datos obtenidos que con la aplicación del sistema de acciones en los grupos experimentales se logra un desarrollo cualitativamente superior en el desarrollo de la habilidad “demostrar” durante el estudio de la Estereometría.
- Existen diferencias significativas en el desarrollo de la habilidad “demostrar” en los estudiantes de los grupos experimentales entre su pretest y su postest.
- No hay diferencias significativas en el desarrollo de la habilidad “demostrar” en los grupos de control entre su pretest y su postest.

En la fase experimental se constató que en los grupos donde se aplicó el sistema de acciones como herramienta en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las demostraciones geométricas, se obtuvo un desarrollo significativo de la habilidad “demostrar” resolviendo de forma independiente los problemas geométricos de demostración, lo que condujo a un rendimiento académico superior en los estudiantes, con relación a los que no se le aplicó, lo que puede constituir un elemento para una mejor preparación geométrica en sentido general.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Arsac, G. (2002). El origen de la demostración: ensayo de epistemología didáctica. En : <http://www.lettredelapreuve.it>
- Azcárate Giménez, C. (2001). Definiciones, demostraciones, ¿por qué?, ¿cuándo?, ¿cómo?. 10^{mas} Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. En: <http://www.unizar.es/ice/jaem/programa.html>
- Balacheff, N. (2004). The researcher epistemology : deadlock for educational research on proof. En : <http://www.lettredelapreuve.it>
- Bravo Estévez, M. L. (2002). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas*. Tesis doctoral, Universidad de Oviedo. (España).

- Calvo Pesce, C. (2001). *Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesis doctoral, Universidad de Barcelona. (España).
- Campbell, D. y Stanley, J. (1988). *Diseños experimentales y cuasiexperimentales en la investigación social*. 4^{ta} edición en castellano. Buenos Aires: Amorrortu editores.
- De la Torre Fernández, E. y Fiol, M. L. (2000). Pensar cómo pensamos. Reflexiones metodológicas. Reflexiones en torno a la demostración. Recopilación de textos preparados por miembros del Grupo de Trabajo “Aprendizaje de la Geometría” de la SEIEM. En: <http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html>
- De Villiers, M. (2003). Rethinking Proof with Sketchpad 4. En : : <http://www.lettredelapreuve.it>
- Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En Gorgorió, N., Deulofeu, A. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona: Graó, S. L., 125-133.
- Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1/2), 5-23.
- Ibañez Jalón, M. J. (2001). *Aspectos Cognitivos del Aprendizaje de la Demostración Matemática en los Alumnos de Primer Curso de Bachillerato*. Tesis doctoral, Universidad de Valladolid. (España).
- Ibañez Jalón, M. J. y Ortega del Rincón, T. (2002). La demostración en el currículo: una perspectiva histórica. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas*, 39, 53-61.
- Jungk, W. (1988). *Conferencia sobre Metodología de la enseñanza de la Matemática 2*. La Habana: Libros para la Educación.
- Martínez Recio, A. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática*. Tesis doctoral, Universidad de Granada. (España).
- Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas*. 10^{ma} reimpresión. México: Trillas, S. A.
- Reid, D. A. (2002). What is proof?. En: <http://www.didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/02Ete/WhatIsProof.pdf>
- Talízina, N. (1992). *La formación de la actividad cognoscitiva de los escolares*. México: Ángeles.
- Thompson, D. R. y Senk, S. L. (1993). Assessing Reasoning and Proof in High School. En *Assessment in the Mathematics Classroom*. Virginia: Yearbook, 167-176.
- Valverde Rodríguez, L. (1990). Un método para contribuir a desarrollar la habilidad para fundamentar-demostrar una proposición matemática tomando como base una asignatura de primer año de los Institutos Superiores Pedagógicos. Tesis doctoral, ISP Enrique José Varona. (Cuba).

PARALELOGRAMOS A PARTIR DE CUADRILÁTEROS

Miguel Antonio Esteban

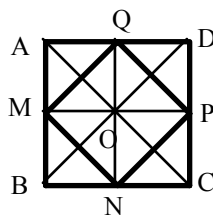
Vamos a estudiar las figuras que se forman cuando en un cuadrilátero

1. Se toman como vértices los puntos medios de sus lados.
2. Se toman como lados las paralelas a las diagonales trazadas por los vértices.

Lo haremos sucesivamente con el cuadrado, el rectángulo, el rombo y con un paralelogramo cualquiera (¿por qué no llamarlo *romboide*?), y veremos si es posible generalizar los resultados obtenidos al caso de un cuadrilátero cualquiera (¿*trapezoide*?).

1

* En el cuadrado ABCD se toman como vértices los puntos medios de sus lados, M, N, P y Q.



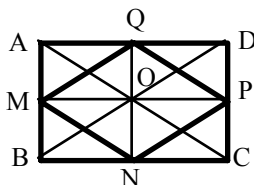
Teniendo en cuenta que QN y MP son ejes de simetría del cuadrado ABCD, resulta:

a) los lados de MNPQ son iguales y sus ángulos son rectos, por lo que es un cuadrado.

b) como $MQ = BO$, el perímetro es igual a la suma de las diagonales del cuadrado ABCD.

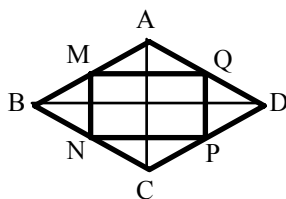
c) por ser iguales los triángulos MAQ y MOQ, el área es la mitad del área del cuadrado inicial.

* Hagamos lo mismo en el rectángulo ABCD.



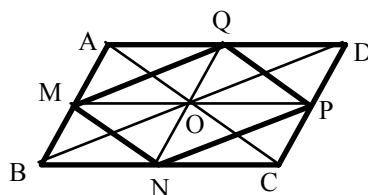
Procediendo de análoga manera, se deduce que MNPQ es un rombo con las propiedades b y c del apartado anterior.

* Tomamos ahora un rombo ABCD.



Teniendo en cuenta que las diagonales del rombo son ejes de simetría, se deduce que MNPQ es un rectángulo, con las mismas propiedades que en los casos anteriores.

* Partimos ahora de un paralelogramo cualquiera ABCD.



El paralelogramo no tiene, como el cuadrado y el rombo, ejes de simetría, pero el punto O de intersección de las diagonales es centro de simetría, por lo que MQ y NP son iguales y paralelos, resultando que MNPQ es un romboide.

Como $MQ = BO$, resulta que el perímetro de MNPQ es igual a la suma de las diagonales de ABCD.

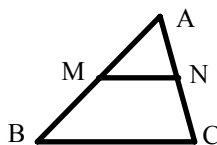
Finalmente, por ser iguales los triángulos MAQ y MOQ, el área de MNPQ es la mitad del área de ABCD.

A la vista de los resultados anteriores, podemos concluir que: si en un paralelogramo se toman como vértices los puntos medios de los lados, se obtiene un paralelogramo de perímetro igual a la suma de las diagonales del paralelogramo inicial y de área igual a la mitad del área de éste.

¿Ocurrirá lo mismo si partimos de un cuadrilátero cualquiera, en lugar de partir de un paralelogramo?

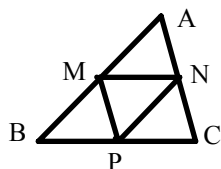
Ya no podemos recurrir a simetrías, puesto que un trapecioide no tiene ni centro ni ejes de simetría, pero sí podemos hacer uso de los siguientes teoremas:

Teorema 1. *En todo triángulo el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.*



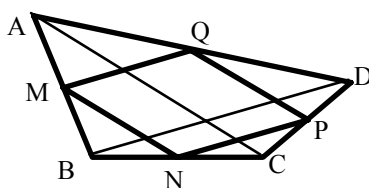
MN es paralelo a BC y $MN = BC/2$

Teorema 2. *Uniando los puntos medios de los lados de un triángulo se forman cuatro triángulos iguales.*



Los triángulos AMN, MBP, PMN y NPC son iguales, por lo que el área de cada uno es un cuarto del total.

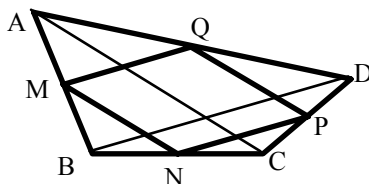
Sea el cuadrilátero ABCD, siendo M, N, P y Q los puntos medios de sus lados.



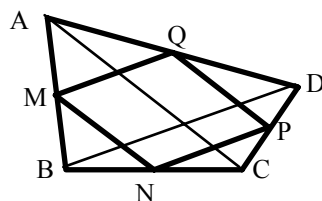
Teniendo en cuenta el teorema 1, en el triángulo ABC, MN es paralelo a AC y vale $AC/2$; y en el triángulo ADC, QP es paralelo a AC y vale también $AC/2$; por tanto, MN y QP son iguales y paralelos, por lo que MNPQ es un paralelogramo. Análogamente, en los triángulos ABD y CBD, MQ y NP son paralelos y valen $BD/2$. Resulta, pues, que MNPQ es un paralelogramo.

Veamos en qué condiciones el paralelogramo MNPQ es un rectángulo, un rombo o un cuadrado.

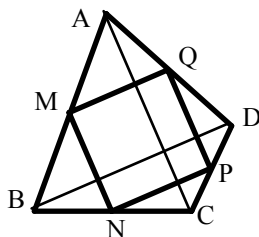
Para que sea rectángulo, esto es, para que dos lados contiguos MN y MQ sean perpendiculares, han de ser perpendiculares las diagonales AC y BD del cuadrilátero.



Para que sea rombo, es decir, para que dos lados contiguos MN y MQ sean iguales, las diagonales AC y BD del cuadrilátero han de ser iguales.



Finalmente, para que sea cuadrado, esto es, rectángulo y rombo, las diagonales deben ser perpendiculares e iguales.



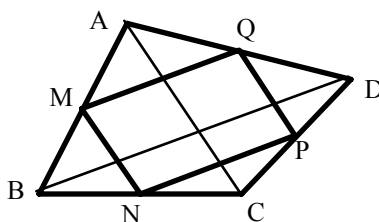
Calculemos el perímetro.

Hemos visto antes que

$$\left. \begin{array}{l} MN = QP = \frac{1}{2} AC \\ MQ = NP = \frac{1}{2} BD \end{array} \right\} \Rightarrow 2 \cdot MN + 2 \cdot MQ = AC + BD$$

Luego el perímetro del paralelogramo MNPQ es igual a la suma de las diagonales del cuadrilátero ABCD.

Vamos a calcular el área. Aplicando el teorema 2:



$$\left. \begin{array}{l} S_{AMQ} = \frac{1}{4} S_{ABD} \\ S_{CPN} = \frac{1}{4} S_{CBD} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{AMQ} + S_{CPN} = \frac{1}{4} S_{ABD} + \frac{1}{4} S_{CBD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

Análogamente

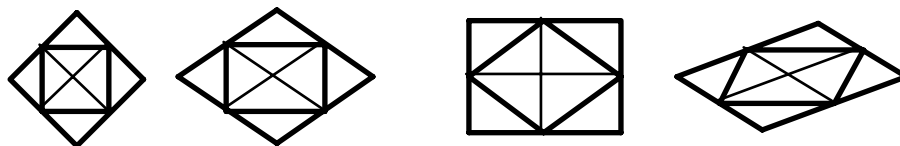
$$\left. \begin{array}{l} S_{BMN} = \frac{1}{4} S_{ABC} \\ S_{DPQ} = \frac{1}{4} S_{ACD} \end{array} \right\} \Rightarrow S_{BMN} + S_{DPQ} = \frac{1}{4} S_{ABC} + \frac{1}{4} S_{ACD} = \frac{1}{4} S_{ABCD}$$

Se observa que las áreas de los triángulos exteriores al paralelogramo suman la mitad del área del cuadrilátero MNPQ, por lo que el área del paralelogramo es también la mitad de la del cuadrilátero.

En consecuencia, los resultados obtenidos para el cuadrado, el rombo y el romboide son válidos para un cuadrilátero cualquiera.

Si en un cuadrado, un rectángulo, un rombo, un rectángulo o un paralelogramo cualquiera trazamos paralelas a sus diagonales, de foma análoga a como se hizo en el

apartado 1, es fácil demostrar que se forman, respectivamente, un cuadrado, un rombo, un rectángulo o un paralelogramo.

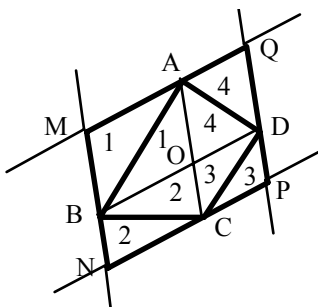


En el primer caso resulta un cuadrado porque las diagonales del de partida son iguales y perpendiculares; en el segundo se obtiene un rombo por ser iguales las diagonales del rectángulo, en el tercero un rectángulo porque las diagonales del rombo son perpendiculares. En los cuatro casos se obtiene un paralelogramo.

Se demuestra fácilmente que el perímetro vale el doble de la suma de las diagonales y el área el doble del área del inicial.

Tratemos de ver si estas propiedades se conservan cuando partimos de un cuadrilátero cualquiera.

Sea el cuadrilátero ABCD.



Trazando por A y C paralelas a la diagonal BD y por B y D paralelas a la diagonal AC, se forma el cuadrilátero MNPQ, que es un paralelogramo porque sus lados opuestos son iguales y paralelos.

Por ser $MQ = NP = BD$ y $MN = QP = AC$, el perímetro de MNPQ es igual al doble de la suma de las diagonales de ABCD.

La figura MBOA es un paralelogramo, por lo que los triángulos designados con el número 1 son iguales; también son iguales los designados con 2, con 3 y con 4. De esto se deduce que el área del paralelogramo MNPQ es doble del área del ABCD.

FORMAS ESTRELLADAS SOBRE RECTÁNGULOS

Fernández Benito, I.
I.E.S. María Moliner
Laguna de Duero (Valladolid)

Reyes Iglesias, E
E.T.S. Arquitectura
Universidad de Valladolid

1. ESTRELLA DE BRUNES

Se construye a partir de un cuadrado, uniendo cada uno de los puntos medios de sus lados con los vértices del lado opuesto. La forma estrellada de ocho puntas, conocida como estrella de Brunes, queda configurada al resaltar el contorno definido por esta construcción. Obsérvese (parte central de la Figura 1) que es un polígono cóncavo de dieciséis lados.

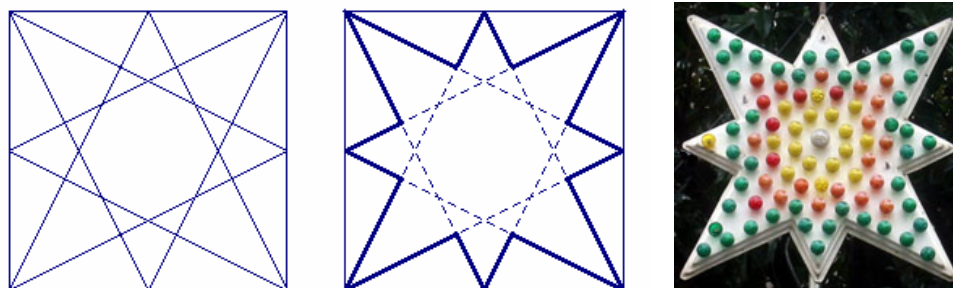


Fig. 1

El ingeniero danés, Tons Brunes, en su obra “The Secrets of Ancient Geometry (1967) expone que esta enigmática estrella, junto con el llamado “corte sagrado” construido también sobre un cuadrado, formaban parte de los sistemas geométricos constructivos de los templos en la edad antigua.

En el gótico español de los siglos XV y XVI se aprecian estrellas de Brunes en las proyecciones de bóvedas de crucería. Así, por ejemplo, dentro de la arquitectura civil, el esquema geométrico de la planta del cimborio del Hospital de Santa Cruz en Toledo, incluye una estrella de este tipo. De arquitectura religiosa del periodo moderno, la bóveda sobre el vestíbulo de la Sagrada Familia de Barcelona, proyectada por Gaudí, posee formas estrelladas similares a la de Brunes.

El azulejo de la Figura 2 es un buen ejemplo de objeto cotidiano diseñado por un procedimiento análogo.



Fig. 2

2. PROPIEDADES DERIVADAS DE ESTA CONSTRUCCIÓN

- 2.A El cuadrado inicial se divide en una malla formada por nueve cuadrados congruentes, cuyo lado mide la tercera parte del lado del cuadrado inicial.

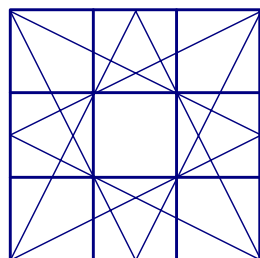


Fig. 3

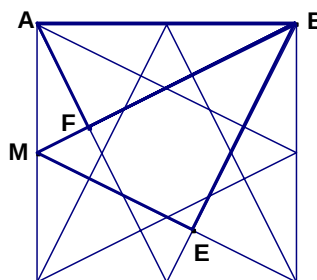


Fig. 4

- 2.B Los segmentos que intervienen en la construcción de la estrella originan triángulos de diversos tipos (Figura 4). Así, por ejemplo, el triángulo BEM es semejante al pitagórico 3, 4, 5; el ABM (mitad de un rectángulo duplo) tiene sus lados en proporción $1, 2, \sqrt{5}$; los triángulos AFB y AFM son semejante al ABM y por tanto tiene la misma proporción; etc.
- 2.C Se determina un octógono convexo equilátero (parte izquierda de la Figura 5) cuyo centro coincide con el del cuadrado de partida.

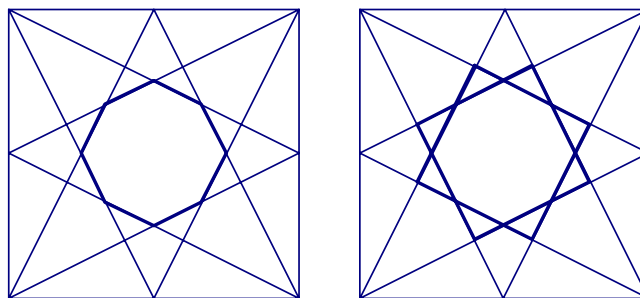


Fig. 5

- 2.D Aparece una forma estrellada compuesta por dos cuadrados concéntricos entrelazados, cuya apariencia recuerda a la estrella 8/2 formada por dos cuadrados girados. (Figura 5, parte derecha)
- 2.E La estrellada 8/2, mencionada en el apartado anterior, se obtiene uniendo alternativamente los vértices de un octógono regular. Si se considera el octógono irregular construido a partir de los cinco cuadrados que componen una cruz griega, como se muestra en la parte izquierda de la Figura 6, con el procedimiento de conectar sus vértices dejando sin unir uno, se obtiene una forma estrellada que coincide con la determinada en el apartado 2.D, cuando se ha trazado una estrella de Brunos sobre un cuadrado. (Parte derecha, Figura 6).

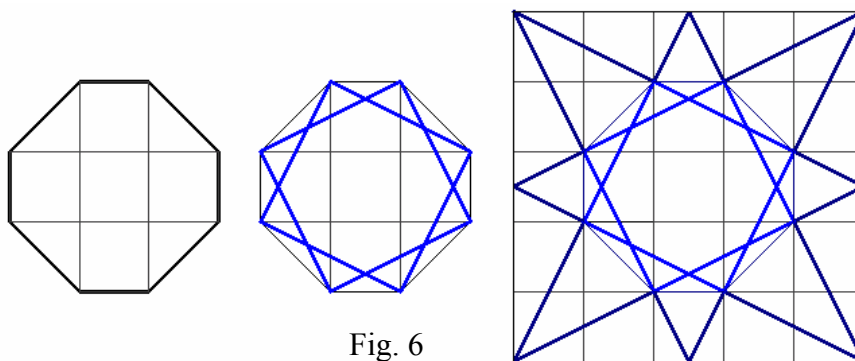


Fig. 6

3. GENERALIZACIÓN A UN RECTÁNGULO

Si sobre un rectángulo cualquiera efectuamos trazados similares a los que originan la estrella de Brunes sobre un cuadrado, se produce una trisección de las longitudes de los lados del rectángulo.

Para ello, basta intersecar las diagonales del rectángulo, con los segmentos que unen cada uno de los puntos medios de dos lados paralelos con los respectivos vértices del lado opuesto (parte izquierda Figura 7).

Prescindiendo de las diagonales y repitiendo los trazados anteriores, tomando los puntos medios de los cuatro lados del rectángulo (parte derecha Figura 7), se obtienen las mismas trisecciones. Además queda determinada una malla de nueve rectángulos semejantes al de partida, con razón de semejanza $1/3$. Se genera, también, una estrella de ocho puntas deformada respecto de la de Brunes.

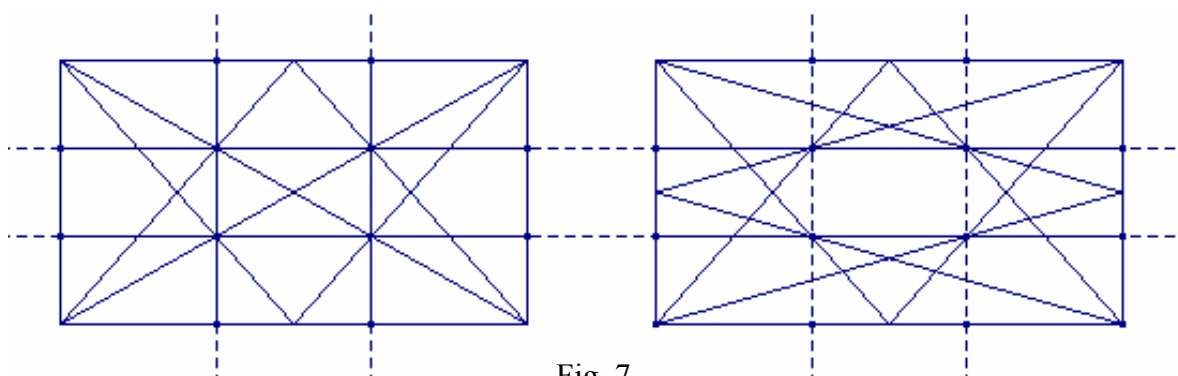


Fig. 7

Estos trazados tienen especial interés sobre un rectángulo $\sqrt{2}$. En efecto, dado un rectángulo de lados OA y AB , la diagonal OB corta perpendicularmente al segmento AM , siendo M el punto medio del lado BC , sí y sólo sí, el rectángulo está en proporción $\sqrt{2}$. Esta propiedad puede justificarse de dos formas:

Prueba 1. En la parte izquierda de la Figura 8, se representa un rectángulo de lados a y b , en el sistema de referencia indicado. Para que los vectores $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{AM}$ sean ortogonales debe verificarse que:

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AM} = (a, b) \cdot \left(-\frac{a}{2}, b\right) = -\frac{a^2}{2} + b^2 = 0, \text{ de donde, } a^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

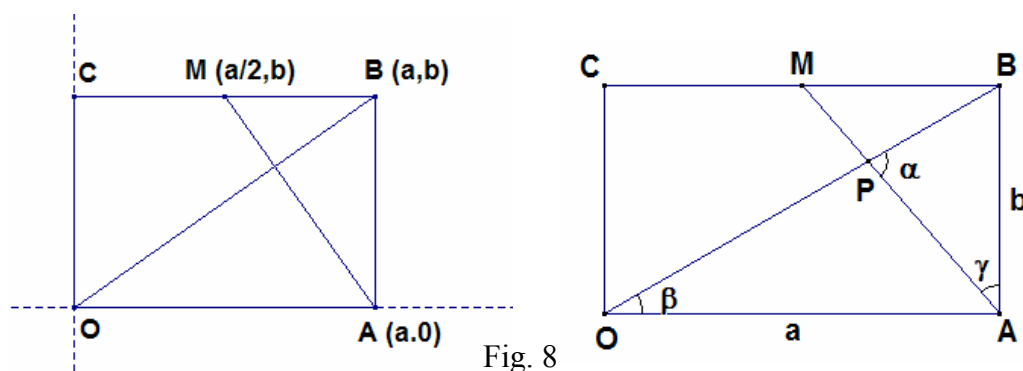


Fig. 8

Prueba 2. Considerando los triángulos rectángulos OAB y ABM del rectángulo situado en la parte derecha de la Figura 8, se tiene:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{a/2}{b}. \text{ Además, } \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - \beta) \right) = \cot g(\alpha - \beta)$$

y, por tanto, $\frac{a}{2b} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$. Operando y sustituyendo el valor $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$, se obtiene:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3ab}{a^2 - 2b^2}, \text{ de donde, } \alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}.$$

Como consecuencia de esta propiedad, al realizar otro trazado análogo desde el vértice C, el rectángulo inicial queda dividido en dos rectángulos recíprocos internos con su misma proporción. Además esta división es el principio básico de los formatos DIN.

4. APLICACIONES EN ARQUITECTURA Y ARTE

4.A Esquema geométrico de construcción de una puerta para templos

El arquitecto italiano Sebastiano Serlio (1475-1554), utilizó la trisección que se produce sobre los lados del cuadrado, cuando se intersectan sus diagonales con los segmentos que unen el punto medio de un lado con los vértices opuestos, para el diseño de la puerta proporcionada al lugar donde se encuentra. (Figura 9).

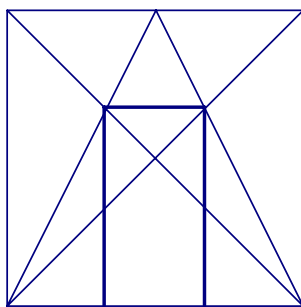


Fig. 9

4.B Trazado de una ventana circular

Siguiendo pautas geométricas, según el arquitecto mencionado anteriormente, puede diseñarse un ojo de buey de la siguiente forma:

Sobre el segmento que determina la anchura del lugar, donde se desea construir el óculo, se trazan una semicircunferencia y el rectángulo circunscrito. En este rectángulo, procediendo de forma similar a la descrita en el apartado 4.A para un cuadrado, se obtienen dos puntos desde los cuales se dibujan segmentos

perpendiculares a la base del rectángulo. La distancia entre ellos (tercera parte de la longitud del segmento inicial) es el diámetro del círculo base de la ventana, y su centro, la intersección de las diagonales del rectángulo.

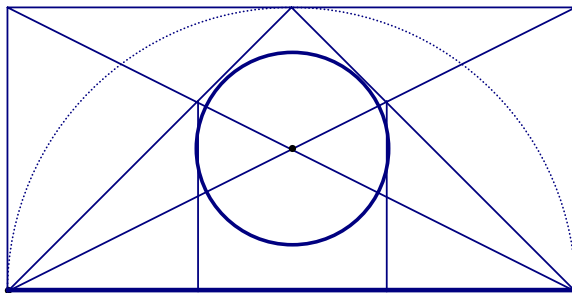


Fig. 10

4.C Trazados reguladores en obras pictóricas

En la historia de la pintura se ha constatado que los artistas descomponen el lienzo mediante entramados formados por segmentos que con cierta frecuencia se corresponden a los descritos anteriormente. Por ejemplo “La parada” de Seurat, “Las diversiones” de Léger, etc.

4.D Elementos decorativos

En la fotografía de una balconada de la Gran Sinagoga de Budapest (Figura 11) se constata la presencia de formas estrelladas diseñadas a partir de los trazados básicos que conforman la estrella de Brunes.



Fig. 11

5. BIBLIOGRAFÍA

- FERNÁNDEZ, I., REYES, E. *Geometría con el hexágono y el octógono*, Proyecto Sur de Ediciones. Granada, (2003).
- GÓMEZ MARTÍNEZ, J. *El gótico español de la edad moderna: Bóvedas de crucería*, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid, (1998).
- KAPPRAF, J. *Beyond Measure*, World Scientific. Singapur, (2002).
- REYES, E. Proportions mathématiques et leurs applications à l'Architecture. Bulletin IREM-APMEP, Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques de Toulouse, (1998).
- SERLIO, S. *Tutte l'opere d'architettura et prospettiva di Sebastiano Serlio*. Reproc. Facs. Ed. de Vinegia 1600. Colegio oficial de Aparejadores y Arquitectos Técnicos de Asturias. Oviedo, (1986).

DE LA GEOMETRÍA DEL ELÁSTICO (TOPOLOGÍA) A LOS PUZZLES DE ALAMBRE

Pablo Flores Martínez.

Departamento de Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Granada.

Resumen

*Los aficionados a los juegos de ingenio aprovechamos jornadas como las JAEM para enfatizarlos, tratando de convencer a los asistentes que estos juegos están muy relacionados con las Matemáticas y que tienen un gran interés educativo. Esta tarea no siempre es fácil, ya que a la natural prudencia de los profesores que nos escuchan se une a veces la dificultad de demostrar proximidad entre Matemáticas y algunos juegos. Este es el caso en los **puzzles de alambre**, a los que se llama puzzles topológicos, pero cuya relación con la Topología no es fácil de establecer de manera clara. Y es que cuando se consideran a los puzzles de alambre como puzzles topológicos se está queriendo decir que para solucionarlos hay que tener en cuenta algunos aspectos relacionados con la diferencia entre abierto y cerrado, dentro y fuera, etc. En esta comunicación trataré de justificar un poco más esta relación, a la vez que trataré de mostrar algunas variables que se utilizan para clasificar los puzzles de alambre.*

Introducción

Los puzzles de alambre son juguetes muy antiguos, que evidentemente ayudan a los que los utilizan a desarrollar estrategias para resolver situaciones cotidianas relacionadas con extraer o meter objetos dentro de otros, amarrar objetos, etc. Caben dentro de lo que llamamos “juegos de ingenio”, ya que su solución no es evidente, y si alguna vez lo resolvemos sin pensar no resulta fácil volverlo a la posición original. Por tanto su interés para desarrollar destrezas nadie lo niega, lo que se hace necesario es analizar los juegos para ver de qué tipo son estas destrezas. En unas jornadas como las JAEM nos interesaría saber en qué sentido colaboran a desarrollar destrezas relacionadas con la educación matemática. Eso exige que demos dos pasos: aclarar la relación que existe entre los puzzles de alambre y las Matemáticas, y analizar la riqueza educativa que tienen los juegos.

La primera parte la solemos salvar aludiendo al título de “juegos topológicos”, para denotar los puzzles de alambre. Pero ¿qué queremos decir con ello? Se va haciendo necesario profundizar en la relación que existe entre la Topología y estos juegos. La otra línea de análisis se basa en descubrir las cualidades educativas de los juegos de alambre, y a ello hemos dedicado diversos trabajos (Flores 2002; Montoya y Flores 2003; Flores 2003), en los que argumentamos que los puzzles topológicos colaboran a crear visión espacial en los que los practican. Estas cualidades didácticas se verían reforzadas si pudiéramos apoyarlas en la relación conceptual con las Matemáticas. En esta comunicación nos centramos en recorrer el espacio que existe entre la Topología y los puzzles de alambre, para lo cual necesitamos focalizar la atención en la Teoría de Nudos, y posteriormente introducir nuevos aspectos no topológicos que son importantes en los puzzles de alambre. Para ello vamos a comenzar por caracterizar la Topología, posteriormente pasaremos a la Teoría de Nudos, y de ahí volcaremos sobre los puzzles

de alambre, mostrando algunos problemas que existen en su universo, y algunas variables que podemos emplear para clasificar los puzzles, lo que será un paso previo a la definición de la identidad de cada puzzle.

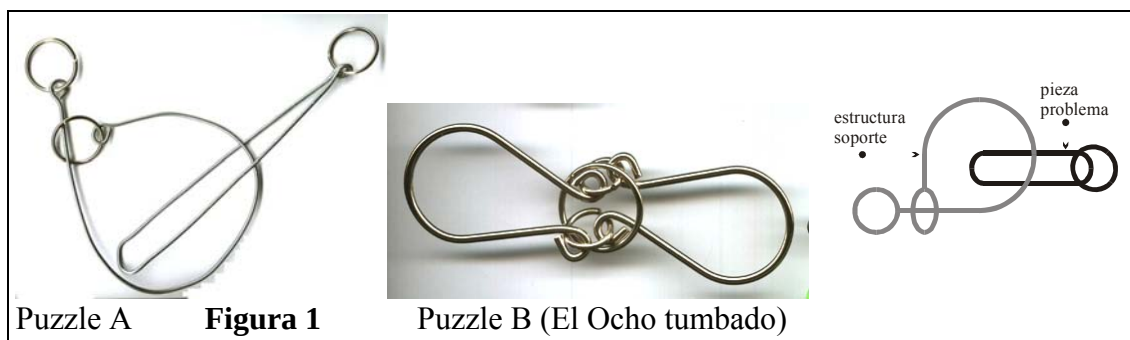
De la Topología a la Teoría de Nudos

Desde los tratados matemáticos formales, se considera a la Topología como el estudio abstracto del concepto de *punto límite* (Hocking y Young, 1966). Muchos conceptos matemáticos están relacionados con el *límite*, como la idea de *función continua*, pero también la de **conexión** de una figura geométrica (en la que hay que definir la idea de “dentro de”, frontera, etc.). Como nos dicen Courant y Robbins (1969), la Topología estudia las propiedades de los cuerpos que permanecen invariantes ante transformaciones topológicas⁸. Los divulgadores de la matemática nos sugieren la idea de transformación elástica (o de la goma elástica) para ejemplificar la transformación topológica (Stewart, 1998). La gráfica de una función no cambia su continuidad por medio de una deformación elástica, al igual que no cambia la conexión de una superficie ante su deformación. De ahí que se identifique a la Topología con la geometría del elástico, y se dice que trata de aquellas propiedades que permanecen inalterables cuando se deforman los cuerpos por medio de transformaciones continuas (Stewart, 1977). O, en palabras de Hogben (1966), todo lo que se puede transformar cuando no se conservan las relaciones métricas ni la forma visible. En lenguaje cotidiano traduciríamos las caracterizaciones anteriores al decir que la Topología estudia las relaciones que se mantienen cuando se deforman los cuerpos sin cortarlos ni unir trozos separados. Por tanto una de las propiedades topológicas es el número de partes de que se compone la figura, es decir, el número de regiones *conexas*⁹ que la componen. Pero las regiones están delimitadas por bordes, por lo que el número de regiones está relacionado con el número de bordes de la figura. Gracias a estos elementos podemos definir lo que entendemos por figura abierta y figura cerrada. La Topología formal recurre a la caracterización de estos adjetivos con la idea de conjunto abierto y cerrado, así como las operaciones que se pueden establecer entre ellos, lo que lleva a la caracterización de lo que se entiende por un *Espacio Topológico* en Topología (Hocking y Young, 1966).

Cuando pasamos a los puzzles de alambre percibimos que hay algunos elementos topológicos que podemos aprovechar. Podemos diferenciar puzzles con una, dos o más piezas, con lo que podríamos caracterizar su grado de conexión. También podríamos analizar el “cierre” de cada figura. Parece evidente que esta última característica tiene una relación mayor con los puzzles de alambre, pues un puzzle con piezas abiertas requiere estrategias diferentes que la que tiene sus piezas cerradas. (Figura 1)

⁸ O transformaciones continuas, esto es correspondencias biunívocas y bicontinuas, es decir, que si tenemos dos puntos P y Q y sus transformados, y hacemos que la distancia entre P y Q tienda a cero, también tiene que tender la distancia entre sus transformados.

⁹ Regiones en las que dos puntos cualesquiera se pueden unir por curvas contenidas completamente en ellas.

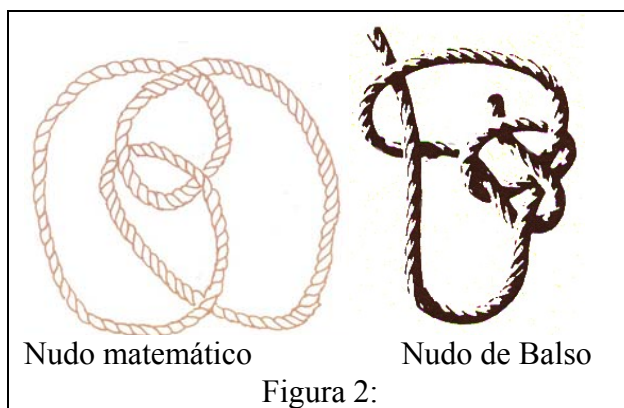


Como se ve en la figura 1, el puzzle A tiene partes abiertas y partes cerradas. Sin embargo el puzzle B tiene todas sus partes cerradas. Si ambos puzzles tienen solución es debido a que las piezas que hay que extraer (que en ambos casos son cerradas), están enlazadas de diferente forma. Mientras en el A parte de la *estructura soporte* (Montoya y Flores 2003; Flores, 2003) atraviesa a la pieza a extraer (*pieza problema*), en la figura B la pieza problema abraza a la estructura base, sin estar atravesada por ella.

Como vemos, las condiciones de cierre nos llevan a fijarnos en otras características, tales como el estar dentro o fuera. Estas características no son ajenas a la Topología, sino que han sido objeto de atención de la Teoría de Nudos, con la que la relación de los puzzles de alambre es mayor.

La Teoría de Nudos

Surgida en el siglo XX, la Teoría de Nudos es una parte de la Topología que estudia las curvas unidimensionales trazadas en el espacio de dimensión tres, de forma que se inicien y terminen en un mismo punto y no se corten a sí mismas (Neuwirth 1979). Como vemos, la idea matemática de nudo no coincide exactamente con la idea cotidiana, ya que nuestros nudos no tienen los extremos unidos. Esta es una cualidad establecida por los matemáticos para poder llevar a cabo su estudio, ya que si el nudo está abierto se puede aplicar una transformación topológica y convertirlo en una cuerda no anudada (Figura 2).



Cuando emprendemos el estudio topológico de los puzzles de alambre surge el mismo problema, si nos valemos de las transformaciones topológicas para estudiar los puzzles de alambre nos vamos a encontrar que los puzzles abiertos, como el A de la figura 1 son triviales. Igualmente serían triviales todos los puzzles de clavos (Flores, 2002). Por tanto hemos de admitir que si bien la Topología es

necesaria para estudiar los puzzles de alambre, no es suficiente.

Volviendo a los nudos, Ian Sewart (1998) los define como superficies formadas por una figura continua que se enlaza a sí misma o a otras superficies continuas. Con ello la *Teoría de Nudos* se encarga de determinar si un nudo está realmente anudado¹⁰, a

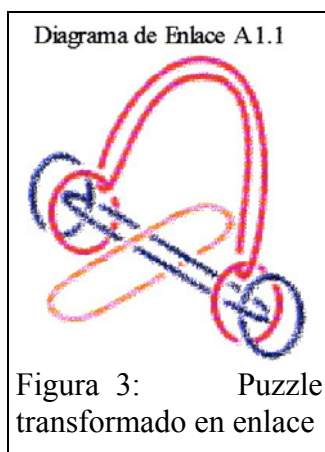
¹⁰ Es decir, si no se desata al aplicarle una transformación topológica

determinar que nudos son equivalentes al aplicarle la transformación y a clasificar los nudos. Para resolver estos tres problemas se buscan variables que permanezcan invariantes a las transformaciones topológicas, lo que ha generado nuevos conceptos específicos, como los polinomios asociados a los nudos.

Intuitivamente para clasificar los nudos se han comenzado por estudiar las intersecciones, la forma y el número de cruces, si los bucles están enlazados, la simetría, etc. Pero observamos que estas propiedades no quedan caracterizadas por el grado de conexión, por lo que focalizan la atención sobre otras propiedades de las figuras, lo que da lugar a una teoría propia, sumergida en la Topología (Cormwell, 2004). En efecto, no podemos determinar interior y exterior, ya que las curvas que los forman tienen dimensión 1. Un intento de estudiar los nudos por medio de la Topología clásica fue recurrir a envolver los nudos por superficies sólidas que los contengan, y estudiar las características de esas superficies debidas exclusivamente a los nudos. Estas regiones tienen interior y exterior, borde, etc., por lo que se prestan al estudio topológico clásico, pero tal como muestra Iam Stewart (1994), hay nudos diferentes que producen una misma superficie complementaria, por lo que se recurrió a otras herramientas que generó una rama de la Topología con cierta autonomía. Nosotros creemos que para el estudio de los Puzzles de alambre tenemos que introducir también otros elementos a los meramente topológicos o de nudos, al añadir cualidades diferentes.

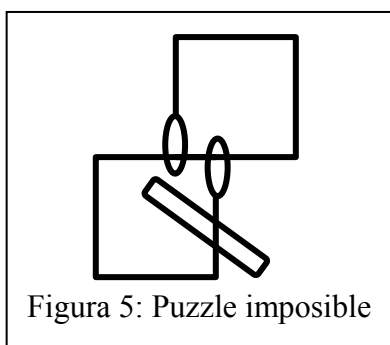
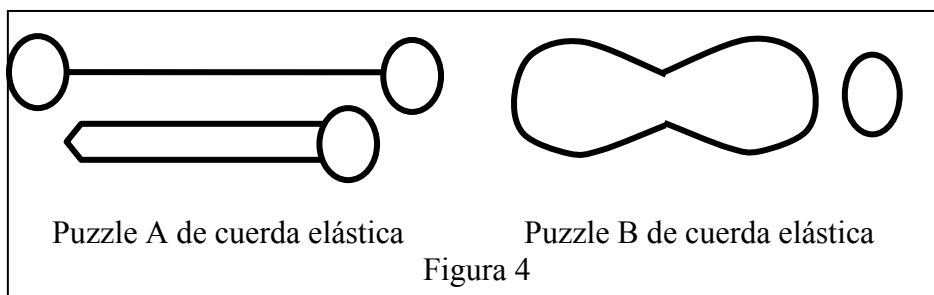
De los Nudos a los puzzles de alambre

Al partir de la Teoría de Nudos para estudiar los puzzles de alambre nos encontramos con que así como los nudos matemáticos son cerrados, con los puzzles no ocurre lo mismo. Pero además algunas partes de las piezas se cortan entre sí, con lo que no pueden considerarse nudos. En Latinoamérica, dos compañeros, Montoya y Gómez-Alcalá (2001) hicieron un trabajo en el que transformaron los puzzles en *enlaces matemáticos*, con objeto de poder aplicar algunos resultados de la Teoría de Nudos a los puzzles. En la figura 3 se observa cómo queda transformado en enlace un puzzle similar al A de la figura 1.



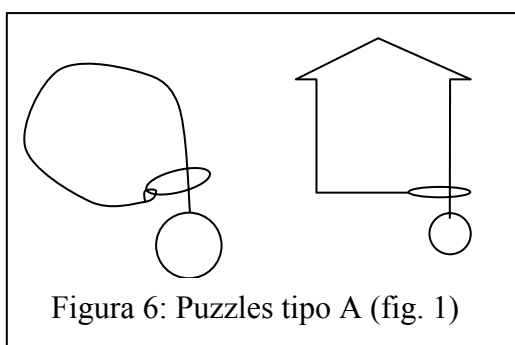
Este trabajo les suministró un resultado importante, una condición necesaria para que un puzzle de alambre tenga solución. *Un rompecabezas de alambre tiene solución si uno de sus invariantes topológicos consiste en que el nudo problema establezca un enlace trivial con el resto de los nudos. Es decir si el enlace que representa el juego en el inicio puede llevarse mediante transformaciones continuas al enlace que representa el juego resuelto.* (Montoya y Gómez-Alcalá, 2001).

Intuitivamente traduciríamos que un puzzle de alambre sólo tiene solución si al convertir el alambre en cuerda elástica (que permite transformaciones elásticas), se puede extraer la pieza problema de la estructura soporte, bien por que esta estructura se convierta en un nudo trivial, bien por que se pueden soltar. En la figura 4 vemos como los dos puzzles de la figura 1 quedan al transformarlos en puzzles de cuerda elástica, el A convertido en una pieza abierta terminada en dos argollas y el otro en dos piezas que se separan sin problemas.



Esta condición les permitió demostrar que un puzzle de alambre clásico como el de la figura 5 no tiene solución, pese a que aparece en muchas colecciones y se oferta como “imposible”¹¹. Este puzzle ha sido objeto de estudio en Matemáticas (Coffin, s.f.)

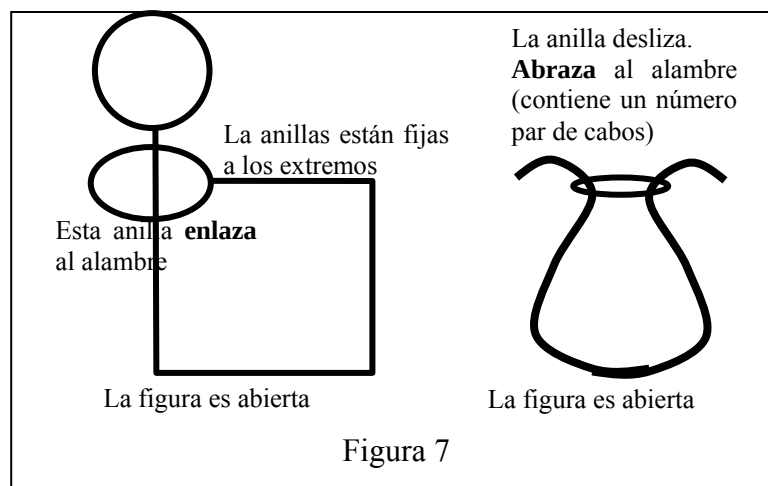
También los puzzles de alambre se plantean problemas similares a la Teoría de Nudos. Un problema muy importante de los coleccionistas de puzzles es señalar las diferencias entre ellos. ¿Qué tiene que cambiar para que lo consideremos diferente? ¿Son diferentes dos formas como las de la figura 6?:



Si bien se ha hecho un gran esfuerzo en clasificar los puzzles, a lo máximo que se ha llegado es a establecer variables generales y a incluir los puzzles de alambre en el tipo *tnaglement puzzles* (puzzles de enredo, Dalguety & Horden, s.f.), o a diferenciar los puzzles de alambre de los puzzles de metal. Para clasificar los puzzles de alambre tenemos que afinar más, para lo que necesitamos elementos que nos permitan establecer

equivalencias entre los puzzles. Para ello podemos recurrir a diferenciar a) elementos topológicos que repercutan en la forma de resolver los puzzles, b) elementos geométricos (forma y medida) o c) otros elementos que disimulen la estructura. Entre los elementos topológicos hemos comenzado a distinguir si las piezas están *abiertas* o *cerradas*, si su posición relativa es estar *dentro* o *fuera* de la estructura, el *número de agujeros* o partes de cada pieza, si las piezas *se abrazan* o *se enlazan*, si las piezas están *atrapadas* o *permiten deslizarse*, son *simples* o *con ramificaciones*, etc. Entre los elementos geométricos se encuentran aspectos ligados a la *forma*, a las características de la forma en los *puntos críticos* (en los que se encuentran las piezas que cierran la estructura, como el que en ellos se produzca una inflexión, por ejemplo), a la *rigidez* y *movilidad* general, etc. Entre los otros encontramos aspectos que van desde el tamaño respectivo de las piezas, el número de pasos, los materiales y su aspecto, etc. En la figura 7 podemos ver algunas de estas diferenciaciones, que nos permiten caracterizar cada puzzles. Gracias a ello podemos emprender una primera clasificación, recurriendo a criterios cruzados para establecer clases.

¹¹ En las colecciones se suele indicar la dificultad de los puzzles, pero se emplean términos chocantes, por lo que “imposible” puede significar “un reto para expertos”, cuando en realidad aquí quiere decir “sin solución”.



A partir de estas observaciones he realizado una primera clasificación de los puzzles que ya he reflejado en diversas publicaciones, y que tiene un fundamento principalmente topológico, gracias a lo que puedo decir algunas características de los puzzles de cada clase:

A) Puzzles Meter-salvar. La estructura soporte suele ser abierta, aunque una parte que puede ser cerrada traba al menos uno de los extremos, lo que deja a la pieza problema (que incluso puede ser cerrada¹²) enlazada en la estructura soporte.

B) Puzzles Escamoteables. La estructura soporte suele ser cerrada, y la pieza problema la abraza. Para resolverlos hay que escamotear una parte de la estructura con el resto.

C) Clavos. Se componen de dos piezas que suelen ser iguales o simétricas, ambas abiertas, por lo que la traba se establece por que el grosor de las piezas es superior el tamaño del hueco que forma cada pieza para evitar la salida de la otra.

Esta supone una clasificación básica, que luego puede ramificarse, estableciendo subclases, ya que el tipo A es muy amplio y permite variaciones complicando el sistema (por medio de piezas que requieren la realización de muchos pasos), o cerrando aparentemente la estructura soporte, lo que obliga a flexibilizar la pieza problema, convirtiéndola en cuerda, por ejemplo. Igualmente los escamoteables pueden diferenciarse por otros aspectos, como el emplear espiras, lo que añade a las restricciones topológicas las ligadas al sentido de giro de las espiras, que requiere una coincidencia para su posibilidad de escamoteo. Por último hay que reconocer que la creatividad de los autores de estos puzzles les ha llevado a proponer modelos mixtos, en los que se combinan las dificultades debidas a unos y otros puzzles.

Conclusiones

Este breve análisis ha pretendido justificar que tiene sentido llamar puzzles topológicos a los puzzles de alambre, pues para tener solución necesita que las piezas verifiquen unas condiciones topológicas determinadas (Montoya y Gómez-Alcalá, 2001). Pero además por que jugar y ejercitarse con ellos hace percibir cualidades topológicas (estar abierto cerrado, enlazar, abrazar, etc.) (Flores 2003). Ahora bien, puede resultar abusivo si se presta a confundir la Topología con los puzzles, en los que existen cualidades

¹² El que la pieza sea abierta no es una condición necesaria para que el puzzle tenga solución, por lo que, como en Matemáticas, establecemos la condición mínima. Sin embargo para los jugadores poco versados esta diferencia puede ser importante.

métricas y rígidas que no corresponden a estos puzzles. Hemos visto que el estudio de los juegos se enriquece con la Topología, pues ella nos permite establecer algunas condiciones de solución, nos suministra algunas variables para diferenciar el tipo, así el número de cabos que atraviesan una pieza nos permiten distinguir si la pieza abraza o enlaza. Si el número de cabos que atraviesa el interior es par, la pieza abraza a la otra (puzzle B de la figura 1), mientras que si es impar está enlazada (puzzle A de la figura 1), con lo que estamos aplicando propiedades similares a las ligadas a curvas de Jordan, para determinar si dos puntos están en la misma o distinta región. Por tanto es pertinente aportar puzzles de alambre a actividades de divulgación matemática, así como proponer a nuestros alumnos que los practiquen, ya que el jugar con ellos desarrolla el dominio de algunas características topológicas de los cuerpos (tanto de los puzzles como de otras situaciones cotidianas). Ahora bien, conviene completar estos trabajos lúdicos con lecturas de divulgación matemática sobre lo que es la Topología y la relación que tiene con los puzzles, para lo que insto a los divulgadores a que dediquen un esfuerzo para hacer más transparente la implicación de la Topología en la vida cotidiana, en general, y en los puzzles de alambre, cuerdas y maderas, en particular.

Referencias bibliográficas.

- Coffin, S. (s.f.). The Odyssey of the Fugure Eight Puzzle. En Berlekamo, E. & Rodgers, T. (Eds.). *The Magician and the Pied Puzzler*, <http://www.g4g4.com/contentsmmp>. 103-105.
- Courant, R. y Robbins, H. (1969). Topología. En Newman, J.R. (Ed.), *Sigma. El mundo de las Matemáticas*. Barcelona, Grijalbo, pp. 173-191.
- Cromwell, P. (2004). *Konts and links*. Cambridge, Univesity Press.
- Dalgety, J. & Hordern, E. (s.f.). Classification of Mechanical Puzzles and Physical Objects Related to Puzzles. En Berlekamo, E. & Rodgers, T. (Eds.). *The Magician and the Pied Puzzler*, <http://www.g4g4.com/contentsmmp>. 175-186.
- Flores, P. (2003). Forma i mesura. Les puzzles topologics. *Perspectiva Escolar*, Maig 2003, 17-24.
- Flores, P. (2002). Laberintos con alambre. Estructuras topológico-métricas. *SUMA* 41, 29-35.
- Hocking, J.G., Young, G.S. (1966). *Topología*, Barcelona, Reverté.
- Hogben, L. (1966). *El universo de los números*. Barcelona, Destino.
- Montoya, C. y Gómez-Alcalá, G., (2001). Una aproximación matemática a los rompecabezas de alambre. *RELME* 15. <http://webs.sinectis.com.ar/ccrespo/comunica.htm>
- Montoya, C. y Flores, P. (2003). Los puzzles en alambre como recurso didáctico para la enseñanza de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 6.3, pp. 665-684.
- Neurwirth, L. (1979). Teoría de Nudos. *Investigación y Ciencia*, agosto 1979, pp. 52-66.
- Stewart, I. (1977). *Conceptos de matemática moderna*. Madrid, Alianza Universidad.
- Stewart, I. (1998). *De aquí al infinito*. Barcelona, Destino.
- Stewart, I. (1994). Nudos, cadenas y cintas de vídeo. *Investigación y Ciencia*, marzo, 1994. pp. 86-89.

ruta MATEMATICA POR ALCALA DE HENARES

Grupo De Trabajo “Diego Perez De Mesa”

Petra Alarcón Ruíz
Pilar del Rey Martínez
M^a Isabel Galve Gómez
Rafael García Tirado
M^a José Ovejero Molero
Tomás Francisco Puerta Revuelta

El Grupo "Diego Pérez de Mesa" presenta en este trabajo una propuesta relajada y relajante.

Os invitamos a pasear por Alcalá, una ciudad que fue aglutinante de culturas, formas de entender la vida distintas, y que, por suerte para todos, conserva un patrimonio cultural que ya mereció ser reconocido por la Unesco hace unos años.

Hace unos cuantos, en 1993, un escultor onubense, Pepe Noja, propuso, en el eje fundamental de esta ciudad, la Avenida Complutense, como sede de un museo de esculturas al aire libre, que es hoy en día el más grande de Europa en su género.

Autores muy conocidos han contribuido con sus obras, y a nosotros se nos ocurrió hace tiempo usar sus esculturas como fuente de acercamiento de nuestros alumnos al uso artístico de la geometría.

Con ese punto de partida, abrimos una línea de trabajo que nos conduce fuera del aula, al mundo real, donde los niño/as pueden descubrir y admirar al mismo tiempo la geometría.

Además, en el entorno también encontramos material de observación: Edificios, elementos decorativos, jardines, etc.... en casi todo encontramos geometría, en todo encontramos la Matemática.

Acercar a los alumnos/as a la visión de la Matemática "a pie de calle" es una forma intensa y vivencial de absorber los conceptos matemáticos, y desde luego, nos evitará la pregunta más terrible que nos hacen con frecuencia los alumnos de nuestras clases de Matemática: "¿y esto para qué sirve?"...

Nuestra ruta comienza en el corazón de Alcalá, la Plaza de San Diego, y la Universidad que fundara el Cardenal Cisneros, y discurre después por el eje central de la ciudad, la Vía Complutense.

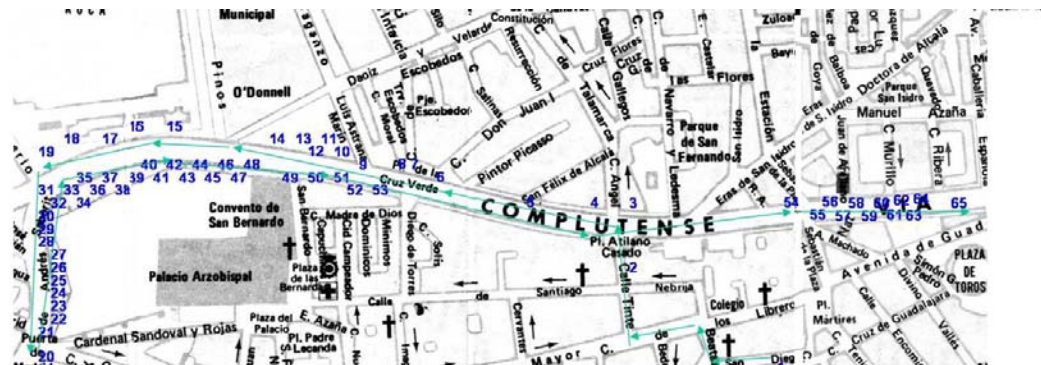
Partiendo de la Plaza de San Diego, y accediendo a la Vía Complutense por la calle del Tinte y la Plaza de Atilano Casado, nos encontramos con edificios que nos ofrecen posibilidades de estudiar geometría, perspectiva, escalas, ... Las esculturas del Museo de Esculturas al Aire Libre (el más grande de Europa en su género) son un

motivo agradable para completar el paseo y contienen, muchas de ellas, elementos geométricos que pueden ser utilizados en nuestra práctica.

Descubriremos elementos matemáticos como las proporciones áureas, el número π , los volúmenes y áreas de cuerpos geométricos, métodos de medición directos e indirectos, perspectivas, etc. Elementos todos que pretendemos se puedan estudiar sólo “in situ” (que es lo ideal y lo que se propone a los compañeros/as de nuestra ciudad), sino también en soporte multimedia y en soporte tradicional.

La presente comunicación es un resumen del proyecto que hemos elaborado en soporte CD-Rom, mediante el programa Powerpoint, y que es la que habéis podido ver en las Jornadas.

A partir de un plano inicial del recorrido, se puede acceder a las distintas esculturas o edificios que hemos seleccionado para trabajar contenidos matemáticos pulsando sobre los números correspondientes.



En buena parte de las esculturas y edificios, hemos sugerido actividades que se pueden realizar “in situ”, aunque en la presentación aportamos datos para su trabajo sin necesidad de ello.

1.- Universidad Cisneriana

Fachada de la Universidad Cisneriana

Plateresca, finalizada en 1543 y construida sobre la base de la antigua, fue realizada por Rodrigo Gil de Hontañón.

Contenidos matemáticos:

Rectángulos áureos

Un rectángulo áureo es aquél cuya proporción entre los lados es el número de oro ($\Phi = 1,61803...$; se lee “FI”).

Pulsa sobre el botón de arriba para verlos en la fachada.

Simetría

Puedes ver muchos ejes de simetría, en cada una de las figuras que se muestran en la fachada. Incluso toda ella lo es... Pulsa en el botón anterior.

Fíjate en la siguiente foto; pulsa el botón de nuevo.

En realidad, es un montaje, pero se parece mucho a la original...

Formas geométricas

Pulsa el botón anterior para ver algunas

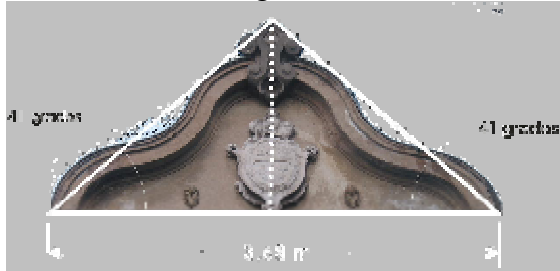
Hablando de formas...¿Sabrías qué polígono forma la fachada?

◀
Ver plano
▶

Aprovechamos para dar alguna información sobre el edificio o sobre el autor de la escultura que se está visionando, con la intención de que nuestros/as alumnos/as se fijen en el aspecto cultural y artístico del recorrido.

Además de los contenidos que se pueden ver en la diapositiva anterior, aparecen contenidos como:

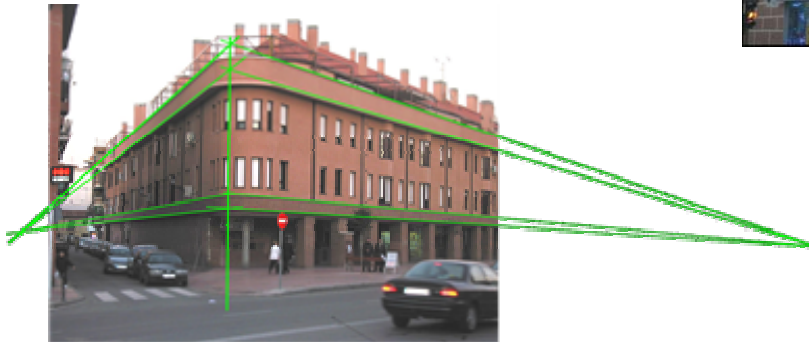
Resolución de triángulos:



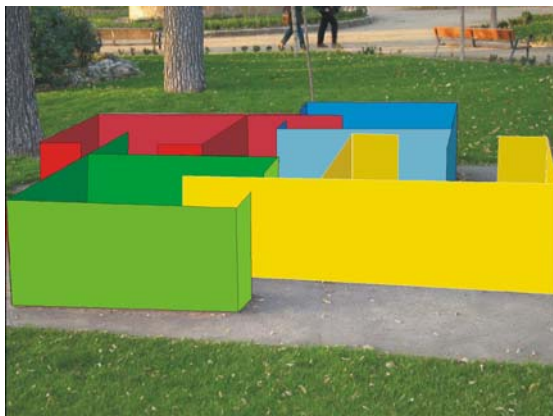
Volúmenes y proporciones:



Perspectiva:



Giros y traslaciones usando la misma pieza-patrón para componer una obra:

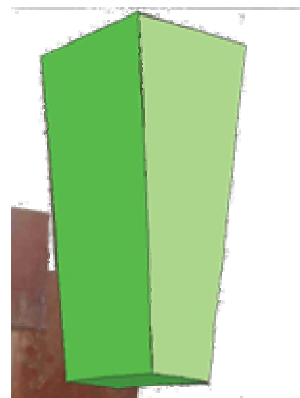


Formas geométricas usadas en la escultura:

Volúmenes de cuerpos geométricos:



Número pi y estudio de elementos circulares y esféricos:



Y otros que no incluimos aquí para no hacer demasiado extenso el resumen.

Este trabajo está diseñado para alumnos a partir de 1º de ESO, aunque se puede usar a muchos niveles diferentes, tanto en Tercer Ciclo de Primaria como en toda la ESO y Bachillerato, en función de la profundidad que se necesite.

Disponemos en nuestra ciudad de un recurso accesible para los alumnos y poco potenciado por las autoridades. En esta Alcalá de Henares, Ciudad Patrimonio de la Humanidad desde hace unos años, con el Museo de Esculturas al Aire Libre más grande de Europa, hemos encontrado al lenguaje geométrico, como en tantos lugares, contribuyendo a la belleza y a la comunicación artística.

Sea esta humilde contribución a la enseñanza de la Matemática un homenaje a todos los que usaron su lenguaje para legarnos tan rico patrimonio artístico y cultural.

Pero también sugerencia que excite la imaginación y la inventiva de cada profesional, de forma que cada cual pueda seguir las actividades que se proponen, o desarrollar las suyas propias. Seguro que en cada lugar existen recursos tan buenos o mejores para enseñar Matemática al aire libre.

UTILIZACIÓN DE HOT POTATOES EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS. EJEMPLIFICACIÓN: MOVIMIENTOS EN EL PLANO.

María Isabel Bustos Molina

A la vista de los resultados del informe PISA 2003, la competencia curricular en Matemáticas del alumnado de Educación Secundaria Obligatoria es bastante baja, *estamos 15 puntos por debajo de la media de los países de la OCDE*, nos debemos plantear: ¿Que hacemos en el aula con nuestros alumnos?, ¿tratamos de motivarlos?...

Como nos decía Miguel de Guzmán en uno de sus prolíficos artículos, *en la actualidad disponemos de un instrumento extraordinariamente potente, el ordenador, cuyo influjo sobre el quehacer matemático se va dejando sentir en muchos aspectos*.

El ordenador está cambiando el proceso de enseñanza- aprendizaje, encontramos en él una buena herramienta de motivación del alumnado, al ser hábiles en el manejo de los medios tecnológicos se sienten más confiados ante el ordenador, favoreciendo la enseñanza de las matemáticas.

El programa Hot Potatoes, se caracteriza por ser abierto, de libre distribución para el ámbito educativo sin ánimo de lucro, aunque con algunas restricciones, es fácil de manejar tanto para el profesorado como para el alumnado, utiliza un lenguaje sencillo y estandarizado, elabora páginas Web interactivas sin necesidad de saber el lenguaje HTML ni Java Script.

Se pueden elaborar 6 tipos de ejercicios distintos a partir de 6 módulos predeterminados, insertando imágenes y elementos multimedia entre otros. Ejercicios que se pueden publicar en un servidor Web y difundir a través de Internet. Además, si se maneja el lenguaje HTML, se pueden adaptar las actividades ya realizadas y publicadas en Internet a las necesidades del profesorado para su utilización en el aula.

Otra de las características a señalar es que no se necesita tener instalado Hot Potatoes para realizar los ejercicios. Sólo se necesita un navegador.

Los 6 módulos de que consta el programa son:



JCloze: genera ejercicios para rellenar huecos.

JMatch: permite crear ejercicios de emparejamiento u ordenación.

JCross: crea crucigramas.

JMix: Ejercicios de reconstrucción de una frase a partir de palabras desordenadas.

JQuiz: Crea cuestionarios de respuesta cortas, repuestas múltiples, híbrida (cuestionario de respuesta corta que al fallar dos veces se transforma en respuesta múltiple) y multiselección.

Los módulos de JMatch y JMix nos permiten dos formas de exportar el ejercicio para su navegación, en JMatch las dos opciones son, seleccionar de un menú desplegable y arrastrar; en JMix arrastrar y doble clic.

Estas herramientas funcionan también con Unicote, pudiendo crear ejercicios en cualquier idioma, o en una mezcla de ellos.

En cada ejercicio se puede diseñar;

-La configuración

-El contenido y sus respuestas

-El feedback que se recibirá.

-El porcentaje de aciertos, en el caso de tener acceso al servidor de Hotpotatoes.net, es decir tener una cuenta registrada.

En cualquier módulo al elaborar una actividad hay que seguir los siguientes pasos:

1-Introducir los datos: textos, preguntas, respuestas, etc.

2-Configurar el formato de salida.

3- Crear la página Web.

The Masher es otro de los módulos que nos permite elaborar unidades didácticas enlazando las actividades creadas.

Para ver el manejo de dicho programa he desarrollado la ejemplificación de “Movimientos en el plano”, basándome en que la Geometría es uno de los bloques más novedosos del currículum del área de Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria, por tratarse de una de las partes más útil al poderla relacionar con el mundo real y con otras áreas curriculares. Además, en el planteamiento didáctico he considerado el entorno artístico para el estudio de los movimientos del plano, así como el estudio de frisos y mosaicos.

Esta unidad didáctica se puede considerar como un apoyo en el aula con el fin de introducir una nueva metodología, se tendrá que adaptar al nivel cognitivo del alumno/a. La secuenciación de las actividades se ha planificado de forma progresiva y cíclica teniendo en cuenta los contenidos que se desarrollan.

En la unidad didáctica, los movimientos en el plano, se pretenden conseguir los siguientes objetivos:

- Reforzar el conocimiento básico de la geometría plana.
- Reconocer los movimientos del plano (traslaciones, giros y simetrías).
- Observar la invariabilidad del tamaño y forma de las figuras con los movimientos (isometría).
- Reconocer las características propias de cada uno de los movimientos.
- Potenciar la curiosidad y el interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas de nuestro entorno.
- Utilizar los movimientos para el estudio de frisos y mosaicos.
- Clasificar en distintos edificios históricos de la ciudad de Toledo y en distintos objetos típicos de Castilla La Mancha los movimientos del plano.

Los contenidos a desarrollar son:

- Conceptos:
 - ✓ Traslaciones. Vector de traslación. Figuras invariantes.

- ✓ Giros. Centro y ángulo de un giro. Sentido positivo o negativo de un giro.
- ✓ Elementos dobles. Figuras invariantes.
- ✓ Simetría. Eje de simetría. Elementos dobles. Figuras invariantes.
- ✓ Concepto de isometría.
- ✓ Composición de movimientos.
- ✓ Simetría de una figura plana.
- ✓ Frisos y mosaicos.
- Procedimientos:
 - ✓ Interpretar y utilizar el lenguaje propio de los movimientos, de las propiedades y relaciones asociadas a ellos.
 - ✓ Identificar las características de los movimientos a partir de la observación de regularidades en los transformados de figuras geométricas.
 - ✓ Reconocer figuras geométricas planas en el entorno.
 - ✓ Estudiar propiedades de figuras geométricas planas a través de sus transformadas por los distintos movimientos.
 - ✓ Observar la transformación de una figura por la composición de movimientos.
 - ✓ Encontrar los movimientos que dejan invariante una figura y componerlos, extrayendo conclusiones sobre los resultados obtenidos.
 - ✓ Determinar los movimientos que generan figuras repetidas.
 - ✓ Usar los movimientos en el plano para el estudio de frisos y mosaicos, analizando sus propiedades.
 - ✓ Identificar los movimientos del plano en distintos objetos característicos de Castilla La Mancha y en el arte de Toledo.
- Actitudes:
 - ✓ Valoración de los movimientos en el plano como recurso para el diseño de composiciones, investigación de propiedades de figuras geométricas, interpretación de la realidad.
 - ✓ Interés por resolver cuestiones relativas al conocimiento de los movimientos y a la aplicación de los mismos para resolver problemas.
 - ✓ Apreciación del patrimonio de Castilla La Mancha.

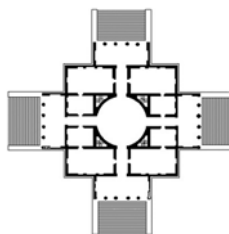
HACIENDO GEOMETRÍA CON LA ROTONDA DE PALLADIO. ALGUNOS RESULTADOS SOBRE EL NÚMERO DE PLATA Y EL NÚMERO CORDOBÉS.

Antonia Redondo Buitrago

M^a José Haro Delicado

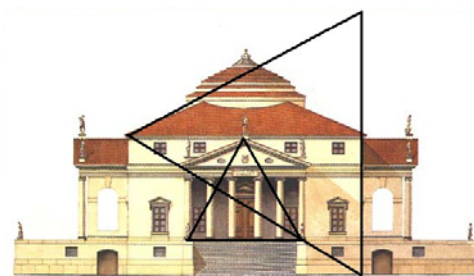
Es muy difícil encontrar un trabajo de arquitectura, pintura o geometría que trate sobre la armonía, la perfección o la belleza en donde no se mencione el número de oro. Poco debe quedar por decir del omnipresente ϕ , en relación con el pentágono, su polígono asociado y la proporción $\sqrt{5}:1$. Sin embargo las últimas investigaciones en el campo de la arquitectura, sobre la teoría de la proporción, nos invitan a considerar proporciones asociadas a otros números irracionales, los llamados números metálicos, que son las soluciones positivas de las ecuaciones $x^2 - nx - 1 = 0$, con $n = 1, 2, 3, \dots$. El primero de ellos ($n = 1$) es en efecto el número de oro. El segundo ($n = 2$) es el número de plata $\phi = 1 + \sqrt{2}$ y aparece en arquitectura en relación con la proporción $\sqrt{2}:1$ asociado al octógono. Si bien el pentágono es manifestación de la armonía y belleza, el octógono puede considerarse como una representación de la simetría y también, por tanto de la belleza.

Si pretendemos estudiar la geometría emparentada con este polígono y la proporción $\sqrt{2}:1$ en arquitectura, necesariamente tendremos que estudiar la obra de Andrea Palladio y en particular la Villa Rotonda, su obra emblemática. La mera observación de la planta de esta villa renacentista es una invitación a “hacer geometría”.



Sin dificultad encontraremos el octógono, que surge entre sucesiones de cuadrados y círculos, y su estudio conjunto nos permitirá trabajar con la proporción, los giros, las traslaciones y las simetrías, así como manipular irracionales y progresiones geométricas. Las construcciones pueden hacerse con escuadra, cartabón y compás, como hizo Palladio, pero las posibilidades didácticas del programa Cabri-géomètreII aconsejan su utilización como herramienta y recurso didáctico.

Andrea Palladio nació en Padua en 1508. Su nombre auténtico era Andrea di Pietro dalla Góndola. Era un simple cantero que empezó a estudiar arquitectura bajo la tutela del poeta Trissino, que le llevó a Roma, donde analizó a fondo las ruinas clásicas, estudió los tratados de Vitruvio, cambió su nombre en honor de Pallas, la diosa griega de la sabiduría y se convirtió en el último de los grandes arquitectos técnico-prácticos del Renacimiento. Su última obra, la Villa Rotonda de Vicenza (Italia), es la más conocida y estudiada.



El inicio de su construcción fue hacia 1567, por encargo de Paolo Almérico, político eclesiástico que después de una agitada vida, decide retirarse a su ciudad natal Vicenza. En su fachada aparece la proporción $\sqrt{3} : 1$, pero la planta y el alzado se organiza alrededor de $\sqrt{2} : 1$.

Nuestros objetivos didácticos son trabajar la geometría del plano con alumnos de Secundaria, por tanto nos centraremos en el análisis de la planta, a partir del grabado que aparece en el tratado “I Quattro Libri di Architettura” de Palladio (Fig. 1), sin pretender en modo alguno hacer un análisis arquitectónico exhaustivo de la Villa.

Lo primero que se observa en la planta de la Rotonda, es que todas sus formas y espacios se agrupan en torno a un centro que queda determinado por el corte de dos ejes ortogonales de simetría biaxial. Estos ejes recuerdan los utilizados en la arquitectura romana, tan admirada por Palladio, para la implantación de las ciudades (“...la ciudad no es más que una casa grande, y por el contrario, la casa es una ciudad pequeña.”).

En el centro de la villa aparece un círculo, que al desarrollarse en altura origina un cilindro, cerrado por una semiesfera, lo que da lugar a un tercer eje de simetría. Alrededor de la sala central aparecen cuatro pares de habitaciones iguales, que configuran cuatro cuadrados, separados por 4 pasillos que comunican el interior con los cuatro pórticos y las correspondientes escaleras. Los cuatro cuadrados que forman cada pórtico y escalinata son iguales al cuadrado central. Encontramos por tanto una simetría por traslación del cuadrado central y una simetría por rotación de 90° alrededor del vértice central. Esto origina una sucesión de cuadrados que recuerdan la duplicación platónica de la superficie del cuadrado de la que habla Vitruvio en uno de sus tratados.

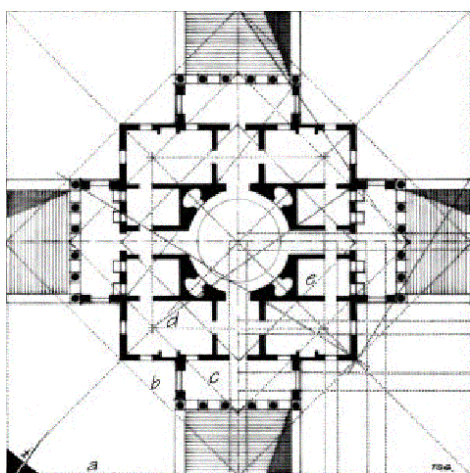


Fig 1

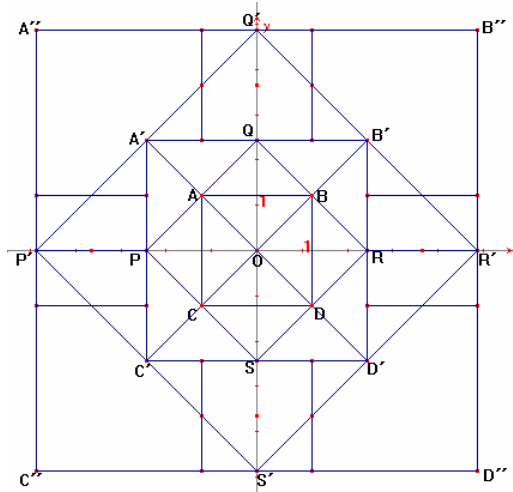


Fig.2

ACTIVIDAD 1. Dibuja con Cabri una representación de la planta de la Villa Rotonda. ¿Cuántos cuadrados se forman en ella? ¿Qué traslación aplicarías para pasar del cuadrado ABDC a los cuatro cuadrados A'QOP, QB'RO, ORD'S y POSC'? ¿Qué giro? ¿Qué relación existe entre los cuadrados ABDC y PQRS? ¿Y entre los cuadrados A'B'D'C' y P'Q'R'S'. Justifícalo geoméricamente y algebraicamente. ¿Qué relación encuentras entre los lados y áreas de los cuadrados ABDC, A'B'D'C' y A''B''D''C''.

El dibujo de la planta con Cabri (Fig. 2) a partir de la Fig. 1, no es fácil y exigirá poner en juego estrategias y procedimientos geométricos. Al relacionar los lados y áreas de los cuadrados, $ABDC$, $A'B'D'C'$ y $A''B''D''C''$ aparecen progresiones geométricas.

Si circunscribimos alternativamente círculos y cuadrados obtenemos una sucesión de ellos que nos recuerda las figuras humanas vitruvianas de Cesariano (Fig. 3) y Scamozzi. (Fig. 4).

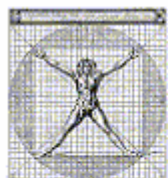


Fig 3



Fig 4

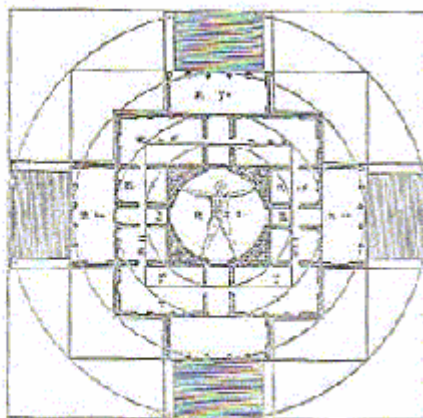


Fig 5

En la siguiente actividad volverán a aparecer progresiones geométricas. Para realizarla se proporcionará a los alumnos la Figura 5.

ACTIVIDAD 2. En este gráfico (Fig. 5) aparecen los cuadrados de Villa Rotonda inscritos en círculos concéntricos. Dibújalo con Cabri. ¿Qué relación existe entre los radios de las sucesivas circunferencias obtenidas. ¿Qué relación existe entre los perímetros de los cuadrados y de los círculos?

Pero ¿dónde está el octógono? En la figura 6 se compara la Villa Rotonda con la ciudad ideal de Giorgio Vasari el Joven (1598) y queda patente que puede inscribirse en un octógono. Nosotros encontramos además otro octógono, y el número de plata

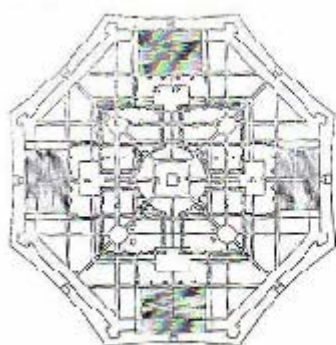
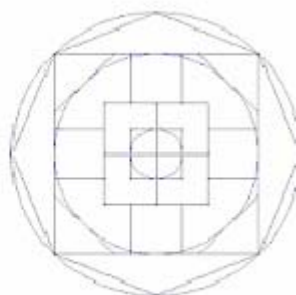
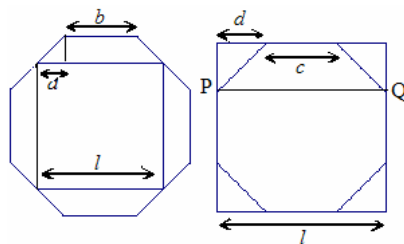


Fig 6



ACTIVIDAD 3. Dibuja con Cabri un cuadrado. Circunscribe un octógono regular al cuadrado. ¿Qué relación existe entre el lado de dicho cuadrado y el del octógono? Construye ahora un octógono regular inscrito en el cuadrado. ¿Qué relación existe

entre el lado del cuadrado y el del octógono interior? Investiga con Cabri y luego demuéstralo algebraicamente



Aplicando el Teorema de Pitágoras en los triángulos de las esquinas se obtiene

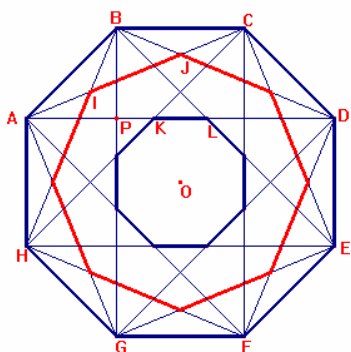
$$2a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}b \Rightarrow l = b + 2a \Rightarrow l = b + \frac{\sqrt{2}}{2}b \Rightarrow \frac{l}{b} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$2d^2 = c^2 \Rightarrow d = \frac{\sqrt{2}}{2}c \Rightarrow l = c + 2d = c + c\sqrt{2} \Rightarrow \frac{l}{c} = 1 + \sqrt{2} = \varphi = n^\circ \text{ plata}$$

El lado del cuadrado circunscrito al octógono mide lo mismo que la diagonal PQ, por tanto el número de plata, es la razón entre una de las diagonales del octógono regular y su lado. Pero hay otra razón conocida en este polígono. La proporción entre el radio de la circunferencia circunscrita a él y su lado, $c = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$, llamada número

cordobés. En la siguiente Actividad el dibujo final será el mismo que en la anterior, pero el camino recorrido es distinto. Allí se partía del cuadrado y aquí partiremos de un octógono regular y encontraremos una relación entre el número de plata y el número cordobés.

ACTIVIDAD 4. Dibuja el octógono regular $ABCDEFGH$. Desde cada vértice, dibuja las dos diagonales que se saltan sus dos vértices consecutivos. La intersección de todas ellas determina un octógono de lado IJ . Comprueba que es regular. Halla la razón $\frac{AB}{IJ}$ de los lados de los dos octógonos. Dibuja ahora desde cada vértice del octógono inicial, las dos diagonales que se forman al saltarse los dos vértices consecutivos. En la intersección de todas ellas se forma otro octógono de lado KL . Comprueba que también es regular y halla la razón de los lados $\frac{AB}{KL}$. ¿Qué números encuentras?



Los alumnos pueden empezar utilizando la opción de Cabri “medir segmentos”, comprobando que los polígonos son regulares, e intentar reconocer ambas razones. En el primer caso obtienen 1.31, una aproximación del número cordobés. En el segundo, 2.41 una aproximación fácilmente reconocible de $1 + \sqrt{2}$. Después, apoyándose en la trigonometría demostrarán que en efecto $\frac{AB}{IJ} = n^\circ \text{ cordobés} = c$ y $\frac{AB}{KL} = n^\circ \text{ de plata}$.

Para facilitar los cálculos, supondremos que el lado

AB mide uno.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

El triángulo ABI es semejante a ABC , por tanto

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AI}{AB} \Rightarrow AI = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

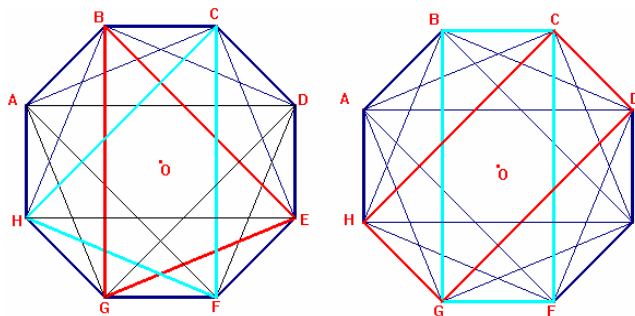
$$IJ = AC - 2AI = \sqrt{2 - \sqrt{2}} \Rightarrow \frac{AB}{IJ} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = c$$

Por otro lado, como $AD = \varphi = 1 + \sqrt{2}$, y $AK = BC = 1$, se tiene:

$$KL = AD - 2AK = 1 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} - 1.$$

Por tanto $\frac{AB}{KL} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = \varphi$.

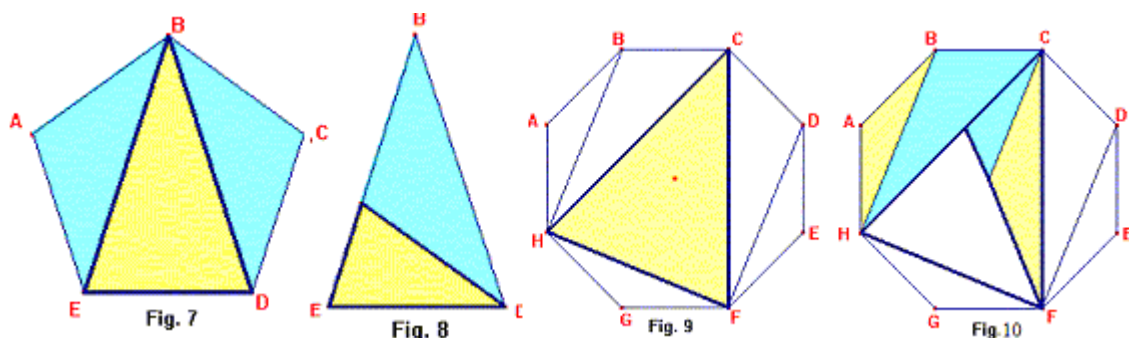
En el pentágono de la Fig.7, las diagonales triangularizan al polígono en tres triángulos isósceles. Los lados desiguales del triángulo BED están en razón ϕ y se llama triángulo de oro. Los otros dos ABE y BCD tienen sus lados desiguales también en la razón de oro. En el octógono con la intersección de las diagonales no vamos a encontrar un triángulo cuyos lados desiguales estén en la proporción del número de plata, sino un rectángulo. Sin embargo también quedará determinado un triángulo isósceles, pero ¡será cordobés! En efecto:



En la primera figura, el triángulo, tiene lados en razón $\frac{AD}{AC} = \frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = c$.

En la segunda, el rectángulo $BCFG$ es de plata, pues $\frac{BG}{BC} = \frac{1 + \sqrt{2}}{1} = \varphi$.

El triángulo de oro se puede descomponer en dos triángulos, uno de oro y otro semejante a ABE (Fig.8). En el caso del triángulo cordobés (Fig.9), se puede descomponer en otro triángulo cordobés más uno semejante a ABH y otro semejante a BCH (Fig.10).



ACTIVIDAD 5. Al dibujar un octógono y su triángulo cordobés correspondiente, quedan determinados dos trapezios isósceles. Dibuja una diagonal en cada uno de ellos y obtendrás una triangularización (Fig.9). ¿Son cordobeses todos los triángulos obtenidos? Halla el valor de los ángulos de cada uno de los triángulos y utiliza esta información para descomponer el triángulo cordobés en otros dos de manera que uno de ellos siga siendo cordobés.

La primera pregunta se puede contestar midiendo con Cabri los lados de los triángulos o algebraicamente utilizando las medidas obtenidas en la actividad anterior. Sólo es cordobés el CHF . Los ángulos se pueden obtener fácilmente sin recurrir a una medición directa, pues son todos múltiplos de $\pi/8$. El triángulo ABH no admite una descomposición similar, pero el BCH sí. Fácilmente se comprueba que se puede descomponer en dos, uno semejante a él y otro semejante al ABH . Esto nos permite afirmar que el octógono y el triángulo cordobés se pueden descomponer como una unión de infinitos triángulos semejantes a ABH .

BIBLIOGRAFÍA

- Cisneros, J. J. (1995). *La composición geométrica de las villas palladianas. La Rotonda*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia.
- March, L. (1998). *Architectonics of Humanism. Essays on Number in Architecture*. Great Britain: Academy Editions.