



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 4

“ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD: COMO IMPEDIR EL ODIO A LA ESTADÍSTICA”

COMUNICACIONES

COMO MOTIVAR A LOS ALUMNOS CON LA ESTADÍSTICA.....	665
ESTADÍSTICA EN UNA TARDE DE PASEO	671
LOS GRÁFICOS INTERACTIVOS, UN RECURSO DIDÁCTICO EN ESTADÍSTICA.....	677
PROBABILIDAD Y BLOQUES LÓGICOS: ACTIVIDADES PARA INTRODUCIR SU ESTUDIO EN PRIMARIA Y EN SECUNDARIA.....	679
ALGUNOS RESULTADOS SOBRE PROMEDIOS CON ESTUDIANTES EN LUANDA Y TENERIFE	683

COMO MOTIVAR A LOS ALUMNOS CON LA ESTADÍSTICA

Esther López Herraiz

La importancia de la estadística es grande, y como no, también lo es la enseñanza de la estadística a nuestros alumnos, hecho que se pone de manifiesto en los muchos trabajos de investigación publicados sobre la materia. Podemos reconocer la utilidad de los métodos estadísticos en el mundo económico y social, además de en la investigación.

Los nuevos enfoques curriculares para la enseñanza secundaria, prestan mas atención a la estadística y la probabilidad, se puede entender con ello que se reconoce la necesidad de que estos conocimientos estén en la formación básica tanto a nivel científico como humano de una persona.

Nuestro objetivo es promover el uso del razonamiento estadístico y relacionarlo con la vida diaria, porque la formación estadística les ayudará a construir modelos y también a reconocer errores.

El problema surge en como hacer que un alumno de tercero de E.S.O. aprenda estadística sin perderse en las fórmulas. No es fácil, posiblemente sea su primer encuentro con subíndices, sumatorios, tablas llenas de números donde hay que colocar muchos datos, y de donde, aunque no haya una sola letra, hay que conseguir sacar conclusiones sobre el número de hermanos que se tiene o que programa de televisión es el que mas se vio.

Evidentemente no podemos evitar el que se encuentren con expresiones como
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{N}}$$
 y desde luego tenemos que aprovechar esta ocasión para enseñarles a generalizar y a ver un poco el lado mas riguroso de las matemáticas. Pero si esto se hace unido a las nuevas tecnologías como calculadoras y programas estadísticos y además añadimos un trabajo de campo, buscando variables muy cercanas a ellos y que les cueste poco entender, seguro que conseguimos una mayor motivación.

La experiencia es buena, puesto que ellos se sienten parte activa y ya solo con eso conseguiremos que su interés por la clase aumente. Además con ello también favorecemos otras actitudes importantes como el trabajo en equipo y lo que ello conlleva: saber organizarse, repartir el trabajo, que todos los miembros del grupo aporten su colaboración para que el trabajo esté terminado dentro de su plazo...

Una propuesta es hacerles realizar un trabajo por grupos, al empezar la unidad se organizan los grupos y se va a ir trabajando en paralelo, la teoría y la práctica, siendo el espacio muestral el propio instituto.

Al iniciar la unidad también se puede dedicar alguna sesión a practicar y descubrir utilizando por ejemplo el programa **Ebaolab**, que nos ofrece la posibilidad de un laboratorio estadístico que genera ejemplos, genera tablas de frecuencia al azar, genera test para clasificar variables, etc donde los alumnos pueden tener un primer contacto con la estadística:



Empezaremos con los tipos de variables, se les puede proponer que ellos mismos decidan sobre que tema van a realizar el estudio, que propongan ellos la variable (con nuestra aprobación, por supuesto, en el sentido que sea adecuada y que vaya a dar el juego suficiente para el trabajo). Las propuestas pueden ser sorprendentes, seguramente que nosotros nunca nos hubiéramos planteado hacer estudios sobre el numero de piercing que llevan, el número de pantalones vaqueros que tienen en el armario o el dinero que se gastan cada día en chucherías en la cafetería del instituto. También se deben plantear de que manera deben formular la o las preguntas correspondientes para obtener la información deseada.

Ellos recogerán datos preguntando a sus propios compañeros, aprovechamos para indicarles que tienen que ser rigurosos con la elección de la muestra para que el estudio no sea sesgado. La representatividad de la muestra es la idea de que una muestra tomada de una población, deberá tener características similares a la población de origen. No pueden preguntar solamente a sus compañeros de clase, ni a los amigos con los que mejor se llevan y menos vergüenza les da el preguntar. Deben saber que en su instituto hay alumnos y alumnas de entre 12 y 18 años aproximadamente, de varios países y nacionalidades y una buena muestra será aquella en la que estén representada de la mejor manera posible esa realidad del centro.

A partir de ahí, según vamos avanzando con la teoría en la clase, se les va pidiendo que hagan lo mismo con su trabajo. Una vez recogidos los datos (se les puede exigir un numero mínimo de ellos en función de los miembros que compongan los grupos) estos se deben organizar en una tabla y empezaremos a calcular ya que nos habremos dado cuenta que el tratamiento de un gran número de datos exige un resumen.

Para ello, utilizaremos las formulas de la estadística, que guiados por el profesor y ayudados por la posibilidad de experimentar que nos dan las nuevas tecnologías, serán “descubiertas” por los alumnos.

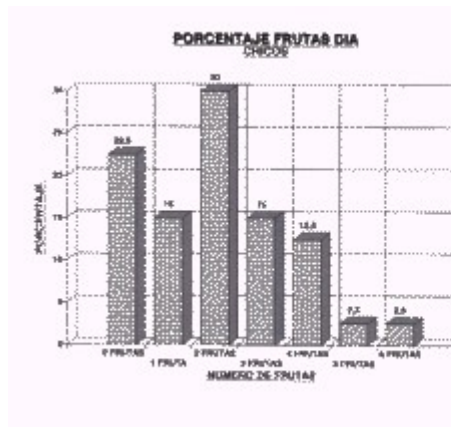
Combinaremos pequeños ejercicios del libro de texto para coger practica en el calculo de frecuencias absolutas, relativas, porcentajes... y luego lo calcularan en su trabajo viendo como de una colección caótica de datos se pueden sacar unas primeras conclusiones.

El siguiente punto a explicar serian los gráficos estadísticos ya que en muchas ocasiones ocurre que el exceso de información numérica hace que no se puedan distinguir con claridad los rasgos generales de un estudio. Una forma de evitar este problema es presentar los datos en forma gráfica. Para la teoría nos podemos ayudar de unas transparencias para hacerles entender, de una manera mas directa los distintos tipos de gráficos que existen, cuales se ajustan mejor a cada tipo de variable y también para mostrarles otros tipos que

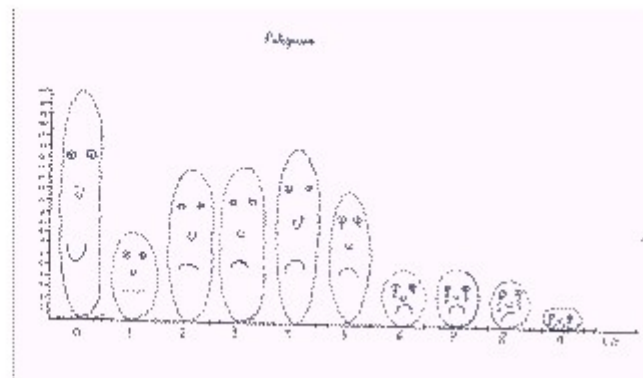
generalmente no vienen a menudo mostrados en los libros de texto, como pueden ser pictogramas, cartogramas, series cronológicas....



Otra actividad en este punto, para tratar de conectar una vez mas, lo que se ve en el aula con los sucesos de la vida diaria, puede ser que traigan recortes de periódico con gráficos estadísticos y así comentarlos en clase. Siguiendo con nuestro trabajo de campo debemos dejar que ellos elijan el tipo de gráficos adecuados al tipo de información que están manejando.

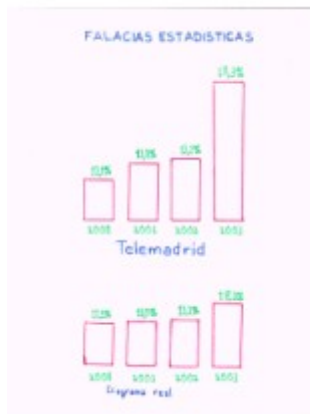


Piezas de fruta al día

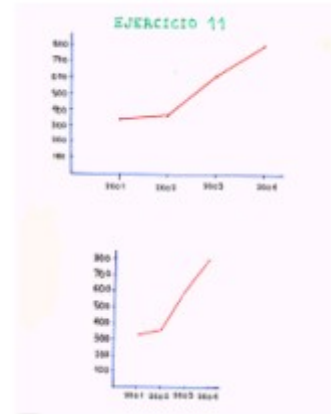


Número de suspensos por alumno

El aumento en el número de datos estadísticos en los medios de comunicación y su generalización en la vida diaria, ha traído consigo la aparición de algunas informaciones y expresiones estadísticas, que bajo la apariencia de exactitud y precisión científica contienen argumentos falsos, o que, al menos, no constituyen toda la verdad. El tema de las falacias estadísticas despierta mucho su curiosidad. Enseñarles como por medio de los gráficos estadísticos se puede hacer que una misma cosa se vea de varias formas diferentes, cada una con una interpretación distinta a la otra. Seguro que si miran en los periódicos tampoco es difícil descubrir alguno de estos “engaños”.



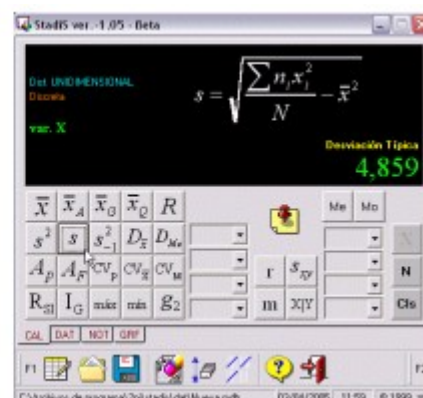
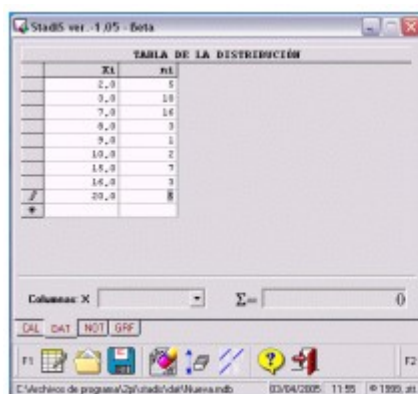
Mejora de una cadena de TV



Ventas anuales de una empresa

A continuación llegan los parámetros estadísticos, tanto las medidas de centralización como las de dispersión. Ahí, es donde tenemos que hacer mas esfuerzo para conseguir que los alumnos sean capaces de deducir las correspondientes fórmulas, aunque si por entonces ya se han implicado lo suficiente en su trabajo, tienen un cierto interés por aprender cosas nuevas para inmediatamente llevarlas al mismo. Debemos aprovechar la ocasión para acostumbrarles a usar (o al menos a no extrañarse ante ella) la notación matemática. Por muy abstracta que parezca, es un buen momento para hablarle del signo del sumatorio, de la letra griega que representa la varianza o para explicarles como por medio de subíndices podemos ir recorriendo todos los elementos de un conjunto, etc.

Una vez entendido el significado de los parámetros se les debería enseñar a obtenerlos con la calculadora y el ordenador. A lo largo de todas la unidad, para obtener y visualizar los resultados, podemos preparar hojas con ejercicios especialmente diseñados para que utilicen estas tecnologías. Programas como el anteriormente citado Ebaolab o como el **Stadis**, de distribución gratuita, son muy fáciles de aprender a manejar por parte de los alumnos y aportan muchas opciones ya que debido a su rapidez, se evitan los cálculos tediosos y podemos tener la posibilidad de tratar mucha mas variación de casos.



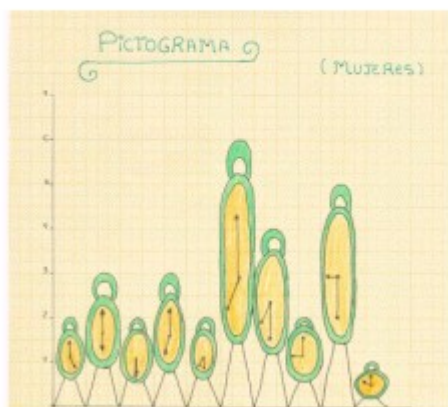
También se pueden utilizar las calculadoras gráficas. Como por ejemplo la Voyage 2000 y la TI-83 plus de Texas Instrument, que vienen preparadas con el software necesario para poder trabajar con tablas, medidas y gráficos.



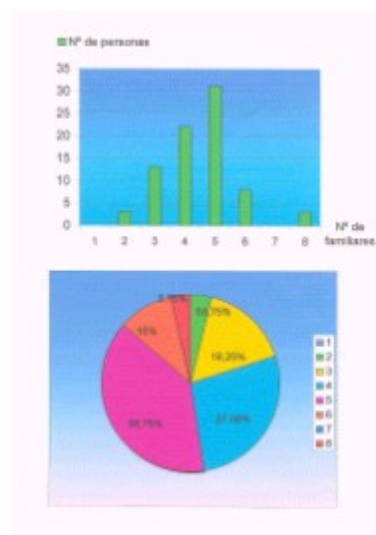
F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Herr	Gráf	Lista	Calc	Distr	Tests	Ints
tiempo	veloc...					
0	12.2					
1	16.8					
2	25					
3	27.6					
4	28.8					
5	31.1					
6	33.4					
7	37.2					
Nombre=						
MAIN RAD AUTO FUNC 3/2						

La interpretación de todos estos datos en un último apartado de conclusiones junto con una opinión personal al respecto pueden dar por finalizado el trabajo.

Si además dejamos técnica libre en la presentación, podemos encontrarnos con estupendos trabajos hechos a ordenador, con gráficos hechos con hojas de cálculo, como Excel que no hubiéramos pensado que nuestros alumnos sabían manejar o por el contrario, con trabajos menos informatizados pero con unos pictogramas hechos a mano que parecen de expertos dibujantes.



Hora de despertarse



Número de personas con las que conviven en casa

Para evaluar la motivación y los resultados de utilizar estas herramientas en la enseñanza de la estadística, pasamos al final de la misma una encuesta en la que valoremos su interés por esta unidad frente a otras unidades anteriores, y realizamos nuestra propia “estadística” de las calificaciones obtenidas.

Los resultados obtenidos en nuestro caso indican un aumento del interés y de las calificaciones en la unidad dedicada a la estadística.

Creo que esta es una unidad que se presta a que podamos contestar esa eterna pregunta que nos hacen nuestros alumnos a menudo: “¿y esto, para que sirve?” y además dejarles una base de razonamiento estadístico que les permita ser críticos con los datos que se puedan encontrar en su día a día. Creo que es una buena forma de mezclar teoría y práctica de una forma entretenida para ellos, cosa que podría no resultar fácil, porque según dicen ellos cuando le echan un ojo por primera vez a esta unidad: “que fórmulas mas raras hay en este tema!!”.

Bibliografía:

- Moreno Verdejo, Antonio Javier y Vallecillos Jiménez, Angustias. La inferencia estadística básica en la enseñanza secundaria. Jornadas europeas de estadística. La enseñanza y la difusión de la estadística. 2001.
- Castro García, M^a del Carmen. Guia y aplicaciones del programa Ebaolab. Ministerio de Educación y Ciencia.
http://www.pntic.mec.es/Aldea_Digital/materiales.htm.
- Cockcroft, W. Las matemáticas sí cuentan. Madrid: MEC. 1985
- Plaza Martinez, Jesús. Programa Stadis. 1999
<http://www.educared.net/aprende/softwareEducativo/busq2.asp?mat=23>.
- Álvarez González, Francisco. Programa Ebaolab. 1998.
<http://www.pntic.mec.es/recursos/pntic98/fichas/laborato.htm>.

ESTADÍSTICA EN UNA TARDE DE PASEO

J. M^a Chamoso, P. Azcárate y J. M^a Cardeñoso

Univ. de Salamanca, Univ. de Cádiz y Univ. de Granada

jchamoso@usal.es, pilar.azcarate@uca.es, josem@ugr.es

Jose y Bill son compañeros matemáticos que habían quedado para dar un paseo. Según paseaban recordaron aspectos cotidianos que habían visto en el bar en el que se habían encontrado y se fijaron en otros que encontraron en la calle. Se dieron cuenta de que algunos estaban relacionados con aspectos estadísticos y de probabilidad. A partir de ellos surgieron actividades que se pueden llevar al aula. Ya habían hecho esto en otras ocasiones en que habían apreciado circunstancias relacionadas con otras partes de las matemáticas (Chamoso, 2003; Chamoso y Rawson, 2004).

- Bill: Jose, pienso que no debe ser difícil encontrar aspectos cotidianos que sugieran actividades estadísticas para llevar al aula o situaciones relacionadas con estadística. Por ejemplo, el ecualizador del equipo de música tiene unas barras que suben y bajan dependiendo del nivel del sonido que se escuche en ese momento. Parece una gráfica estadística.
- Jose: Además, había una máquina tragaperras donde se puede ganar dinero cuando, al introducir una moneda, se consigue que en la línea central queden tres frutas iguales después de girar.
- Bill: He leído que, al menos, se destina el 75 % de lo recaudado a premios. No parece buen negocio, ¿no?
- Jose: Nunca se sabe. Puedes conseguir lo que ha perdido otro. Tampoco se puede olvidar el periódico que estabas leyendo cuando llegué. Seguro que contiene una gran cantidad de noticias que utilizan datos estadísticos. Además, recoge los resultados de los diversos juegos de azar: loterías de diversos tipos, quinielas...
- Bill: El mobiliario también me ha sugerido actividades. Estaba pensando en que las mesas están rodeadas por cuatro sillas. ¿De cuántas formas se podrían colocar 4 personas? ¿Y 5?
- Jose: Se podrían sentar dos en una silla. O una se podría quedar de pie.
- Bill: También se podría añadir otra silla. E incluso variar el número de personas. O considerar las posibilidades de que se sienten en el banco que estaba en la pared del lado derecho de la entrada. Allí se pueden sentar 5 personas cómodamente. ¿Sería lo mismo que si se sentaran alrededor de una mesa?
- Jose: Vaya, parece que surgen cosas. ¿Recuerdas aquel día que utilizamos diversas prendas de diferentes tallas de un mismo tipo de camisa para calcular la media, la mediana y la moda?
- Bill: Los niños también juegan con esas posibilidades cuando consideran los jerséis y los pantalones de sus muñecos y la manera de combinarlos. Salen diagramas de árbol o se puede utilizar un diagrama cartesiano para descubrir los diferentes casos.
- Jose: Ahora que estamos en la calle y se ve ese semáforo a lo lejos, ¿de cuántas formas se pueden combinar los tres colores del mismo? ¿Y si tuviese cuatro colores?

Bill: Otra pregunta: ¿Cuántos caminos diferentes se pueden seguir para ir desde aquí a la ferretería que me gusta?

Jose: Vale, Bill. Detente un poco. Estás recordando problemas que se utilizan en clase usualmente y cambias su contexto para que parezcan que se te han ocurrido aquí. Prefiero pasear para ver si se descubre algo. Mira la pared exterior de esa casa que están tirando.

Bill: Es de piedra de Villamayor, la piedra típica de Salamanca. ¿Por qué te interesa? ¿Se hacen con algún programa estadístico?

Jose: ¡Qué cosas tienes, Bill! Se sacan de una cantera, como la mayor parte de las piedras. Pero, ¿te has fijado en que tienen cosas escritas? ¿Sabes qué significan?

Bill: Todas las piedras de la fachada de la casa están numeradas, supongo que con la intención de retirarlas y volver a colocarlas posteriormente en la misma posición.



Jose: Están organizando la información porque, en otro caso, no sería fácil recordar cómo estaban.

Bill: Observa. El primer número indica la fila empezando desde arriba y el segundo el lugar que ocupa esa piedra en esa fila.

Jose: Es una forma de organizar los datos como otra cualquiera.

Bill: Las piedras que están al otro lado de ese espacio abierto también están numeradas con un cierto criterio.

Jose: Parece que es diferente al anterior. Imagino que será para que no se confundan con las otras.

Bill: Mira: B.6, B.7, F.9... Parece que faltan muchas. Quizás sean las que estaban en ese hueco.

Jose: Parece que, en este caso, también han empezado a organizarlas desde arriba y el primer dato es una letra mayúscula siguiendo el orden alfabético que indica la fila mientras que el segundo es un número que señala el lugar que esa piedra ocupa en esa fila.

Bill: Jose, ¿consideras que esto es estadística?

Jose: Pienso que sí. Uno de sus objetivos más importantes en los niveles elementales es organizar la información y aquí es lo que se hace. Mira la gráfica que hay en aquella columna. Espero que sí te parezca estadística.

Bill: Es una representación interesante. Aparecen barras por encima y por debajo del nivel central, que es la barra del medio. Seguro que pretende reflejar algo. Pero no sé el qué.



Jose: Puede ser cualquier cosa.

Bill: Hay 12 barras. Podría referirse a los meses del año.

Jose: Es posible. Sin una referencia de lo que pretende expresar no se puede decir nada. No era consciente de la importancia de que cualquier gráfica tenga que ir acompañada de lo que representa.

Bill: Claro. En otro caso, ¿cómo se va a entender qué es lo que quiere decir?

Jose: Veo más cosas. Observa ese granero. Tiene unas puertas originales.

Bill: Más que puertas son tablas superpuestas que evitan que se caiga el trigo. Creo que sé en qué estás pensando. La mayor parte de las tablas están acompañadas de un número y una letra. Las únicas letras que aparecen son I y D, que supongo que representan Izquierda y Derecha. Imagino que los números señalan el orden que las tablas debían seguir para poder encajar unas con otras, dependiendo de si están en el lugar derecho o en el izquierdo.



Jose: Pienso lo mismo. Las tablas, aunque sean similares, deberían llevar el orden con que se cortaron para poder cuadrar perfectamente. En otro caso dejarían huecos.

Bill: Pero aquí ya no respetan ese criterio.

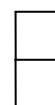
Jose: Quizás se hicieron en otro momento en que era importante seguirlo por alguna causa o hayan sido trasladadas de otro lugar. No lo sé. En cualquier caso, no encuentro otra explicación para esos símbolos. Bill, mira. Observa el reloj que está en la parte alta de esa nave.

Bill: Tiene números y la estadística se hace con números.

Jose: No me refería a eso. Estaba pensando en que, cada número, se construye sobre una base compuesta por siete segmentos colocados de una cierta manera. Para crear cada uno de ellos se iluminan algunos para conseguir una forma determinada. ¿Entiendes qué quiero decir?



Bill: Creo que sí. Si todos están encendidos se forma el 8, ¿no?



Jose: Efectivamente. Mira, lo dibujo aquí. Entonces, para crear los dígitos del 0 al 9 se combinan algunas de las siete piezas. Fíjate que son suficientes para construir los 10 números.

Bill: También bastan para formar algunas letras del alfabeto. Incluso quizás todas. Se podría pensar el número de símbolos que se podrían hacer con esos trozos.

Jose: Veamos. Sin que ningún segmento esté iluminado, se podría hacer uno. Con un fragmento iluminado se podrían formar 7 símbolos. Con dos segmentos iluminados se podrían crear... Pensemos. El de arriba con cada uno de los otros 6 harían 6 y así para los 7 trozos. Es decir, 7×6 . Pero cada uno está repetido dos veces, luego habría $42/2 = 21$ posibilidades si se iluminaran exactamente dos segmentos.

Bill: Serían combinaciones de 7 elementos tomadas de 2 en 2.

Jose: No me lées con fórmulas. Creo que lo he resuelto en este caso y así se podría continuar en los demás.

Bill: De acuerdo. Tú hazlo como quieras que yo también lo haré como me parezca.

Jose: Si seguimos se puede comprobar que se obtienen muchas posibilidades, muchas más que la suma de los diez dígitos y las diversas letras del alfabeto. ¿Te ha gustado, eh?

Bill: Sí. Mucho. ¿Seguimos paseando? Observa qué se ve en esa valla.

Jose: Es curioso. Cubos decorativos.

Bill: Además, estos cubos sólo tienen un punto en contacto con la base. Eso me sugiere una pregunta. Imaginemos un cubo sobre una superficie plana de manera que el único contacto con ella sea uno de los vértices. En ese caso, la cara inferior del cubo estará en el aire y los 3 vértices restantes estarán a una cierta distancia de la base que dependerá de la posición del cubo en el aire. La pregunta es la siguiente: si medimos esas distancias en cada caso, ¿existirá alguna relación entre esos 3 valores? Creo que sí pero tendrás que experimentar para comprobar si es realmente así.



Jose: Lo intentaré. Bill, estamos buscando elementos relacionados con estadística y me hace gracia que utilices el cubo, uno de los materiales más utilizados para la misma si se considera que un dado es de esa forma, para actividades con objetivos diferentes. Pero todas las sugerencias son bienvenidas, sean en el sentido que sean.

Bill: El cubo también se utiliza en geometría y existen relaciones numéricas entre sus elementos. Pero, como has dicho, se puede imaginar que es un dado y descubrir las posibilidades que surgen al lanzarlo y mirar la cara superior.

Jose: Tienen 6 caras y, por tanto, existirán 6 posibilidades. Se pueden considerar dos cubos y combinar los distintos casos. También se pueden utilizar dados no cúbicos que tengan otro número de caras, con lo que las posibilidades variarían.

Bill: Me recuerda algo. En una tienda de regalos vi un calendario de mesa compuesto por dos cubos de manera que, colocados adecuadamente, permitirían formar todos los números de los posibles días de un mes cualquiera. ¿Qué números tendrían que estar en las caras de cada uno de los cubos para poder conseguir todos los números del mes?



Jose: Con dos cubos se pueden formar 36 posibilidades y los máximos días que tiene un mes son 31, luego imagino que se puede lograr fácilmente.

Bill: Piénsalo un poco y no digas lo primero que se te ocurra. Ten en cuenta que así se podrían formar los números del 11 al 16, del 21 al 26, del 31 al 36... Pero, ¿y el 17?

Jose: Espera un momento que piense... Tienes razón. Ya sé qué quieres decir. Parece claro que, en cada cubo, deben estar los números 1 y 2 porque, en otro caso, no

sería posible formar ni el 11 ni el 22. En uno de los cubos deberá estar, además, el 0 y, en el otro, el 3.

Bill: De esa forma se pueden conseguir los números: 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31. Trece números. Quedan dieciocho todavía.

Jose: Supongo que, para completar todos, en el primero habrá que añadir el 4, 5 y 6 y, en el otro, el 7, 8 y 9.

Bill: De esa forma, ¿cómo consigues el 04, el 05 o el 06?

Jose: Tienes razón. No es posible. No se va a poder hacer.

Bill: Sí que se puede porque el calendario existe. Pero no estoy seguro de cómo. Escucha. Según hemos notado, para que sea posible conseguir todos los números tienen que estar el 0, 1 y 2 en ambos cubos por lo que quedan 7 números para los 6 lugares que faltan. Lo he estado pensando y no se me ocurre otra posibilidad más que el 6 y el 9 sean el mismo número y se utilice el que se necesite en cada caso sin más que dar la vuelta al cubo. De esa manera, en uno de los cubos estaría el 0, 1, 2, 3, 4 y 5 y en el otro el 0, 1, 2, 6, 7, 8. Así se podrían formar todos.

Jose: ¡Vaya, qué agudeza! Una idea de ingenio. ¡Después de estar buscando las diversas posibilidades sales con una solución de ‘feliz idea’!

Bill: En cualquier caso, hemos considerado las diversas posibilidades, que es lo que se pretendía. Además, nunca he creído que los que hacen calendarios sepan demasiadas matemáticas.

Jose: Te voy a decir algo. ¿Sabes a qué me recuerdan los dados? A uno con el que jugábamos cuando éramos pequeños en el que en cada cara estaba escrito un estado de ánimo: Alegría, tristeza, felicidad, buen humor, mal carácter... Lo tirábamos y lo que saliese suponíamos que era lo que definía nuestro humor del día. Juegos de niños pero esas situaciones anímicas también dependen del azar.



Bill: No estoy tan seguro de que sea así. Muchas veces, un buen estado de ánimo hay que conseguirlo con dedicación e interés. No creo que dependa alegremente del azar. Aquellos sacos de cemento me sugieren algo.

Jose: ¿Los que están apilados en columnas y que están al lado de esos palés de ladrillos?

Bill: Exactamente. Fíjate. La primera columna situada a la izquierda está compuesta por 3 sacos, la segunda contiene 6, la tercera 5 y la cuarta tiene únicamente 1. Conocer el número de sacos de cada columna y, por tanto, su número total, permite calcular la media aritmética de esas columnas. Para ello, no habría más que mover los sacos de unas columnas a otras hasta tener la misma cantidad en cada una de ellas.

Jose: De esa forma estaríamos yendo a la misma esencia del concepto de media, lo cual es muy interesante. Normalmente sólo nos fijamos en la manera de calcularlo.

Bill: Me estoy dando cuenta de que, en este caso, el resultado obtenido no es exacto. No importa. Eso ocurre normalmente en la vida ordinaria.

Jose: También se puede observar cuál es la columna que tiene más sacos, es decir, la moda.

Bill: Además, si las columnas se ordenan según su número de sacos, es posible calcular la mediana.

Jose: Interesante. Me voy. He quedado con mis amigos para hacer la quiniela de esta semana. Bill, he pasado una buena tarde contigo. Si tienes tiempo, quédate pensando en el barquillero del parque. ¡Cómo nos gustaban sus barquillos cuando éramos pequeños! Con una moneda nos entregaba 2 o nos permitía jugar a la ruleta donde nos daba tantos barquillos como el número que saliera. Sólo podía salir 1, 2 y 3 pero casi siempre salía 1 y 2. ¿Cómo se podría hacer una ruleta con esas condiciones pero que fuese equilibrada y el barquillero ni ganase ni perdiese dinero?

Bill: ¿Qué quieres decir con que ni ganase ni perdiese dinero? Eso es imposible porque, si es ruleta, es azar. Pero entiendo qué quieres decir. Lo pensaré.



Referencias

Chamoso, J. M. (2003): Considering dialogue as a social instrument in the Mathematics class. *For the Learning of Mathematics* 23, 1, 30-40.

Chamoso, J. y Rawson, W. (2004): *Contando la Geometría*. Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.

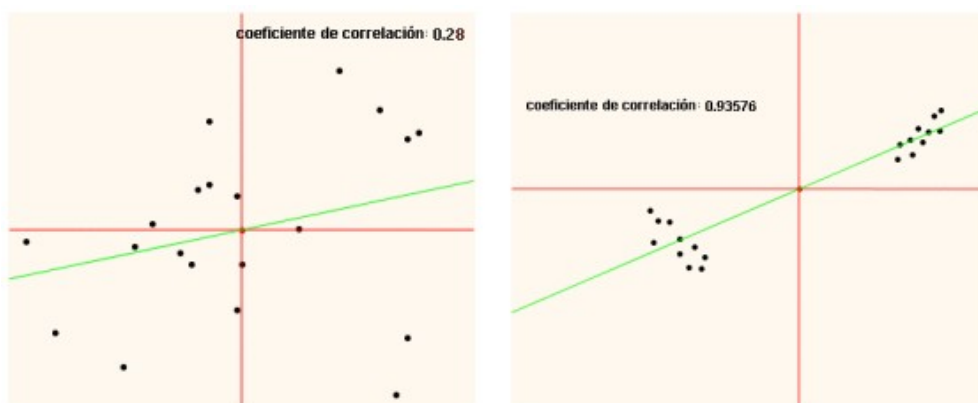
LOS GRÁFICOS INTERACTIVOS, UN RECURSO DIDÁCTICO EN ESTADÍSTICA

Antoni Gomà Nasarre
Catedrático de enseñanza secundaria
IES Joanot Martorell

En la comunicación se expondrán ejemplos de gráficos interactivos elaborados con la ayuda de la calculadora Wiris que, a criterio del ponente, pueden ser de utilidad para la mejor comprensión de algunos conceptos estadísticos y, muy en particular, para entender la influencia que la existencia de valores atípicos (“outliers”) puede tener sobre el cálculo de determinados parámetros estadísticos.

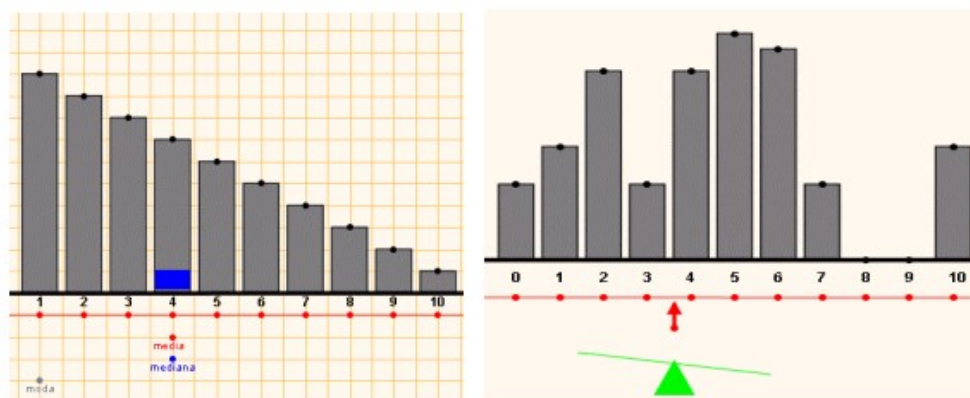
En este documento se comentan algunos ejemplos.

Seguramente el más conocido de este tipo de gráficos es el gráfico de dispersión o nube de puntos con la visualización del coeficiente de correlación y la recta de regresión.



En el gráfico de la izquierda, moviendo sólo “los 3 puntos que parezcan más atípicos” podemos pasar de un coeficiente de correlación 0.28 a otro de 0.80. ¿Hace pensar, no?

Y el coeficiente de correlación que se lee en el gráfico de la derecha ¿es del todo intuitivo?



En algunos textos estadísticos se puede leer que el hecho de que la media tenga un valor mayor que la mediana nos da un criterio para establecer la simetría sesgada hacia la derecha de una distribución. ¿No está esto en contradicción con lo que se observa en el diagrama de la izquierda? Un gráfico interactivo con “otra forma de ver” la mediana nos ilustrará el tema.

Y también podremos visualizar la media como el punto de equilibrio (o centro de gravedad) del conjunto de valores observados.

Y podremos poner de manifiesto como puede variar la forma de un histograma si cambiamos la longitud y el número de intervalos de clase. Y otros ejemplos si ha lugar.

Después de la breve exposición gráfica será muy interesante la confrontación de opiniones sobre el interés de la visualización interactiva para un mejor aprendizaje.

Referencias

Bonet, Eduard. *Fonaments d'Estadística*. Editorial Teide. Barcelona 1974.

Bujosa, Josep. Gomà, Antoni. *Estadística amb l'Excel*. (Curso de autoformación para el profesorado en modalidad telemática. SGTI del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. 2003)
(accesible en www.xtec.es/formaciotic/curstele/d128)

Bujosa, Josep. Gomà, Antoni. *Estadística amb ordinador*. (Materiales para la integración de las TIC en el currículum del alumnado de ESO. SGTI del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. En fase de publicación)
(accesible próximamente en <http://www.xtec.es/formaciotic/mattic/>, “altres àrees”)

Holmes, Peter et al. *Statistics in your world*. Sheffield University. 1986.

Marsh, Catherine. *Exploring Data. An introduction to Data Analysis for Social Scientists*. Cambridge: Polity Press, 1988.

Moore, David S. *Statistics: Concepts and Controversies*. New York: W. H. Freeman & Company.

PROBABILIDAD Y BLOQUES LÓGICOS: ACTIVIDADES PARA INTRODUCIR SU ESTUDIO EN PRIMARIA Y EN SECUNDARIA

Ana M^a De Angelis Rambaldo Ana Isabel Busto Caballero

Introducción

Una rama de las Matemáticas, joven pero que ha alcanzado un nivel de madurez indiscutible, agitando para llamar la atención no sólo del matemático sino también del ciudadano medio, se inserta en el árbol de los contenidos curriculares desde el nivel primario.

Nos estamos refiriendo a la Estadística y la Probabilidad

Es por todos conocida la amplia gama de objetivos que pueden lograrse a través de este núcleo temático tanto en lo que hace a las aplicaciones prácticas inmediatas como al propósito de favorecer el desarrollo del pensamiento lógico. En este último aspecto hemos centrado nuestra atención.

Por una parte, conscientes de las dificultades que nuestros alumnos manifiestan a la hora de enfocar el concepto de fracción, aprovechamos la definición laplaciana de probabilidad para reforzar la interpretación de una fracción como expresión de razón entre dos cantidades en un contexto que resulta muy motivador. Por otra parte, presentamos una serie de situaciones problemáticas que implican el uso de las operaciones lógicas contenidas en un modelo axiomático de la Probabilidad.

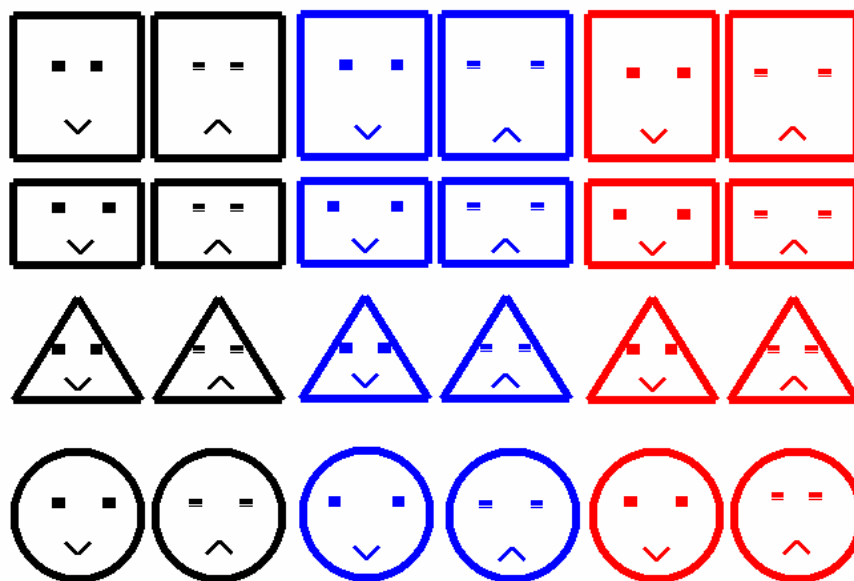
Inicialmente utilizamos una adaptación de los bloques lógicos de Dienes para introducir el tema de la Probabilidad y hacemos una propuesta de actividades que se pueden realizar en el último Ciclo de Primaria y en el primero de Secundaria.

Luego, empleando básicamente el mismo material, presentamos otras situaciones de mayor grado de complejidad aplicables en el 2º Ciclo de Secundaria.

Descripción del material

El universo de trabajo está dado por un conjunto de fichas de cartulina, que previamente el alumno ha confeccionado, que representan de manera esquemática cuarenta y ocho “personajes” caracterizados por cuatro atributos: forma (cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo), tamaño (grande, pequeño), color (azul, rojo, blanco), estado de ánimo (triste, alegre).

ATRIBUTOS	VALORES			
COLOR	rojo	azul	blanco	
FORMA	cuadrado	triángulo	rectángulo	círculo
TAMAÑO	grande	pequeño		
ESTADO DE ÁNIMO	triste	alegre		



Descripción de las actividades

Las primeras actividades consisten en realizar el experimento aleatorio de extraer una ficha de una bolsa no transparente que contiene las 48 piezas y observar alguno de los cuatro atributos.

Los alumnos intentan adivinar la ficha que va a salir atendiendo a alguno de sus atributos (Alicia dice que saldrá “rojo” mientras Noemi arriesga a que será “triste”).

Al principio, en una etapa de juego libre, no se imponen reglas y los niños hacen sus propuestas teniendo en cuenta atributos diversos. Posteriormente se unificarán criterios y se enunciarán reglas de juego que guiarán la atención hacia los diversos valores de un atributo dado y más tarde a dos o más prefijados.

De esta manera se conduce a descubrir intuitivamente quién tiene más posibilidades de ganar, aprovechando la conversación entre los alumnos y el profesor para introducir términos del vocabulario básico...Por ejemplo. Es más probable el suceso “Sale *triste*” que “Sale rojo”

A través de múltiples propuestas sencillas se llega a expresar probabilidades según la definición laplaciana como razón entre el número de casos favorables y el de casos posibles. Así por ejemplo: $p(\text{rojo}) = \frac{16}{48} = \frac{1}{3}$, mientras que $p(\text{triste}) = \frac{1}{2}$. Dichas probabilidades se comparan tanto a partir de la comparación de fracciones como del proceso de contar los casos favorables en uno y otro caso teniendo en cuenta que el total se mantiene constante.

Los conceptos de **suceso seguro** y **suceso imposible** surgen con naturalidad solicitando de los alumnos propuestas que conduzcan a ganar con seguridad y otras en las que sea imposible ganar. (“¡A que sale blanco, rojo o azul!”... “Pienso que saldrá verde”)

Las propuestas basadas en un valor de atributo y su negación conducen a la idea de **sucesos contrarios**: “Rojo” y “No rojo”; “Grande” y “Pequeño”; “Cuadrado” y “No cuadrado”, “Alegre” y “Triste”. El manejo de un material concreto permite asignar probabilidades con las técnicas de recuento más elementales ofreciendo a la vez la posibilidad de utilizar otras que requieran mayor grado de sistematización.

Centrando la atención en dos o más atributos, se presentan múltiples posibilidades de realizar las operaciones lógicas de conjunción y disyunción inclusiva que llegan a concretarse en las correspondientes operaciones conjuntistas “intersección” y “unión” .

“Marisol dice que saldrá CÍRCULO y BLANCO”. La probabilidad es

“Marta gana si sale AZUL o ROJO” La probabilidad de ganar es.....

“Juan se arriesga a CUADRADO o TRISTE” . La probabilidad es.....

El material permite la realización de manipulaciones efectivas adaptándose a la etapa del desarrollo del pensamiento en que se encuentran los alumnos de estos niveles.

La movilidad de las piezas permite que se dispongan en la mesa del alumno, situándolas en regiones limitadas por líneas cerradas materializadas por cuerdas (también movibles) como paso previo a la representación en diagramas de Euler – Venn.

A medida que se avanza en edad o en experiencia se nota una tendencia a reducir la utilización del material llegándose a anticipar respuestas correctas antes de realizar el experimento.

La referencia constante a la totalidad del universo de trabajo, que queda siempre a la vista con sólo esparcir sobre la mesa el contenido de la bolsa, facilita el manejo en un nivel concreto de algunas leyes de la Lógica (por ejemplo las leyes de De Morgan). Así por ejemplo, es bastante fácil que se aprecie que el suceso “ni blanco ni azul” es “rojo”, es decir, el contrario de “blanco o azul”

Se deja el terreno abonado para cuando llegue el momento de aplicar esas leyes en un nivel simbólico.

Una extensión al 2º ciclo de la E.S.O.

Para estos cursos se propone una modificación en las proporciones de algunos valores de atributos. De esta manera se puede presentar una serie de situaciones que faciliten la comprensión de la dependencia e independencia de sucesos. Por ejemplo, si entre los rojos sólo la cuarta parte son grandes mientras que entre los azules sucede lo contrario, la probabilidad de “grande” en el universo es $\frac{1}{2}$, pero si al extraer una pieza nos avisan que es roja, la probabilidad de “grande” es $\frac{1}{4}$. Así se tendría: $p(\text{grande/rojo}) = \frac{1}{4}$ mientras que $p(\text{grande}) = \frac{1}{2}$. Los sucesos “grande” y “rojo” son dependientes.

Asimismo se propone una serie de actividades que pueden llevar hasta el teorema de Bayes. Veamos algunos ejemplos.

- I) Realiza un diagrama que esquematice el siguiente relato.
 Están todos los personajes en la salida. Hay tres caminos: A, B, C.
 Por A irán los cuadrados, por B los círculos , por C los demás.
 Iniciada la marcha se encuentran con ramificaciones de caminos:
 Los que iban por A se separan : Por A_1 van los blancos felices, por A_2 van los rojos tristes y por A_3 los demás.
 También se separan los que iban por B: Por B_1 van los azules grandes; por B_2 van los tristes pequeños y por B_3 los demás.
 Los que iban por C también toman caminos diferentes: Los tristes, van por C_1 , y los felices van por C_2 .
- II) Otra vez el experimento de meter las piezas en una bolsa y extraer una al azar.
 Calcula las siguientes probabilidades
 - a) Probabilidad de que haya ido por A_1 . $p(A_1) =$

b) $p(A_2) =$

c) $p(A_3) =$

d) $p(B_1) =$

e) $p(B_2) =$

f) $p(B_3) =$

g) $p(C_1) =$

h) $p(C_2) =$

III) Alguien que ha estado observando la trayectoria de nuestros personajes, nos informa de los puntos de llegada de los distintos itinerarios.

Cofre con un tesoro: Los que iban por A_1 .

Cueva sin salida: Todo el que fuera por A_3 o por B_1

Lago encantado: Todo el que fuera por B_3 o por C_1

Campo fértil: Todo el que fuera por A_2 o por B_2 o por C_2

De nuevo el experimento de extraer una pieza de una bolsa. Calcula las siguientes probabilidades.

A) $p(\text{llegara al cofre})$

B) $p(\text{llegara a la cueva})$

C) $p(\text{llegara al lago encantado})$

D) $p(\text{llegara al campo fértil})$

IV) Alguien ha visto una pieza de las que llegó a la cueva. Calcula las siguientes probabilidades:

$p(\text{triste}) =$

$p(\text{blanco}) =$

$p(\text{rojo}) =$

$p(\text{azul pequeño}) =$

$p(\text{cuadrado}) =$

$p(\text{triángulo}) =$

Puesto que la personificación del material estructurado ha dado lugar a la creación de relatos que incluyen circunstancias susceptibles de ser interpretadas con un lenguaje probabilístico, muy pronto serán los alumnos quienes lleguen a inventar los propios, como así también a ilustrarlos. El abanico de posibilidades se abre...

Bibliografía

DIENES Z.P. y GOLDING, E. W.: Lógica y juegos lógicos. Barcelona: Teide. 1978

DIENES Z.P.: El aprendizaje de la Matemática: Un estudio experimental. Buenos Aires: Estrada. 1971.

KEMENY, SNELL, THOMPSON: Introducción a las Matemáticas Finitas. Méjico: Continental. 1980.

BACUS ANNE y ROMAIN CHRISTIAN: Creatividad: Cómo desarrollarla. Barcelona: Iberia. 1994

ALGUNOS RESULTADOS SOBRE PROMEDIOS CON ESTUDIANTES EN LUANDA Y TENERIFE

A. J. Garrett y J.A. García Cruz

Universidad de La Laguna

1. Introducción

Los promedios constituyen un contenido común a los currícula de enseñanza de diferentes países en los niveles previos a la universidad, y diferentes estudios internacionales han señalado grandes dificultades de comprensión en el alumnado de los diferentes niveles educativos. El estudio del conocimiento exacto de las dificultades del alumnado sobre un determinado tema en el proceso de enseñanza y aprendizaje ayuda a los profesores a determinar métodos y técnicas coherentes para impartir estos contenidos, facilitando de esta forma el desarrollo de los conocimientos por parte del alumnado. Este hecho, nos ha motivado a continuar los estudios que se han venido realizando en la enseñanza y aprendizaje estadística y, en particular, en el campo de los promedios con el propósito de aportar nuestra contribución en la investigación de las dificultades, estrategias y concepciones del alumnado cuando abordan situaciones problemáticas que conllevan el uso de promedios.

2. Investigaciones Previas

Los estudios realizados en las últimas décadas sobre promedios indican que a pesar de que el concepto parece ser fácil, los alumnos presentan grandes dificultades en su comprensión. En Pollatsek, Lima y Well (1981) se ha visto que incluso alumnos universitarios, no ponderan adecuadamente los valores al resolver problemas de media ponderada y en ocasiones usan la media simple, en lugar de la media ponderada. Los resultados encontrados por Mevarech (1983) indican que una explicación posible de los errores de los alumnos en el cálculo de la media, es que se comportan como si un conjunto de números, junto con la operación media aritmética constituyera un grupo algebraico, que satisface los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. El estudio de Strauss y Bichler (1988) sugiere una mejora en la comprensión del concepto con la edad, y observa distintas dificultades en la comprensión de las propiedades del concepto. Los resultados encontrados en Mokros y Russell (1995) identificaron y analizaron cinco construcciones básicas sobre representatividad en los alumnos: La media como moda, la media como algoritmo, la media como algo razonable, la media como punto medio y la media como punto matemático de equilibrio. El estudio de Cai (1995) ha revelado que el 90% del alumnado que participó en su investigación conocían el mecanismo de “sumar todos y dividir” que constituye el algoritmo de cálculo. Sin embargo, sólo algunos de ellos mostraron evidencias de comprender el concepto. El estudio de Watson y Moritz (2000) con niños de 8 a 15 años, de tercero hasta el curso noveno ha indicado que para un gran número de niños el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. La noción de promedio se relaciona poco con la moda y menos aún con la media aritmética. Los resultados observados en la investigación de Cobo y Batanero (2004) indican que a pesar de existir una buena comprensión de la media, algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia. En torno a la mitad de los alumnos de 4º es capaz de resolver problemas de media

ponderada, dando ponderaciones adecuadas, mientras que en 1º, sólo alrededor de un 10% lo realiza correctamente.

Recientemente se han presentado algunos estudios en los cuales se destacan el uso del cuestionario, como uno de los instrumentos más ampliamente utilizado para explorar los conocimientos y la comprensión del alumnado sobre los promedios. Así, Garfield (2003) presenta un cuestionario diseñado como un instrumento para evaluar el razonamiento estadístico, que consta de veinte preguntas de respuestas de elección múltiple sobre conceptos básicos de estadística y probabilidad. El mismo cuestionario, (elaborado por Garfield y Konold en 1993), había sido inicialmente desarrollado para evaluar la eficacia de un nuevo currículo de estadística en la enseñanza secundaria. Posteriormente se utilizó con estudiantes universitarios de primer curso (college), no sólo para evaluar la eficacia de las materias curriculares sino también para describir el perfil del razonamiento estadístico del alumnado. Cuatro ítems del referido cuestionario que evalúan cuestiones sobre los promedio, fueron utilizados por Batanero, Godino y Navas (1997) en un estudio con estudiantes de las titulaciones de maestros de primaria y de segundo cursos de pedagogía que habían asistido a un curso de metodología de investigación. En este trabajo, los cuatro ítems del cuestionario de Garfiel y Konold se describen con comentarios cabales, que nos han servido de referencia en el desarrollo de nuestro trabajo. De la misma forma, destacamos también otro trabajo reciente en el cual se evalúa la comprensión del alumnado sobre promedios, usando como instrumento el cuestionario. Se trata de una investigación de Cobo y Batanero (2004), realizada en primer y cuarto curso de ESO, con el propósito de evaluar la comprensión de la media aritmética, teniendo en cuenta los componentes del significado de la media, descritos en Batanero y Godino (2001).

3. Objetivo

El objetivo de nuestro trabajo es construir un cuestionario, que permita examinar los conocimientos y dificultades en la comprensión de los promedios del alumnado que está finalizando la enseñanza secundaria y realizar un estudio comparativo entre el alumnado de Luanda (Angola) y Tenerife (España). Los trabajos citados anteriormente constituyen un puente para la concreción de nuestro objetivo. Sin embargo, teniendo en cuenta que todos los problemas del cuestionario de Garfield eran de respuestas cerradas, que restringe la respuesta del alumnado a la elección de una ya dada, nuestra opinión es que esta forma de evaluación crea incertidumbre sobre el verdadero conocimiento, ya que no permite saber hasta que punto el sujeto escoge la respuesta al azar o responde con criterio. Este hecho, nos ha motivado a elaborar un cuestionario con características diferenciadas, y creemos que de esta forma damos un paso más en la investigación de este concepto.

4. El Cuestionario

Nuestro cuestionario consta de siete ítems, algunos con varios apartados. Con este instrumento pretendemos averiguar cómo interpreta el alumnado la media aritmética, cómo comprenden y usan el algoritmo de la media (simple o ponderada), cómo analizan e interpretan los datos presentados gráficamente, y qué estrategias usan en la solución de problemas de cálculo directo de la media (simple o ponderada), qué criterios usan para comparar dos conjuntos de medias iguales y cómo construyen una distribución de media dada. Para tal fin, hemos seleccionado dos tipos de ítems: los de elección múltiple (cerrados) y los abiertos. Combinamos, además, los formatos texto, texto-tabla y texto-gráfico. En cuanto a los datos numéricos hemos utilizado números enteros y decimales. Hemos cuidado el contexto de forma que resulte cercano al

alumnado dado que, desde el punto de vista metodológico, suponemos que la contextualización de las tareas facilita en gran medida su resolución. Los ítems se denominan según el contexto que los define. El tiempo estimado para pasar la prueba con este cuestionario es de cuarenta y cinco minutos a una hora.

5. La Muestra

La muestra de Tenerife la constituyen 96 estudiantes de un instituto de secundaria de La Laguna, combinando estudiantes de bachillerato según la distribución mostrada por la siguiente tabla:

Niveles	1BACH	2BACH	Total
Nº de Alumnos	48	46	96

Para la muestra de Luanda (Angola), seleccionamos un total de 146 alumnos del decimoprimer curso, que cursaban una formación media en Contabilidad y Gestión en un instituto público. Este nivel de enseñanza, constituye una de las dos vías que permite el ingreso en la universidad, después que el alumnado haya concluido el duodécimo y que dota también el alumnado de un perfil técnico-profesional para que éste se integre en el mercado laboral, en el caso de no continuar sus estudios. Los grupos eran heterogéneos en cuanto al sexo, y sus edades variaban entre los 17 y 23 años. Habían estudiado estadística descriptiva en el curso académico anterior, lo que suponía que habrían adquirido nociones fundamentales sobre los promedios. En el período en que se administró la prueba estaban estudiando la segunda parte de la asignatura que se relacionaba con cuestiones de probabilidad. Hemos seleccionado cuatro grupos, que habían tenido profesores distintos en el curso académico previo según la información que nos fue proporcionada, cuya composición se presenta a continuación:

Grupos	G	H	I	J	Total
Nº de Alumnos	34	40	36	36	146

6. Resultados

Establecimos un sistema de categorías para las respuestas del alumnado que permitiese realizar el tratamiento de la información, usado un software estadístico denominado Systat. Las categorías fueron determinadas teniendo en cuenta el tipo de ítem. Para los de respuestas de elección múltiple, relacionamos la categoría con el contenido matemático del distractor, mientras que para los de respuesta abierta, establecimos como categoría la estrategia presentada por el sujeto en el proceso de resolución. En nuestro estudio, el tratamiento general de la información se ha basado en categorías. Sin embargo, en este trabajo presentamos los resultados en términos de respuestas correctas y incorrectas, puesto que cuando se administró el cuestionario en Angola, introdujimos algunas mejoras y modificaciones al cuestionario original. Por motivo de tiempo y espacio, aquí sólo presentamos los resultados de tres ítems, de los siete que componían el cuestionario original.

La siguiente tabla resume los datos relativos a Tenerife y Angola según los tres ítems seleccionados, señalándose en la primera columna el objetivo perseguido en cada uno. Los ítems, en español y portugués, se presentan en dos anexos.

Ítem/Objetivo	Correctos				Incorrectos			
	Tenerife		Luanda		Tenerife		Luanda	
	N	%	N	%	N	%	N	%
4. Hijos <i>Calcular una media ponderada</i>	32	34	4	2'7	62	66	125	97'3
5.A a) Gráfico de Notas <i>Extraer y manipular datos del gráfico, para calcular la media.</i>	47	50	9	6'1	47	50	120	93'9
5.A b) Gráfico de Notas <i>Establecer comparaciones entre dos muestras</i>	7	7'4	8	5'5	87	92'6	121	94'5
6.a) Familia <i>Construir una distribución de media dada.</i>	47	50	5	3'4	47	50	124	96'6

- En el ítem 4, que hemos designados por “Hijos”, se pedía a los alumnos determinar el número medio de hijos de 50 familias entrevistadas. Los resultados encontrados, indican que los estudiantes de la muestra de Tenerife tuvieron menos dificultades que los de Luanda, pues, obtuvieron un 34% de respuestas correctas contra el 4% logrado por sus homólogos. Los primeros utilizaron el algoritmo de media ponderada y muestran las operaciones en el 22'3% de los casos y un 11'7% sólo muestra los resultados, mientras que los alumnos de Luanda lo hacen solamente por una vía, empleando el algoritmo de la media ponderada (2'7%), mostrando los cálculos. Las principales estrategias incorrectas encontradas en el proceso de resolución del problema por los alumnos de Tenerife consisten en: dividir la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias (2'1%); dividir la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable (4'3%), dar un resultado incorrecto sin mostrar las operaciones (35'1%); utilizar procedimientos incoherentes o no contestar el ítem. Los alumnos de Luanda, presentaron más estrategias incorrectas en este problema, quizá debido a una modificación introducida en el mismo que permitía evaluar también los procedimientos usados para determinar el total de familias (suma de las frecuencias), ya que en el estudio anterior el valor total estaba dado. Las estrategias erróneas que más nos llamaron la atención, fueron las siguientes: Sumar n valores de la variable y dividir por n (8'9%); dividir la suma de los valores de la variable por la suma de las frecuencias (6'8%); dividir la suma de las frecuencias por la suma de los valores de la variable (1'4%); indicar un valor cualquier como media sin mostrar las operaciones (23'2%); utilizar procedimientos incoherentes o no contestar (39%).
- En el ítem 5.A a), se pedía a los alumnos comprobar que la media de un conjunto de notas que se mostraban en el gráfico era un número dado. Los resultados apuntaron que los alumnos de Tenerife tuvieron más éxito. Obtuvieron un 50% de respuestas correctas y lo hicieron usando el algoritmo de la media ponderada (43'6%) o sumando las diez notas y dividiendo la suma por diez (6'4%). En la muestra de Luanda, sólo un 6'1% consiguió llegar al resultado correcto, por las mismas vías, con 2'7% y 3'4% respectivamente. Algunas de las estrategias incorrectas usadas en los dos grupos fueron las siguientes: determinar la media de los valores (o algunos valores) del eje horizontal; calcular la media entre los valores extremos; usar el algoritmo de media pero calculando erróneamente la suma total o la suma de las frecuencias; usar procedimientos incoherentes o no contestar. Nos ha llamado la

atención el porcentaje de alumnos que no contestaron este apartado, que fue un 58'9% en la muestra de Luanda y 18'1% en la de Tenerife.

- El ítem 5.A b) era un complemento del ítem anterior. Se pedía a los alumnos decir y justificar qué grupo les parecía mejor, si los mismos tenían medias iguales, haciendo el análisis de dos gráficos. Con eso se pretendía explorar los criterios usados por los alumnos para comparar dos conjuntos de datos. Hemos encontrado que tanto los alumnos de Tenerife como los de Luanda no presentaban criterios fundados al establecer la comparación entre los dos conjuntos presentados. Los porcentajes de respuestas correctas (tuvieron en cuenta la variabilidad) fueron de 7'4 y 5'5 en las respectivas muestras. Las demás justificaciones presentadas por los alumnos de Tenerife, fueron las siguientes: “El grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados” (45'7%); “No hay diferencias entre los dos grupos porque tienen medias iguales” (14'9%); “el grupo 1 es mejor porque en él hay alumnos con mayor nota” (7'4%); Un 11'7%, da justificaciones confusas. Los criterios más usados por los alumnos de Luanda fueron: “El grupo 2 es mejor porque en él hay más alumnos aprobados” (20'5%); “No hay diferencias entre los dos grupos porque tienen medias iguales” (12'3%); “el grupo 1 es mejor porque en él hay alumnos con mayor nota” (8'9%); y un 14'4% presenta justificaciones bastante confusas. Cabe destacar, que con el propósito de analizar la convicción del alumnado sobre los argumentos dados, se creó un segundo ítem, de respuestas de elección múltiples, que nos ha permitido concluir que además de no contar con métodos fundados para comparar dos conjuntos de datos con medias iguales, tampoco son consecuentes en sus afirmaciones.
- En el ítem 6.a) un dato del problema hacía referencia a que la composición media de las familias de una determinada localidad era de 3'2 personas. Se pedía al alumnado dar 10 familias que cumpla esta media. Se trata, por lo tanto, de un problema de construcción de una distribución de media dada. El contexto limita el tipo de dato a utilizar. Los resultados mostraron que el 50% de los alumnos de Tenerife da una distribución correcta, por dos vías: el 27'7% lo hace determinando la suma total de hijos de las 10 familias, invirtiendo el algoritmo de la media y un 22'3% da una distribución sin mostrar las operaciones. Encontramos un 4'3% que da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado, un 12'8% que usa procedimientos incoherentes y un número considerable de alumnos que no contesta (33%). Los alumnos de Luanda tuvieron enormes dificultades en este ítem. Los resultados mostraron que de los 146 alumnos, sólo 5 (3'4%) dieron una distribución correcta, mediante la determinación del total (invirtiendo el algoritmo de la media). La mayoría no contestó el problema (79'5%). Encontramos un 3'4% que determina correctamente la suma total pero no da la distribución; 2 alumnos (1'4%) dan una distribución con valores decimales sin tener en cuenta el contexto del problema, un 4'8% da una distribución que no cumple los requisitos del enunciado y un 15'8% utiliza procedimientos incoherentes.

7. Conclusiones

Los resultados encontrados en los cuatro ítems revelaron que en las dos muestras los alumnos presentan dificultades al trabajar con los promedios. Eso se manifiesta por las diferentes estrategias incorrectas y procedimientos incoherentes usadas en los ítems 4, 5.A.a) y 6.a), así como los argumentos infundados dados para comparar dos grupos de medias iguales. Hemos notado que, a pesar de que algunos alumnos han planteado

correctamente la fórmula de cálculo en los problemas que exigían tal acción: no sabían cómo sustituir los datos ni los resultados intermedios calculados y algunos tampoco sabían cómo encontrarlos. Este hecho, nos lleva a conjeturar que estos alumnos no han comprendido el uso racional del algoritmo de la media aritmética. De igual modo, inferimos que el alumnado no cuenta con criterios formales para comparar dos conjuntos de datos con medias iguales, una dificultad que había sido apuntada en el estudio de Batanero, Godino y Navas (1997).

El porcentaje de respuestas correctas encontrados en la muestra de Tenerife en el ítem 6.a) sobre la construcción de una distribución de media dada (50%), es relativamente inferior al encontrado por Cobo y Batanero (2004), donde el 62'1% de los alumnos de cuarto y un 66'7% de primero fueron capaces de resolver un problema equivalente.

Los resultados muestran que los alumnos de Luanda (Angola) presentan enormes dificultades con respecto a los alumnos de Tenerife (España). No hemos podido averiguar con detalle las razones implicadas, pero de las informaciones verbales que nos han proporcionado algunos profesores y alumnos en el momento en que fue administrado el cuestionario, conjeturamos (para el alumnado de Luanda) que hay falta de aplicación y poco interés en el aprendizaje por parte del alumnado. Raras veces realizan las actividades complementarias que les son propuestas, algo que les podría ayudar a comprender mejor los contenidos abordados en las clases y profundizar sobre los mismos. Por otro lado, nos dimos cuenta de la existencia de factores de carácter metodológico, que apuntan a que las tareas que son presentadas normalmente por los profesores en las clases se centran fundamentalmente en calcular la media de un conjunto de números, sin que se presente un contexto de referencia e incluso las propiedades de la media no son abordadas. Además, los alumnos no disponen de libros de texto de estadística, que les podrían servir de material de apoyo diario para sus actividades. Incluso uno de los profesores nos había comentado que no creía que encontráramos muchos alumnos capaces de resolver correctamente el ítem 6.a), sin que nos hubiera fundado su afirmación a pesar de habersele preguntado.

En este artículo hemos presentado resultados parciales de los datos de un trabajo de investigación más amplio, todavía no concluido, y que pensamos dar a conocer más adelante.

8. Referencias Bibliográficas

- Batanero, C. Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de Maestros de Primaria en Formación sobre los Promedios. *VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa*, 310-324.
- Batanero, C. Godino, J. D. (2001). Developing New Theoretical Tools in Statistics Education Research. *Proceedings of the 5rd Session of the International Statistical Institute, Bulletin of ISI* (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.
- Cai, J. (1995). Beyond the computational algorithm. Students' understanding of the arithmetic average concept. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the XIX Conference on the Psychology of Mathematics Education* (v.3, pp.144-151). Universidad de Pernambuco.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Razonamiento numérico en problemas de promedios. *Suma*, 45, 79-86.
- Garfield, J.B. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistical Education Research Journal* 2 (1), 22-38.
- Mevarech, Z. R. (1983). A deep structure model of students' statistical misconceptions. *Educational Studies in mathematics*, 14, 415-429.

- Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's Concepts of Average and Representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, 1, 20-39.
- Pollatsek, A. Lima, S. y Well, A.D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.
- Strauss, S. y Bichler, E. (1988). The development of children's concepts of the arithmetic average. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.
- Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The Longitudinal Development of Understanding of Average. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1/2), 11-50.

Anexo 1 Ítems incluidos en el cuestionario pasado en Tenerife (España)

Problema 4: Hijos

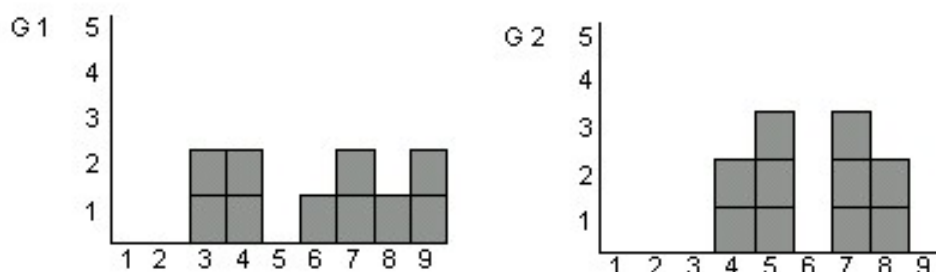
Hemos preguntado en Tenerife a 25 familias sobre el número de hijos y nos han respondido:

- 10 familias no tenían hijos
- 7 familias tenían 1 hijo
- 5 familias tenían 2 hijos
- 3 familias tenían 3 hijos
- No hubo ninguna familia con 4 hijos

¿Cuál es el número medio de hijos de las familias entrevistadas?

Problema 5: Gráfica de Notas

Veinte alumnos de un instituto participan en un concurso de matemáticas. Diez de los alumnos formaban el Grupo 1 y los otros diez formaban el Grupo 2. Las notas obtenidas en el concurso se muestran en los gráficos que se presentan a continuación:



Cada rectángulo en el gráfico representa la nota de un alumno en particular. Por ejemplo, en el Grupo 1, los dos rectángulos que aparecen sobre el número 9 indican que dos alumnos de este grupo obtuvieron un 9.

5.A El Grupo 1 tiene una nota media de 6.

- a) Comprueba que la nota media del Grupo 2 también es 6.
- b) ¿Qué grupo te parece mejor? Justifícalo.

Problema 6: Familia

El tamaño medio de la familia en Canarias es de 3,2 personas.

- a) Da 10 familias que cumplan este promedio.

Anexo 2 Ítems incluidos en el cuestionario pasado en Luanda (Angola)

FILHOS

4. Perguntamos na cidade de Luanda à determinadas famílias sobre o número de filhos que tinham, e obtivemos os seguintes dados:

10 famílias não tinham filhos.

7 famílias tinham 1 filho.

5 famílias tinham 2 filhos.

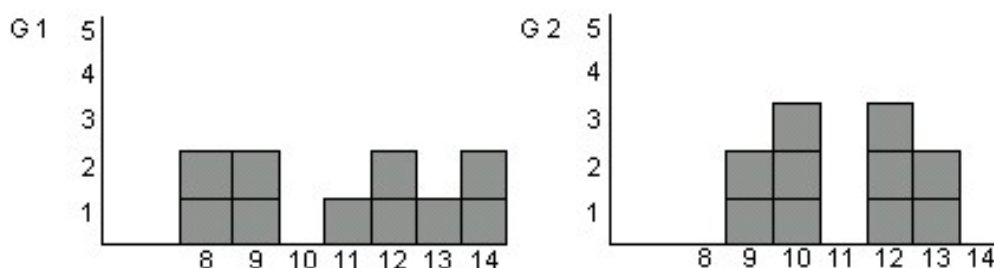
3 famílias tinham 3 filhos.

Não havia nenhuma família com 4 filhos.

Qual é o número médio de filhos das famílias entrevistadas?

GRÁFICO DE NOTAS

5. Vinte alunos de um Instituto participaram num concurso de matemática. Dez dos alunos formavam o Grupo 1 e os outros dez formavam o Grupo 2. As notas obtidas no concurso estão dadas nos gráficos que se apresentam a continuação:



Cada rectângulo no gráfico representa a nota dum aluno em particular. Por exemplo, no Grupo 1, os dois rectângulos que aparecem sobre o número 14 indicam que dois alunos deste grupo obtiveram 14 valores.

5. A O Grupo 2, tem uma nota média de 11 valores.

a) Comprove que a nota média do grupo 1 também é igual a 11.

b) Que grupo te parece melhor? Justifique a sua resposta.

FAMÍLIA

6. A composição média da família em Benguela é de 3.2 pessoas.

a) Dê 10 famílias que cumpram esta média.