



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 2

“SEGUIMOS CON LOS NÚMEROS Y LAS FUNCIONES”

PONENCIAS

Dña. Alicia Bruno Castañeda

***“UNA VISIÓN DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LOS
NÚMEROS NEGATIVOS”*** _____ **111**

Dña. Ana García Azcárate

***“TRABAJAR DESTREZAS NUMÉRICAS CON MATERIALES
LÚDICOS”*** _____ **119**

D. Ángel Ramírez Martínez

“¿Y SI ROMPEMOS LAS CADENAS DE AHMES Y DESCARTES?” _____ **133**

UNA VISIÓN DE LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Alicia Bruno
Universidad de La Laguna

En esta ponencia se realiza una reflexión sobre la enseñanza-aprendizaje de los números negativos teniendo en cuenta los currículos en España en los últimos años. En este recorrido se contrastan los enfoques que han recibido estos números desde el punto de vista matemático y didáctico, y se analizan diferentes modelos utilizados. Por último, se aportan datos de algunas investigaciones realizadas en Educación Matemática sobre este tema, las cuales aportan conocimiento que puede ayudar a mejorar su enseñanza.

Introducción

El inicio de la enseñanza de los números negativos con alumnos de 12 o 13 años, supone la modificación de creencias fuertemente arraigadas y construidas a lo largo de toda la enseñanza primaria. La idea de que exista algo menor que la nada, el hecho de que las operaciones de sumar y restar se identifiquen, o el comprobar que el resultado de una suma pueda ser un número menor que los sumandos, entre otros aspectos, produce en muchos alumnos dudas momentáneas y en otros provoca conflictos cognitivos que no llegan a superar, quedando, en ocasiones, enmascaradas por un manejo correcto de la operatoria con estos números.

Las tendencias actuales en la enseñanza de los números (Verschaffel y De Corte, 1996; NCTM, 2003) indican que es necesario dedicar menos tiempo a los aspectos de procedimientos, a la práctica de técnicas de algoritmos y de manipulación simbólica, en favor de la actividad conceptual. Entre otros aspectos, destacan que en la enseñanza numérica es necesario:

1. *Enfatizar por qué y cómo se producen las extensiones numéricas.*
2. *Construir un cuerpo coherente de conocimiento numérico, antes que hechos aislados y reglas para cada nueva clase de números.*
3. *Hacer traslaciones entre símbolos escritos y otras representaciones de los números.*
4. *Desarrollar un aprendizaje con una extensa fase conceptual y un amplio rango de situaciones.*

5. *Utilizar la resolución de problemas para dotar de significado a las operaciones y para ayudar a desarrollar los conceptos y habilidades matemáticas formales.*
6. *Desarrollar sentido numérico.*
7. *Fomentar el uso de la calculadora para realizar cálculos e investigaciones numéricas.*

Si se pregunta a alumnos preuniversitarios el tipo de números que conocen suelen poner ejemplos de números naturales, racionales (en sus formas fraccionarias y decimales) y omiten los números irracionales y los negativos, además muchos no relacionan los distintos sistemas numéricos. Robinet (1986) observó que los alumnos, a menudo, diferencian los tipos de números que constituyen los números reales por su escritura, y sólo por eso, dejando de lado las propiedades numéricas.

Por lo tanto, parece que no es suficiente un buen aprendizaje de cada sistema numérico, sino que se necesita conectar mejor unos sistemas con otros. Muchas veces el deseo de que los alumnos se desenvuelvan correctamente en un sistema numérico hace que se olvide que cada avance en el conocimiento numérico de los alumnos debe quedar englobado dentro de un proyecto numérico.

Por ello, los puntos citados anteriormente nos parece un buen enfoque de la enseñanza numérica, con importantes retos a conseguir. Evidentemente son generales y necesitan de una concreción para cada sistema numérico. En esta ponencia reflexionamos sobre aspectos de la enseñanza de los números negativos que se sitúa dentro de este marco.

Tratamiento didáctico de los números negativos en el siglo XX

En Bruno y Martínón (2000) realizamos una revisión de los programas oficiales de matemáticas de la segunda enseñanza española en el siglo XX, así como las formas en que un conjunto de libros de texto presentaron ciertos temas, entre ellos, el de los números negativos. Distinguimos tres grandes etapas antes de la implantación de la LOGSE: 1) Hasta 1953; 2) Desde 1953 hasta 1970; 3) Desde 1970.

En general, encontramos que en todas las etapas los números negativos se presentan siempre después de haber estudiado los números naturales y los racionales no negativos. Normalmente, en un primer curso se introducen los enteros negativos y, en un curso posterior, se realiza la ampliación a los racionales. Sin embargo, observamos cambios a lo largo del siglo XX en el enfoque que reciben los números negativos y sus operaciones.

En la primera etapa, hasta 1953, el esfuerzo se centró en el cálculo algorítmico, con escasas aplicaciones y alusiones a situaciones concretas. Se solía motivar la necesidad, o al menos la conveniencia, de introducir los números negativos aludiendo a su uso en situaciones concretas en las que están presentes magnitudes con doble sentido, siendo esta la única referencia a situaciones reales que encontramos. A partir de ahí, el enfoque de los números negativos es totalmente abstracto, poniendo énfasis en las operaciones y las propiedades de las mismas, de manera que las actividades que se proponían a los alumnos eran casi exclusivamente de práctica algorítmica. En esta etapa aparecen en los textos reglas de las operaciones con redacciones muy complejas y de difícil asimilación con una primera lectura.

Los cambios a partir de 1953 son pequeños, pero se aprecia un mayor esfuerzo didáctico en el tratamiento de los números negativos. Esto se nota en redacciones más simples y claras de las reglas operatorias y, sobre todo, en un mayor uso de aplicaciones

de estos números a situaciones reales, no sólo cuando se introducen los negativos, sino también al justificar las reglas operatorias. A pesar de ello, la mayoría de las actividades que se les proponían a los alumnos se centraban en la práctica operatoria.

Sin duda, el cambio más espectacular se produjo en los primeros años del plan de 1970, cuando se impuso la construcción del conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ en el marco de las “matemáticas modernas”, de forma que ese conjunto se convertía en un ejemplo de anillo. Este tratamiento de los números negativos produjo una ausencia de situaciones reales cuando se introducían los números y en la presentación de las operaciones.

A medida que se superaba el enfoque estructuralista, durante el plan de 1970, ganaba terreno una mayor conexión de los números negativos con situaciones reales, de forma que el establecimiento de las reglas operatorias se hacía a través de cálculos en situaciones sencillas, acompañado de una disminución del uso de las expresiones algebraicas y a favor de ejemplos numéricos.

En el actual sistema educativo somos herederos de este enfoque. Así, la mayoría de las propuestas curriculares en nuestro país optan por introducir los números negativos a través de situaciones cotidianas que den sentido a los números. En cuanto a las operaciones hay muchas variantes, desde dar las reglas buscando regularidades numéricas, hasta resolver problemas aritméticos para justificar las operaciones.

Formas de realizar la extensión a los negativos

En el conocimiento numérico influye la forma en que se introducen o se presentan por primera vez a los estudiantes los nuevos números. Veamos a continuación distintas formas de introducir los números negativos.

En la etapa de las llamadas *matemáticas modernas*, los números negativos se introducían utilizando pares ordenados de números naturales y considerando la relación de equivalencia

$$(a,b) \approx (c,d) \Leftrightarrow a + d = b + c .$$

De esta forma, el conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ se define como el conjunto cociente $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \approx$. Sobra comentar que este procedimiento, debido a su elevado grado de abstracción, poco caló en el conocimiento de los alumnos de 12-13 años.

En la actualidad, casi siempre se pasa de $\mathbb{Z}_+$ a $\mathbb{Z}$ definiendo $\mathbb{Z}$ como los números naturales con signo (positivo y negativo), es decir,

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \dots \} ;$$

más tarde se indica que el sistema de los enteros positivos es isomorfo a los naturales.

Las dos formas anteriores de introducir los números negativos implican la creación de entes nuevos.

Desde nuestro punto de vista, la presentación a los alumnos de los números enteros positivos con una escritura y una denominación diferentes a las que ya conocían (antes: 1, 2, 3..., naturales; ahora: +1, +2, +3..., enteros positivos) conduce a que sea muy difícil la consideración del antiguo sistema numérico como parte del nuevo y, lo que es más grave, la integración del anterior conocimiento numérico con el que ahora se le presenta, de manera que se construyen imágenes inconexas de los diferentes sistemas de números. La figura 1 representa la primera extensión que realizan los alumnos y la figura 2 la segunda extensión. Es habitual que muchos alumnos no establezcan el isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}_+$, o no relacionen los enteros con los racionales.

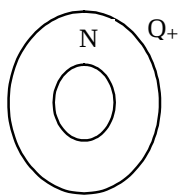


Figura 1. Primera extensión numérica

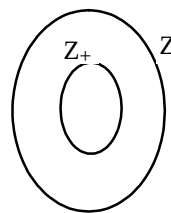


Figura 2. Segunda extensión numérica

Desde nuestro punto de vista, sería más acertado presentar los números negativos por *adjunción*; es decir, a los números positivos que ya se conocen se añaden sus opuestos, a través de la correspondiente notación (-1, -2, -3...) y usando su representación en la recta a la izquierda (o por debajo) de cero.

Métodos de enseñanza de los números negativos

Hay muchos alumnos que cometen errores al efectuar operaciones simples con números negativos. En general, la operación más sencilla de efectuar es la suma y la más difícil es la resta, ya que la multiplicación y división suelen resultar más fáciles que la resta. Las respuestas erróneas son debidas a malas aplicaciones de las reglas. A veces los alumnos inventan reglas falsas que les pueden llevar a resultados correctos o incorrectos, según sean los signos de los números, es por ello, que les resulta complicado modificarlas.

No debemos minimizar los errores de los alumnos, ya que son el reflejo de ciertas dificultades que producen los cambios en la introducción de los números negativos. Siguiendo la terminología de Socas (1997), podemos distinguir entre:

Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos

- Hay una nueva notación para los números positivos: $+2 = 2$.
- El signo menos tiene dos significados distintos, como signo del número y como operación de resta.
- Aparece una mayor complejidad sintáctica: paréntesis y signos.
- Se dan nuevas reglas para las operaciones.

Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático

- Los números negativos tienen menos usos que los números positivos. Por ejemplo, con los números negativos no podemos establecer el cardinal de un conjunto.
- Se identifican las operaciones de suma y resta.
- Hay un cambio en el efecto de las operaciones: sumar (multiplicar) no siempre es aumentar, restar (dividir) no siempre es disminuir.

Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza

- La enseñanza basada sólo en las reglas que rigen la operatoria puede causar problema a muchos estudiantes que necesitan situaciones concretas en las que apoyarse.
- No se conecta con el conocimiento previo de los estudiantes sobre los números positivos.

Estas dificultades han llevado a la búsqueda de modelos de enseñanza de los números negativos. Cid (2002) realiza un cuidadoso recorrido sobre los modelos de enseñanza de los números negativos y pone en tela de juicio la pertinencia de introducir los números negativos por medio de ellos, ya que pueden impedir una buena comprensión de dichos números.

De manera resumida, siguiendo la terminología presentada por Janvier (1983), la mayoría de los modelos que podemos encontrar para los números negativos y sus operaciones responden al *modelo del equilibrio* y al *modelo de la recta*.

El trasfondo del *modelo del equilibrio* (cargas eléctricas, fichas bicolores, ábacos, etc.) es la construcción de los números enteros como pares ordenados de números positivos, aunque, en realidad, su uso no implica escribir los números negativos como pares ordenados. Por ejemplo, los números enteros (positivos y negativos) se representan con cargas eléctricas (positivas y negativas). La idea básica del modelo es que una carga positiva y una negativa se anulan y representan el cero (+ - representa el 0). A partir de esto, se definen las distintas operaciones: la suma se define como “unir” las cargas, la resta como “quitar” y la multiplicación como una suma repetida de grupos de cargas.

En el *modelo de la recta* los números son, al mismo tiempo, posiciones sobre la recta y desplazamientos sobre ella. La adición en este modelo puede ser la combinación de dos desplazamientos o el desplazamiento de una posición a otra. En la resta “sumar el opuesto” puede ser “hacer el desplazamiento en sentido opuesto” o bien la diferencia entre dos posiciones. La multiplicación se define como suma repetida de un desplazamiento o movimiento. El modelo de la recta se puede presentar acompañado de situaciones contextualizadas como el termómetro, el ascensor, el nivel del mar, etc.

Distintas investigaciones han contrastado estos modelos, mostrando las ventajas e inconvenientes de ellos, sin que se haya llegado a un consenso sobre el más adecuado para la enseñanza. Todas las investigaciones coinciden en que, en los dos tipos de modelos, las mayores dificultades se encuentran en la resta, para los casos $a - (-b)$, y en la justificación de “menos por menos es más”. Además, indican que el modelo del equilibrio ha llevado a más éxito que el modelo de recta cuando éste se usa en abstracto, es decir, no contextualizado. También señalan que la recta no es un modelo espontáneo e intuitivo para los alumnos, por lo que necesita de un proceso de aprendizaje.

En las publicaciones sobre la enseñanza de los negativos encontramos posturas contrapuestas. Fischbein (1987) indicó que los modelos para los números negativos son inadecuados, porque no aportan comprensión a estos números. En su opinión los números negativos deberían tratarse cuando los alumnos estén preparados para aceptar justificaciones de la propia matemática. Sin embargo, Bell (1986) indica que *lo que importa en la introducción de los números enteros es el armazón que ayude a desarrollar los procedimientos correctos, días, semanas y años más tarde de que se haya hecho la primera introducción, cuando el alumno afronte cálculos con números enteros y haya olvidado los detalles de aquel primer contacto... La necesidad principal es que los números negativos y sus operaciones tengan los mismos fuertes lazos con la realidad que tienen los números positivos y sus operaciones*.

Nos encontramos ante una situación de enseñanza complicada de solucionar, ante un problema didáctico abierto. Por un lado, los modelos presentan dificultades, pero, por otro, hay alumnos que necesitan representaciones en las que apoyarse, en especial, los que no tienen “el don de digerir reglas operatorias”.

En la búsqueda, o en la espera de otros enfoques, pensamos que la opción que elija el profesorado para enseñar los números negativos debe encuadrarse en los principios que se haya planteado para la enseñanza de los números, en general, es decir, que los negativos no deben quedar como un núcleo de conocimiento aislado. En este sentido, los siete puntos indicados en la introducción de este trabajo nos parece un marco apropiado para la enseñanza numérica.

En el apartado que sigue exponemos las razones de por qué coincidimos con la postura de Bell y las razones por las que el modelo de recta nos parece más adecuado que el del equilibrio.

Los números negativos como parte del conocimiento numérico

Un hecho conocido por los profesores de los últimos cursos de la educación secundaria y de los primeros años de la universidad es que muchos alumnos terminan su aprendizaje escolar obligatorio con ideas confusas sobre los números. Concretamente, los alumnos manifiestan, entre otros aspectos, poca claridad en las relaciones de los diferentes sistemas numéricos (naturales, enteros, racionales, irracionales, reales), en las distintas formas de escribir un racional, en la escritura decimal de los reales, en la identificación de los reales con la recta o en la densidad de los racionales en los reales. A pesar de ello, la experiencia docente en los cursos preuniversitarios y universitarios nos indica que los alumnos utilizan con un cierto grado de precisión la operatoria en cada uno de esos sistemas.

En nuestros trabajos previos (Bruno y Martín, 1999) planteamos que una visión unitaria de la enseñanza de los números contribuiría a establecer las correctas relaciones entre los números. Esta perspectiva unitaria significa que lo que se aprende acerca de los números a lo largo de toda la escolaridad forma parte de un único conocimiento numérico, el cual se va adquiriendo durante el proceso de aprendizaje, que debe tener un hilo conductor que lo unifique y lo haga homogéneo. Alrededor del concepto de número hay muchas ideas que el alumno debe conocer, tales como propiedades matemáticas abstractas, representaciones gráficas, situaciones concretas en las que se usan, problemas, etc. Estos aspectos los consideramos como diferentes *dimensiones del conocimiento numérico* y hemos considerado tres dimensiones básicas: *dimensión abstracta* (símbolos, reglas matemáticas abstractas), *dimensión gráfica* (representaciones gráficas, como por ejemplo, la recta) y *dimensión contextual* (situaciones concretas, problemas aritméticos). Un trabajo adecuado con los números supone considerar las distintas dimensiones y también las traducciones entre ellas.

La visión unitaria implica para el caso de las dimensiones gráfica o contextual utilizar representaciones o situaciones problemáticas que puedan aplicarse a los diferentes sistemas numéricos, observando las limitaciones, los cambios o particularidades que tendrían en cada caso.

Esta es la razón por la que optamos por el modelo de la recta para el aprendizaje de los números negativos. La recta es una representación común a todos los sistemas numéricos. En la extensión a los números negativos la recta favorece la comprensión y la necesidad de “adjuntar” nuevos números a la izquierda del cero, los simétricos de los números positivo que ya conocían. La identificación de la recta con el conjunto de los números reales constituye una de las ideas fundamentales de las matemáticas. El orden de los números queda determinado por su posición en la recta. La suma y la resta también admiten una traducción sobre la recta. Y, aunque de forma más compleja, admite la representación de la multiplicación y la división.

Si optáramos por introducir los números negativos utilizando únicamente el modelo del equilibrio, de pronto los nuevos números tendrían un significado desconectado de lo que hasta entonces conocían sobre los números, dejaríamos a los números negativos sin los significados que realmente tienen en la vida real, y se produciría un cambio en el tipo de enseñanza numérica hasta entonces recibida. Al no poder utilizarlo con los racionales y constituiría un núcleo aislado dentro del conocimiento numérico.

Ahora bien, nuestra postura es que la recta no puede enseñarse aislada de la dimensión contextual. Hay muchas evidencias en la investigación de que la recta en abstracto es muy compleja para los estudiantes. Entendemos que las representaciones en la recta deben responder a situaciones concretas y problemas aritméticos. La enseñanza de los números negativos a través de la resolución de problemas aritméticos es un enfoque que tiene varios puntos en común con el modelo de la recta. De esta manera estamos conectando también en la dimensión contextual, el conocimiento previo sobre los números positivos, pues los alumnos en su etapa primaria han resuelto muchos problemas aditivos y multiplicativos. Se trata ahora de ampliar esos problemas a contextos con números negativos, eligiendo estructuras de problemas ya utilizadas con anterioridad con los números positivos. Además, es necesario realizar problemas con las cuatro operaciones.

Una de las críticas que ha recibido el enfoque a través de la resolución de problemas, es que éstos pueden resolverse con números positivos, por lo que el alumno no siente la necesidad de utilizar negativos. Sin embargo, forma parte del cambio conceptual de los negativos el entender que ahora “sumar (restar) es igual a restar (sumar)”, es decir, que un problema puede resolverse de varias maneras. Por esta razón, la resolución de problemas debe jugar aquí un doble papel, ya que el único fin no va a ser llegar a la solución, sino además, reflexionar sobre las diferentes operaciones que lo resuelven y la igualdad entre ellas.

En este sentido, es necesario que el trabajo con los problemas sea extenso y no anecdótico o en pocas ocasiones, como aplicaciones de las reglas de cálculo. De hecho, podemos encontrar propuestas curriculares actuales que eligen presentar la suma de negativos con uno o varios problemas, y sin embargo, explican la resta a través de una regla de manera abstracta. O bien, otras que utilizan los problemas para la suma y la resta, y los olvidan para la multiplicación y la división.

En definitiva, dado que la recta no es un modelo obvio y necesita de una instrucción previa, si se opta por utilizarla con los números negativos hay dos cuestiones importantes a tener en cuenta, primero, que los alumnos estén familiarizados con la recta en su aprendizaje con los positivos, y segundo, que la recta aparezca contextualizada en muchas ocasiones, es decir, que se realicen traducciones entre estas las distintas dimensiones de conocimiento de forma habitual.

Conclusiones

En esta ponencia hemos presentado, en primer lugar, un recorrido por los diferentes enfoques de la enseñanza de los números negativos en nuestro país en el siglo XX hasta el actual sistema educativo. Esta evolución ha desembocado en propuestas de enseñanza menos abstractas y con mayores intenciones de justificar las reglas operatorias.

También hemos situado los dos tipos principales de modelos de enseñanza de los números negativos, el modelo del equilibrio y el modelo de la recta. La investigación indica que ambos modelos presentan dificultades para los estudiantes.

La visión unitaria del aprendizaje numérico (Bruno y Martínón, 1999), que está en consonancia con las tendencias actuales del aprendizaje numérico, hace que nuestra postura de enseñanza de los números negativos se decante por el modelo de la recta, aunque con ciertas matizaciones. Por un lado, el alumno debe conocer previamente este modelo y estar habituado a representar las operaciones con números positivos, y por otro lado, la recta debe conectarse a las situaciones cotidianas, y no utilizarla exclusivamente de forma abstracta, pues los alumnos realizan mejores representaciones en la recta cuando ésta se presenta contextualizada.

Bibliografía

- Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.
- Bruno, A. (2000). Los alumnos redactan problemas aditivos de números negativos. *EMA, Investigación e innovación en educación matemática*, 5(3), 236-251.
- Bruno, A., Martínón, A. (1999). The teaching of numerical extension: the case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(6), 789-809.
- Bruno, A.; Martínón, A. (2000). Contenidos matemáticos en la segunda enseñanza española del siglo XX. *Suma*, 34, 27-43.
- Cid, E (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Palacián, E. y Sancho, J. (eds.) *Actas de las X Jornadas para el aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, pp.529-542. Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas “Pedro Sánchez Ciruelo” y Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Zaragoza. Zaragoza.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas. Sevilla (Título Original: Principles and Standards for School Mathematics. NCTM, Reston, 2000).
- Fischbein, I. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational approach*. Reidel. Dordrecht.
- Janvier, C. (1983). The understanding of directed numbers. *Proceedings of the VIII Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 295-301.
- Socas, M.M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria. En Rico, L.; Castro, E, Castro, E; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M., *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, pp. 125-154. ICE/HORSORI. Universidad de Barcelona.
- Verschaffel, L.; De Corte, E. (1996). Number and arithmetic. En Bishop, A. et al. (eds). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 99-137. Kluwer Academic Publishers. Netherlands.

TRABAJAR DESTREZAS NUMÉRICAS CON MATERIALES LÚDICOS

Ana García Azcárate
Grupo Azarquiel

En Homenaje a Miguel de Guzmán

"La matemática es, en gran parte, juego, y el juego puede, en muchas ocasiones, analizarse mediante instrumentos matemáticos. Pero, por supuesto, existen diferencias substanciales entre la práctica del juego y la de la matemática..... Sin embargo, es claro que, especialmente en la tarea de iniciar a los más jóvenes en la labor matemática, el sabor a juego puede impregnar de tal modo el trabajo, que lo haga mucho más motivado, estimulante, incluso agradable y, para algunos, aún apasionante"¹¹

Se presenta una metodología y un material en su mayoría de carácter lúdico para utilizar en las clases de refuerzo de matemáticas. El material de la ponencia ha sido experimentado en un grupo de alumnos con fracaso en matemáticas del I.E.S. Severo Ochoa de Madrid.

Introducción

Es cada vez más frecuente en nuestras aulas, encontrarse con alumnos que siguen cometiendo año tras año, graves errores numéricos, errores que les incapacitan para enfrentarse a cualquier situación que necesite alguna destreza numérica para resolverla. No queriendo entrar en el debate, debate sin embargo necesario a muy corto plazo, de qué destrezas numéricas debe adquirir en la escuela, un ciudadano, es decir qué habilidades numéricas corresponden a unas "matemáticas para todos", lo cierto es que la situación en nuestras aulas, en la etapa de Enseñanza Secundaria Obligatoria muestra un gran porcentaje de nuestros alumnos y alumnas intentando "recuperar" su "retraso" en

¹¹ GUZMÁN M. : "Juegos matemáticos en la enseñanza" Actas de las IV JAEM. S Cruz de Tenerife (Septiembre 1984)

matemáticas. Y ese "retraso" se debe, según muchos profesores a una falta completa de capacidades de cálculo:

La terapia aplicada a este déficit, es casi siempre, mandar a estos estudiantes a clases de refuerzo, donde deben rellenar innumerables hojas-fichas repetitivas, ofreciéndoles consecutivamente, operaciones con naturales, operaciones con enteros, operaciones con decimales operaciones ... Prueba de ello es la profusión de cuadernos de recuperación de todas las editoriales importantes, que han ido apareciendo en estos últimos años, cuadernos donde se aplica la "moderna" metodología de los cuadernitos Rubio del siglo pasado.

Este no es el camino.

Sin rechazar el uso ocasional de las hojas tipo "método KUOMON", debemos ofrecer a estos estudiantes que han fracasado en su escolaridad normal, otro enfoque que, al menos intente conseguir una cierta motivación e implicación en la tarea matemática que les presentamos. Este es el contenido de esta charla: mostrar otra forma de plantearse la recuperación o mejora de los alumnos y alumnas en el ámbito de los números.

Para conseguir esta mejora, hemos utilizado, en un proyecto realizado con un grupo de alumnos repetidores del I.E.S. Severo Ochoa de Madrid, tres tipos de actividades.

1. Actividades con ordenadores.
2. Actividades de cálculo mental, con la experiencia del "carné de calculista"
3. Actividades con materiales de tipo lúdico.

Estos tres tipos de recursos tienen en común, el suponer todavía, algo nuevo y motivador para el alumnado de 1º a 3º de la ESO.

Trabajar con ordenadores

El grado de motivación que se consigue planteando a los alumnos, actividades que trabajen contenidos como jerarquía, fracciones, divisibilidad etc..., con el ordenador es sorprendente. Existe en la red, multitud de juegos y ejercicios que permiten trabajar destrezas numéricas de forma amena y competitiva.



Con los alumnas y alumnos del grupo de repetidores de Tercero de nuestro instituto, hemos participado, junto a muchos otros grupos de Terceros de toda España, al proyecto Infoymate², que utiliza en los cursos de la ESO:

El programa DERIVE: para Aritmética, Álgebra y Funciones, el programa CABRI II: para la Geometría Sintética y la hoja de Cálculo Excel: para la Estadística y la Probabilidad.

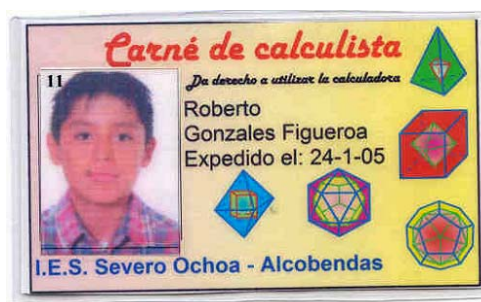
² www.infoymate.net: portal del Proyecto de formación e investigación sobre el uso de nuevas tecnologías de la Información y la Comunicación en Matemáticas para la ESO y el Bachillerato de la Comunidad de Madrid y la Universidad Autónoma de Madrid.

El cálculo mental

*“El aprendizaje del cálculo mental es una de las partes fundamentales de la enseñanza elemental de la aritmética. Desarrolla cualidades de atención, lógica, orden, precisión y vivacidad... Prepara además a la vida práctica, ofreciendo la posibilidad de apreciar el aspecto cuantitativo de la realidad...”*³

Nadie discute hoy en día la importancia de trabajar el cálculo mental con los alumnos. La realización de cálculos prácticamente sin papel, utilizando estrategias para facilitarlos, es una excelente forma de ejercitar la mente. Capacitar a los alumnos para un cálculo rápido, permitirá también exigirles la estimación previa de un resultado y su consiguiente aceptación o rechazo.

Por eso, con el grupo de repetidores de Tercero de nuestro instituto hemos querido dar importancia a la agilidad mental para calcular. Para ello, hemos introducido en clase, siguiendo las ideas del portal de Infoymate.net, la experiencia del "Carné de calculista". El carné de calculista es un carné que le entregamos a los alumnos de la ESO cuando ya saben operar con soltura. Este carné les permite usar la calculadora en clase y para obtenerlo tienen que realizar ciertas cuentas con cálculo mental.



En nuestro grupo de repetidores, las pruebas de cálculo mental se hacían en 5-10 minutos al final de una clase y se corregían a continuación, explicando las estrategias que podían servir para facilitar los cálculos. En cada prueba el alumno ponía en juego su carné y por lo tanto la expectación y los nervios eran (con gran sorpresa nuestra), enormes. Las reglas eran:

- Si conseguía hacer 6 (5 o 4) cuentas correctamente el alumno o alumna ganaba o conservaba si ya lo tenía, su carné de calculista.
- En casa contrario, lo perdía y debía volver a intentarlo a la siguiente semana.

En cada sesión se preguntaban cálculos sencillos:
Una suma – resta con decimales:
¿ $2,25 + 3,25 + 5,50 + 6,50 = ?$

I.E.S. SEVERO OCHOA Alcobendas			CALIFICACIÓN
Apellidos: ESTEVEZ	Nombre: SEDAS	nº lista:	
Asignatura: MATE	fecha: 23 de 04 2004	curso: 3ºF	

1) $4/10 = 0$

2) $2 = 2$

3) $1 = 1$

4) $15/00$

5) NO

carnet.

³ TATON R. "Le calcul mental" PUF(1961)

Una operación con fracciones con o sin paréntesis: ¿ $\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} = ?$

En todas las sesiones se procuraba siempre incorporar algún cálculo mental directamente relacionado con lo visto últimamente en clase; por ejemplo, cuando estábamos trabajando con potencias, se

preguntaba: ¿ $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1)^5 + (-1)^4 = ?$

o cuando, en clase se estaban introduciendo polinomios, una de las preguntas podía ser:

si $P(x) = x^2 + 2x + \frac{1}{2}$, calcula $P(0)$

Los materiales lúdicos

En esos últimos años, cada vez más profesores van incorporando a su clase, algunos juegos, pasatiempos y actividades de matemáticas recreativas. Mucho ha cambiado la situación desde que Miguel de Guzmán, en la IV JAEM, nos hablaba de la importancia de los juegos en la enseñanza.

En mi caso⁴, desde hace mucho tiempo, utilizar materiales lúdicos me ha parecido un buen método para conseguir despertar el interés de los alumnos y alumnas. La introducción de juegos y pasatiempos puede servir para eliminar el bloqueo inicial de gran parte de nuestros alumnos, sortear su rechazo hacia todo lo matemático y hacer que lleguen a participar en nuestras clases.

Pero con los juegos, además de motivar a los estudiantes e inducirles a participar activamente, se pueden trabajar todo tipo de contenidos matemáticos, tantos conceptuales como procedimentales. Por eso, proponemos este tipo de material para reforzar de forma más amena las destrezas numéricas de los estudiantes rezagados. Las actividades presentadas se enmarcan en los contenidos sobre naturales, enteros, decimales, porcentajes, fracciones y potencias y permiten una metodología variada, desde trabajo individual, trabajo por parejas, cooperación en equipo, y planteamiento en el gran grupo de clase.

Actividades individuales de refuerzo

Además de hacer aparecer algún elemento sorpresivo y motivador, las actividades individuales de refuerzo, deben tener una característica importante: los alumnos deben ser capaces, al acabarlas, de comprobar fácilmente y por su cuenta, de que han realizado correctamente su tarea matemática. En efecto, para un profesor o profesora de matemáticas es prácticamente imposible atender de forma individual, incluso en un grupo no muy numeroso, a todos sus alumnos. Por eso nos parece fundamental el que las actividades individuales sean auto-evaluables,.

⁴ GARCÍA AZCÁRATE A "Pasatiempos y juegos en clase de matemáticas" Colección Cuadernos del ICE. Madrid 1999.

DESCIFRA EL MENSAJE

Te presentamos aquí, un cuadrado mágico. En él, algunos números han sido borrados de las casillas y otros sólo aparecen con operaciones.

$2,2 : 5,5$ S	$3,64 : 2,6$ O	$0,05 \cdot 6$ A
$5,76 : 9,6$ G	$0,035 : 0,05$ A	 N
 D	 H	 A

* 1. Haz las operaciones indicadas y escribe en cada casilla lo que obtienes.

En este "sopa de letras", están todos los resultados. Vete tachándolos. Recuerda que si no lo encuentras, tu resultado es incorrecto.

0,4	0,6	0,5	0,7
0,2	1,1	1,2	0,8
0	1,4	0,3	1

* 2. Calcula la suma de las tres casillas de arriba.

* 3. Recordando que se trata de un cuadrado mágico, y que por lo tanto todas las líneas verticales, horizontales y diagonales suman lo mismo, halla los valores de las casillas en blanco y táchalos también en la sopa de letras.

* 4. Ordena todos tus resultados de menor a mayor y con las letras de cada casilla, tendrás el mensaje.

Ejemplo1: Descifra el mensaje

Nivel: Primer ciclo de la ESO

Objetivo didáctico:

- Operaciones con números decimales, insistiendo en división con decimales menores que 1
- Ordenación de números decimales.

Los alumnos van realizando las operaciones indicadas y buscando si su resultado se encuentra en la sopa de letras, para comprobar si lo está haciendo bien.

0,4	0,6	0,5	0,7
0,2	1,1	1,2	0,8
0	1,4	0,3	1

Cuando ha encontrado los números de todas las casillas del cuadrado mágico, los ordena de menor a mayor:

0,1 < 0,3 < 0,4 < 0,6 < 0,7 < 0,8 < 1 < 1,1 < 1,4 y obtiene, si todo ha sido correcto, el mensaje cifrado:

HAS GANADO

De esta forma, en cada momento, los alumnos y alumnas han podido comprobar si los cálculos que estaban realizando eran correctos. El mensaje final permite que la actividad acabe de forma gratificante.

Ejemplo 2: Puzzle de Halloween

Nivel: Primer ciclo de la ESO

Objetivo didáctico:

- Cálculo de los MCM y MCD de dos números sencillos.

PUZZLE DE HALLOWEEN

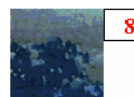
Realiza estos 20 ejercicios

1. MCM (8,4)=
2. MCD (189, 99)=
3. MCD (10, 35)=
4. MCD (36, 60)=
5. MCM (16,4)=
6. MCD (13,23)=
7. MCD (121, 22)=
8. MCM (3,5)=
9. MCD (90, 14)=
10. MCD (168, 26)=
11. Un número primo divisible por 7.
12. MCM (100,30)=
13. MCD (81, 21)=
14. MCM (4, 10)=
15. MCD (12, 40)=
16. MCD (34, 85)=
17. MCM (2,3)=
18. MCD (18, 144)=
19. MCM (2, 7)=
20. MCD (76, 95)=

Coge la ficha del puzzle que corresponde al resultado de la primera operación y pégalas en tu cuaderno, siguiendo el orden, es decir en 1, pega después la ficha correspondiente al resultado de la segunda operación en 2 y así con tus veinte fichas.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16
17	18	19	20

Cuando pegues las 20 fichas del puzzle, habrás obtenido un bonito dibujo.

Cada vez que un alumno obtiene un resultado, debe buscar la ficha que lleva adosado el resultado y pegar esa ficha en el lugar indicado por el número de la pregunta.

Por ejemplo, en el sitio 1, se pondrá la ficha que lleve 8, que es el MCM(8,4). De esta forma, colocando cada ficha en su sitio, se obtiene esta figura



Ejemplo 3: Crucigrama de enteros

CRUCIGRAMA DE ENTEROS I: Suma y resta y opuesto de un número

a) Rellena este crucigrama con los resultados de las operaciones de las líneas horizontales. Cada cifra de los resultados, ocupa una casilla. En cada línea hay varios resultados que aparecerán separados por casillas negras.

HORIZONTALES:

- A. $(+4) + (-2) = \dots$ / $(+54) - (-4) = \dots$ / $(+24) + (-17) = \dots$
 B. $15 - (-57) = \dots$ / El opuesto de 5, más 8. / $(-16) - (-24) = \dots$
 C. El número que sumado a (-3) da 1. / 4 menos que el opuesto de -7 / $(-3) - (-28) = \dots$
 D. $(-12) - (-35) = \dots$ / $(-11) + 11^2 = \dots$
 E. Ocho más que el opuesto de (-78) / $(-9) - (-123) = \dots$
 F. El opuesto de 3 menos el opuesto de 7 / El opuesto de 8, más 11. / $44 - (-11) = \dots$

AHORA CORRÍGETE

VERTICALES:

Para comprobar tus resultados te damos estas pistas:

- El resultado de: $4 \cdot 3^2 \cdot 19 \cdot 401$
- El primer número par / Un cuadrado perfecto.
- Dos más que el cuadrado de 9. / El capicúa más pequeño.
- El resultado de $3^2 \cdot 5 \cdot 47$
- Quince veces el número 52343

	1	2	3	4	5	6
A						
B						
C						
D						
E						
F						

PUZZLE DE FRACCIONES EQUIVALENTES

Aquí tienes las 9 fichas de un puzzle. Cada ficha tiene en cada uno de sus cuatro lados una fracción que muchas veces no está simplificada.

* Simplifica las fracciones y escribe a lápiz en cada ficha tus resultados.

* El juego consiste en recortar las 9 fichas y colocarlas formando un nuevo cuadrado igual al anterior, pero en que las fracciones que estén tocándose sean equivalentes.

$\frac{12}{21}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{9}{81}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{20}{28}$	$\frac{16}{18}$	$\frac{36}{6}$	$\frac{16}{24}$
	$\frac{4}{25}$			$\frac{1}{8}$			$\frac{80}{100}$	
	$\frac{30}{42}$		$\frac{40}{100}$	$\frac{24}{36}$	$\frac{50}{16}$	$\frac{54}{45}$	$\frac{55}{3}$	$\frac{8}{20}$
	$\frac{16}{36}$			$\frac{36}{96}$			$\frac{7}{6}$	
$\frac{7}{9}$	$\frac{28}{35}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{25}{35}$	$\frac{60}{72}$	$\frac{75}{100}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{33}{55}$	$\frac{48}{40}$
	$\frac{45}{75}$			$\frac{21}{15}$			$\frac{20}{16}$	

/Por ejemplo, el sitio para esta ficha es el que se indica a continuación

		$\frac{3}{8}$	
$\frac{2}{7}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{20}{28}$
		$\frac{8}{22}$	
		$\frac{4}{11}$	

GANAR EL QUE PRIMERO ACABA EL PUZZLE

Para saber si tienes tu puzzle bien, pregunta a la profesora o profesor, el número secreto.

Nivel: Primer ciclo de la ESO

Objetivo didáctico:

- Suma y resta de números enteros.
- Opuesto de un número

El alumno que acaba las operaciones horizontales, se tiene que corregir con los datos de las líneas verticales.

Ejemplo 4: Puzzle de fracciones equivalentes

Nivel: 1º, 2º y 3º de la ESO

Objetivo didáctico:

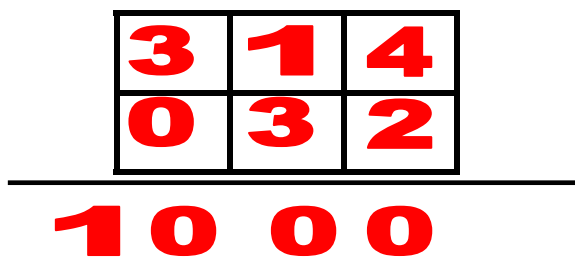
- Simplificar fracciones hasta obtener la fracción irreducible.

Una vez simplificadas todas las fracciones que aparecen y escritas las fracciones irreducibles en los cuatro lados de las fichas, empieza la competición.

Los alumnos recortan las nueve piezas del puzzle y forman el nuevo cuadrado 3x3, encajando todas las fichas.

Al acabar el puzzle, es fácil para el profesor y para el alumno, comprobar que todo es correcto pues los números centrales de cada casilla deben sumar 1000

6	5	4
----------	----------	----------



Ejemplo 6: El dibujo misterioso

EL DIBUJO MISTERIOSO
Realiza estas 12 operaciones.

1. $\frac{3}{2} - \frac{1}{5} \left(4 - \frac{6}{7} + \frac{2}{3} \right) =$
2. $\frac{5}{4} : \frac{5}{3} + 4 \left(2 - \frac{1}{6} \right) =$
3. $\frac{13}{4} - \frac{7}{4} \cdot \frac{5}{14} - \frac{8}{7} =$
4. $\left(3 + \frac{1}{2} \right) : \left(2 - \frac{15}{2} \right) =$
5. $\frac{17}{5} - \frac{2}{5} : \left(5 - \frac{7}{5} \right) =$
6. $\frac{23}{2} : \frac{3}{23} - \frac{7}{46} + \left(4 - \frac{3}{2} \right) + \frac{7}{3} : \frac{7}{6} =$
7. $3 + \frac{7}{10} - \frac{2}{5} - 2 \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8} \right) =$
8. $\frac{7}{3} - \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \right) =$
9. $\left(2 - \frac{4}{5} \right) : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) =$
10. $\frac{3}{4} : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{7}{8} - \frac{15}{4} \right) =$

Cuando tengas los resultados, colorea las áreas correspondientes del dibujo misterioso, con cada una de los diez números de los 10 ejercicios, con los colores que te indican la clave.

CLAVE DE COLORES

Rosa	Gris	Negro	Amarillo	Rojo	Marrón	Verde	Azul
31 42	47 6	37 8	7 11	148 45	17 4	6 8	1 3 2 5

Por ejemplo, si obtienes un resultado de 6 en el ejercicio número 7, deberás colorear de verde todos los sitios donde aparece el 7.

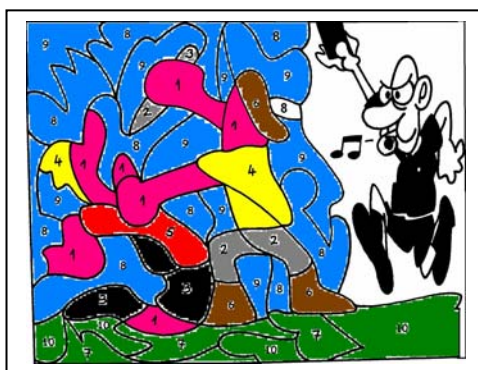


Nivel: 2º y 3º de la ESO

Objetivo didáctico:

- Operar con fracciones.

Según los resultados obtenidos en cada pregunta, se colorea con el color correspondiente todos los sitios donde aparece el número de la pregunta. De esta forma, se obtiene la siguiente figura:



Actividades de refuerzo a trabajar por parejas

Realizar una actividad entre dos, resulta mucho más fácil cuando los dos integrantes de la pareja tienen serias dificultades en la materia. La pareja sirve para repartir el trabajo, para cooperar ante las dificultades y siempre para comprobar si lo hecho por uno es compatible con lo hecho por el otro.

Ejemplo 1: Puzzle de potencias

1024	2^0	3^0	$2^5 - 2^0$
$3^2 \cdot 3^3$	4	2^2	144
243	$(-2)^2$	$\frac{2^6}{2^4}$	$\frac{1296}{3^2}$
$3^8 : 3^3$	9	3^2	$3^5 \cdot 3^0$

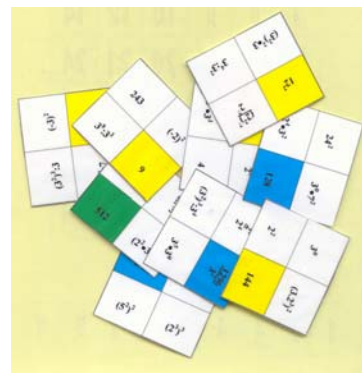
Nivel: 2º-3º de ESO

Objetivo didáctico:

- Propiedades de las potencias.
- Signos correspondientes a potencias con base negativa.

Juego:

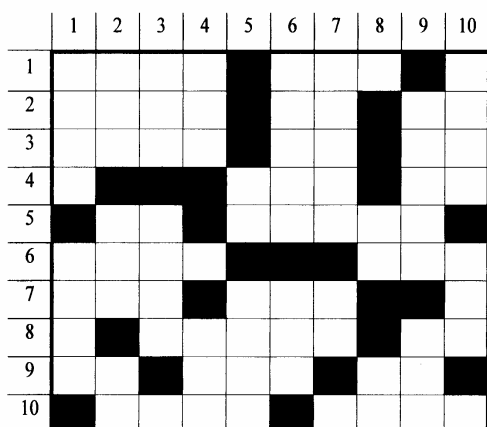
Se trata de formar un rectángulo 3x5 con las 15 piezas de un puzzle de tal forma que cada pieza esté rodeada por resultados iguales. El puzzle está dividido en dos partes, una de 9 piezas (3x3) y la otra de 6 (3x2). Cada alumno recibe una de las partes, junta sus fichas y a continuación la pareja encaja las dos partes del puzzle para formar el rectángulo 3x5.



Gana la pareja que consigue primero formar el puzzle total. Ejemplo 2: Repaso de cálculo

REPASO DE CÁLCULO

Vuestra tarea es resolver el siguiente crucigrama. Para eso, uno intentará hacer las preguntas horizontales y el otro las verticales, y cuando sea necesario, sois un equipo, así que ¡ayudados!



Nivel: 2º-3º de ESO

Objetivo didáctico

- Repaso general de cálculo

El crucigrama es largo y completo. Por eso se pide a cada miembro de la pareja de contestar o bien a las preguntas verticales o bien a las horizontales. En muchos casos, las preguntas no se pueden contestar si no se pide la colaboración del otro miembro de la pareja al faltar datos importantes.

Pareja 1:

Pareja 2:

Horizontales:

1. Las $\frac{4}{5}$ partes de 5845. / El número primo mayor de los menores a 200. / Un cero dividido por ocho.
2. $\frac{2^{12} \cdot 2^4}{2^6}$. / Un divisor de 360. / El MCM de 8 y 12.
3. Las $\frac{3}{8}$ partes de la mitad de 37632. / Un múltiplo menor de 30 del resultado de $\frac{0,125}{2,5} \cdot 100$. / El resultado de $72 : (\frac{8}{3})$.
4. Una nota de insuficiente alta. / El resultado de $9(\frac{41250}{504} : \frac{125}{56})$. / El mayor múltiplo de 12, menor que la centena.
5. La novena parte de 486, aumentada en tres unidades. / El 12% de 385850.
6. La cuarta parte de los $\frac{3}{7}$ de 1260, multiplicada por 10. / El resultado de $72(\frac{3}{8} + \frac{4}{7} \cdot \frac{98}{16})$.
7. El 20% del 10% de 43000. / Un cuadrado perfecto. / La raíz cúbica de 27.
8. Igual que el último del 1 horizontal. / El 75% de 20736. / El resultado de $2(6 + \frac{1}{5}) : \frac{1}{5}$
9. El cero seguido del primer número par positivo. / El MCM de 14 y de 11. / El 6% de 200.
10. Dos unidades menos que una conocida potencia de 2. El resultado de $\frac{3^4 \cdot 10^2}{2}$

Verticales

1. Un capicúa con corazón 17. / El MCM (144, 500) pero dividido por 10
2. Centenas mayores que 500. / Múltiplo de 67 y de 4. / El MCD de 84 y 63.
3. $29 : \frac{2}{50}$. / Múltiplo de 577 menor que 8000. / La peor nota posible Más Destacado.
4. Otro capicúa de tres cifras. / Nada. / Una potencia de dos.
5. El resultado de $\frac{17}{3} : \frac{1}{6}$. / El 16% de 9700.
6. Un múltiplo de 3309. / La tercera parte del 25% de 3048.
7. Un múltiplo de 8773. / El resultado de $5(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}) + 5 \cdot \frac{4}{7} + 5$. / Un cuadrado perfecto.
8. Otro cuadrado perfecto. / El cero, seguido del primer número par positivo. / El 20% de la mitad de 100. / Una potencia de dos.
9. El resultado de $23 \cdot 10^3 - 73$. / Otro cuadrado perfecto.
10. El MCM (34,28) con un cero delante. / Lo que se obtiene al hacer $16 \cdot 60 - 7 \cdot 4$. / Tu nota si no haces este ejercicio.

Actividades de refuerzo de números a trabajar en equipo

Los trabajos e investigaciones que se han realizado en estos últimos años en el campo del aprendizaje cooperativo, hacen aparecer claramente las ventajas de este tipo de trabajo con todo tipo de alumnos., al obligarles a exponer sus propias ideas y defenderlas en su grupo, a compartir, a contrastar y en definitiva a aprender de sus compañeros.

En un grupo de refuerzo, compuesto exclusivamente de alumnos que tienen dificultades con las matemáticas, el trabajo en grupos heterogéneos, es un eslabón más de ayuda: el alumno y alumna de un grupo cooperativo, debe primero intentar entender y ayudar a entender la actividad al resto del equipo, siendo las dudas que se planteen al profesor, dudas que el equipo no ha sabido resolver y nunca dudas individuales de cada uno.

Las metas que nos proponíamos, planteando en una clase de alumnos y alumnas con dificultades, una metodología con trabajo cooperativo eran:

- Que todos participen y aprendan algo.
- Que todos se sientan implicados en la tarea y los resultados del grupo. (Hay que resaltar, que la evaluación del trabajo realizado por el grupo es una evaluación grupal, es decir que todos los componentes del grupo reciben una misma nota)
- Que todos se sientan comprometidos con el aprendizaje de sus compañeros y compañeras. (Esto tiene claro mucho que ver con la forma de evaluar: si un componente del grupo no participa adecuadamente, todo el grupo sale perjudicado)

En el aula de Tercero donde se ha realizado el proyecto, y pasado más de un mes de clase para conocer a los alumnos, hemos optado por formar grupos de cuatro alumnos cada uno.

Los grupos se han hecho, repartiendo los chicos y las chicas, repartiendo los alumnos más problemáticos (en comportamiento y en trabajo), repartiendo los alumnos emigrantes y repartiendo también los alumnos más responsables.

Se han hecho sesiones prácticamente semanales. (salvo al final de curso) y las sesiones se han dedicado:

- a resolución de problemas.

En general, este tipo de alumnado tiene un rechazo frontal a resolver situaciones problemáticas, negándose, en muchos casos, incluso a leer los enunciados. El trabajo en grupo disminuye este rechazo inicial y permite una discusión entre todos de las estrategias a seguir.

-a juegos competitivos entre los grupos.

La competición con los otros grupos, en contextos lúdicos (gymkhana, torneos etc...) facilita la cohesión del grupo)

Ejemplo 1: Mensaje secreto

Nivel: 3º-4º de ESO

Objetivos:

- afianzar las propiedades de las potencias con base natural y entera.

Ordena de MENOR a MAYOR estas casillas con letras y obtendrás el mensaje secreto

E $-7^{19} \cdot (-7)^{-18}$	E $(-2^8) \cdot 5$	D $-(-3)^3$	V $\frac{(-2)^{33} \cdot 3}{(-2)^{43}}$	L $(-2^3)^2$	E $3 \cdot 10^8$	O $\frac{(4^2)^4}{(-4)^2}$
J $(-3)^{81} \cdot (-3)^{-80}$	A $-(-2^2)^4$	T $-\frac{((-2)^7)^2}{2^3}$	R $\frac{5^{22}}{(-5)^{21}}$	E $\frac{(-7)^{44}}{(-7)^{41}}$	S $\frac{3^{144}}{(-3)^{140}}$	A $\frac{(-2)^4}{2^3}$
Y $3^4 \cdot 3^6$	E $\frac{2 \cdot (3 \cdot 5)^{-2}}{3^{-3} \cdot 5^{-2}}$	E $\frac{(-2)^3}{2^2}$	C $(-5)^8 : (-5)^5$	R $(3 \cdot (-2)^2)^2$	S $(-2)^{51} : (-2)^{48}$	R $(-3245678)^0$
E $\frac{13^0 \cdot 6^4}{(-6)^2}$	O $\frac{11^4}{(-11)^2}$	N $\frac{[(-3)^2]^4}{(-3)^3}$	P $3 \cdot (-2)^2$	I $(2 \cdot 5)^3 \cdot 2^{-3} \cdot 5^{-4}$	I $\frac{(2^{21})^2}{(-2)^{40}}$	B $5^0 \cdot 5^8 \cdot 5^{-5}$

Muchas veces, como en esta ocasión, la cantidad de trabajo a realizar para jugar, es demasiada para una actividad individual y justifica una actividad grupal. Esto implica una organización del grupo cooperativo para un reparto adecuado de tareas y discusión de los resultados obtenidos.

Ejemplo 2: Competición: Tarjetas aritméticas

Nivel: 2º-3º-4º de ESO

Objetivos didácticos:

Se trata de un repaso general de destrezas numéricas correspondientes al primer ciclo de la ESO. Es una competición muy adecuada para hacerla al final de un trimestre.

Las 30 cartas de cada baraja tienen que ver con los siguientes apartados:

1. Cinco cartas repasan la jerarquía de operaciones con enteros y el uso de los paréntesis.
2. Cinco cartas tienen que ver con las operaciones con números decimales.
3. Cinco cartas presentan operaciones con fracciones.
4. Cinco cartas preguntan el paso de expresión decimal exacta a fracción irreducible.
5. Cinco cartas ofrecen problemas sencillos con fracciones. Antes de iniciar el juego, es conveniente asegurarse que todos los alumnos saben resolver este tipo de problemas y en caso contrario proponerles estrategias para enfrentarse a ellos como utilizar dibujos para representar las situaciones etc.
6. Cinco cartas que repasan las propiedades de las potencias con exponentes naturales. El contenido de las cartas incide en el problema de la regla de los signos en el caso de potencias y las dificultades que conlleva manejar expresiones como -2^2 o $(-2)^2$

Desarrollo del juego

Cada equipo coge de la mesa del profesor dos cartas de cada montón, e intenta resolver las preguntas de las tarjetas de la forma más rápida posible. Cuando los 12 problemas están resueltos, un representante del grupo escribe en la pizarra el número de la tarjeta y los 12 resultados obtenidos por el grupo.

Gana el equipo que ha obtenido mejor puntuación. La puntuación es la siguiente:

-3 puntos al equipo más rápido, 2 al siguiente, 1 al tercero y ninguno a los restantes.

-1 punto por cada resultado correcto

-Penalización de 1 punto por cada resultado incorrecto.

Actividades de refuerzo de números a trabajar en gran grupo.

Otra forma de trabajo adecuada para una clase de refuerzo es el trabajo con el gran grupo. Es importante que los alumnos y alumnas estén colocados no de forma individual o por parejas sino utilizando un semi-círculo o alguna estructura parecida para facilitar la participación de todos.



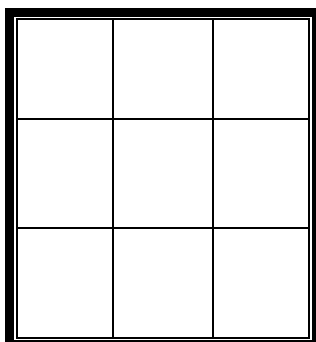
Ejemplo 1: Bingos

Se trata de un juego de aplicaciones múltiples. Es decir, cada profesor o profesora se puede inventar unas tarjetas de bingo prácticamente para cualquier contenido de matemáticas y para cualquier nivel. Existen ya publicados bingos de fracciones, bingos de ecuaciones. Presentamos aquí un bingo de operaciones con potencias para un 1º-2º de ESO.

Material necesario:

- 15 cartas con 15 operaciones con potencias (o con el contenido que se quiere trabajar). Las operaciones deben dar como resultados 1, 2, 3...hasta 15.

- Tarjetas de Bingo vacías, dos para cada alumno.



Reglas del juego:

- Juego para todo el grupo de clase.
- Se reparte una hoja por alumno con las tarjetas de BINGO vacías.
- Una persona es designada para llevar el juego (puede ser el profesor)
- Cada alumno rellena una tarjeta con nueve números diferentes escogidos entre el 1 y el 15 ambos inclusive.
- La persona que lleva el juego hace sacar sucesivamente y sin reposición cartas de la baraja de 15, por diversos alumnos.
- Cada vez que se saca una carta, se escriben las operaciones a efectuar correspondiente en la pizarra, dejando cierto tiempo entre una s operaciones y otras.
- Los alumnos van señalando en sus tarjetas de BINGO los resultados que van obteniendo al efectuar los cálculos.
- **Gana el primero que haga DOS líneas completas (aunque tengan un número en común)**

Tarjetas del Bingo de potencias

Objetivos didácticos:

El BINGO DE POTENCIAS (Exponentes naturales) esta pensado para ser utilizado al acabar las sesiones de clase dedicada a las propiedades de las potencias en un grupo de 1º de ESO de nivel intermedio.

Las propiedades que se refuerzan son:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$\frac{(a^3 \cdot a^4)^2}{a^7 \cdot a^6}$	$(a^2)^4 : a^6$	$\frac{a \cdot (a^3)^7}{a^0 \cdot a^{19}}$	$\frac{(a^6)^4}{a \cdot a^{19}}$	$\frac{(a^3)^5}{(a^2)^5}$
$\frac{a^{10} \cdot a^8}{(a^4)^3}$	$\frac{a^6 \cdot a}{a^0}$	$(a^3 \cdot a)^2$	$[(a^2)^2]^2 \cdot a$	$a^{20} : (a^5)^2$
$\frac{(a^4 \cdot a^2)^2}{a}$	$(a^4)^4 : a^4$	$\frac{a^6 \cdot a^8 \cdot a^0}{a}$	$\frac{(a^2)^6 \cdot a^2}{a^0}$	$(a^3 \cdot a^2)^3$

Con esta forma de trabajo, yo pienso que aprender mejor, es un poco pesado que los libros y una cosa. Además varia y no siempre son ejercicios, que se te hacen pesados y aburridos.

A modo de conclusión

Hemos intentado ofrecer una alternativa a las clases tradicionales de refuerzo de matemáticas, basada en conseguir motivar a los alumnos y alumnas mediante tres tipos de recursos: utilizar los ordenadores, trabajar el cálculo mental y ofrecer actividades lúdicas con juegos, competiciones y búsqueda de tesoros o mensajes secretos. De esta forma, queremos, además de reforzar las capacidades numéricas, que todos nos vengan a decir, algo parecido a lo que escribía Javier, alumno de Tercero de nuestro centro que ha participado del proyecto de refuerzo durante este curso académico.

¿Y SI ROMPEMOS LAS CADENAS DE AHMES Y DESCARTES?

Angel Ramírez Martínez
IES Sierra de Guara. Huesca.

Imagino que cuando se acepta una invitación para presentar una ponencia en unas JAEM, el primer pensamiento es ofrecer algo diferente no sólo en cuanto a la reflexión desarrollada sino también, a poder ser, en cuanto a la temática. Así lo hemos hecho muchas veces, en la medida de nuestras posibilidades, en comunicaciones a Jornadas o en cursos de los CEPs. Cuestiones de geometría espacial, investigaciones de alumnas y alumnos sobre temas sorprendentes (por ejemplo, buscar el polígono de 2'5 lados) etc.; no sólo porque nos gustaran sino por un deseo de aportar algo nuevo y también, por qué no confesarlo, para evitar la duda de que dirán los colegas si el tema propuesto para trabajar es tildado de trivial.

Creo, sin embargo, que ha llegado el momento de hablar claro sobre temas triviales. En las aulas, más allá de casos aislados que pueden contarse con los dedos de una mano, nadie pone a sus estudiantes a investigar la existencia del polígono de 2'5 lados. Es probable que, si se conoce la propuesta⁵, sea considerada interesante pero, más allá de la mayor o menor voluntad y capacidad de profesores y profesoras de matemáticas para renovar drásticamente su archivo de actividades para el aula, la despiadada competitividad de una sociedad que concibe la enseñanza como un peldaño más hacia unas cotas de confort para el futuro, genera una presión curricular a la que resulta muy difícil escaparse. El desarrollo personal de los y las adolescentes, por supuesto, no se contempla. Todo el mundo debe estar en el mismo punto de capacidad de abstracción y desarrollo psicológico marcado en los temarios. La Administración –la sociedad– se lava la cara hablando de la “diversidad” pero es obvio que ella misma no cree su discurso. ¿Por qué permite si no que los libros de texto marquen las pautas, o exige esas esterilizantes programaciones burocratizadas?

Repito: es difícil escaparse. Puedo pensar, en efecto, después de las observaciones oportunas, que un determinado curso de 3º ESO está verde para plantearle la resolución de ecuaciones de segundo grado y, en consecuencia, voy preparando el camino para llegar a ellas; pero si el final de curso se acerca y la fórmula de marras no hace su aparición en el aula, mis alumnas se encargan de advertirme que al paso que vamos probablemente “*tendrán que vivir el día de mañana debajo de un puente*”. Esta

⁵ D. Fielker: *Rompiendo las cadenas de Euclides*. MEC. 1987

Angel Ramírez y Carlos Usón: “*Variaciones sobre un mismo tema. Una cita con la creatividad en clase de matemáticas*”. Proyecto Sur. 1998.

afirmación puede parecer ridícula pero es real: la escuché en boca de una adolescente de 15 años hace dos cursos y fue avalada por las exclamaciones de las otras alumnas de la clase. Los chicos ... ¿temen menos por su futuro? ¿Les importa un rábano lo que pasa en las aulas? ¿Tienen menos miedo ante el suspenso o menos necesidad de sentirse afirmados por una nota? Una interesante cuestión para la reflexión coeducativa en la que no voy a entrar ahora.

Es probable que la frase en cuestión fuera producción intelectual de la propia alumna pero, en cualquier caso, el corpus ideológico en el que esa frase ha sido construida es el de la familia. Sea como fuere, no me hace ninguna gracia. No me gusta que intenten censurarme sibilamente. No me refiero a la alumna –ella lo pretendía a cara descubierta– sino a ese magma pastoso que si nos descuidamos nos conducirá a la autocensura permanente y al abandono de aquello que se llamó en su momento “libertad de cátedra”. ¿Qué hacer? Mi libertad de creación didáctica no puede tampoco abocar a mis alumnos y alumnas a llegar en malas condiciones a esas exigencias oficiales y no oficiales que planifican los ritmos de los centros. A la espera de una rebelión de los profesores y profesoras de matemáticas exigiendo el respeto a su dignidad profesional y a su libertad de creación didáctica, opto –claro está– por modelos mixtos. Hay algo, sin embargo, a lo que no he renunciado: muy bien, nos ocupamos de la ecuación de 2º grado pero como un problema, no como una página más de un absurdo catecismo.

Así pues, creo que además de ocuparnos de particulares problemas especialmente atractivos, hay que ponerse el mono de trabajo y hablar con claridad y sin vergüenza de temas menos brillantes pero que afectan de forma directa al día a día de las aulas. Por ejemplo, creo que todos sabemos –pero a todos nos escandaliza admitirlo– que muchas de las matemáticas escolares se imparten según el modelo que podríamos llamar “recetario de cocina”. Lo sorprendente es que ese modelo es una constante en la historia de las matemáticas.

Las cadenas de Ahmes

I

El problema 14 del conocido como *Papiro de Moscú*, escrito en Egipto hacia el año 1850 a. C., pide calcular el volumen de un tronco de pirámide de base cuadrada, de 6 unidades de altura, 4 para el lado de la base mayor y 2 para el de la pequeña. Si hago caso a J. P. Collette⁶ el texto del papiro dice lo siguiente:

Si se os dice: una pirámide truncada de altura 6 y de base 4 y 2; debéis tomar el cuadrado de 4 que es 16, después doblar 4 para obtener 8, tomar el cuadrado de 2 que es 4, sumar 16, 8 y 4 para obtener 28; calcular $\frac{1}{3}$ de 6 que es 2, multiplicar 28 por 2 que da 56; veis, es 56.

Sin duda sentiréis incomodidad ante esta serie pautada de operaciones que ciegamente os va llevando a la solución. Falta el proyecto del resolutor que nos vemos forzados a destilar de ese magma de operaciones aritméticas. Hay que suponer que

⁶ Jean Paul Collette: “*Historia de las matemáticas*”. Siglo XXI. 1985. Los manuales de divulgación de historia de las matemáticas no son fiables respecto a la literalidad de los textos originales que transcriben.

manejaba la fórmula $V = \frac{1}{3}h(B^2 + Bb + b^2)$, donde B y b son los lados de las bases mayor y menor y h la altura del tronco. Imagino que los destinatarios de este antiguo “manual didáctico” conocían de antemano la fórmula correcta y que, a partir de ese conocimiento, serían capaces de aplicarla adecuadamente, cada número en el lugar previamente asignado, y obtener de esta manera la nota aprobatoria que les permitiría subir un escalón más en su camino hacia el cuerpo de funcionarios del Faraón. Supongo que sería así porque en caso contrario –no me cabe duda– la APA del “centro formativo” en cuestión habría presentado la queja correspondiente.

No creo que sea necesaria esta última ironía para resaltar la modernidad, la actualidad del papiro egipcio. Ese listado de operaciones no justificadas, en el que importan más los resultados parciales que se van obteniendo que las razones por las que se hacen, ¿no os recuerda las presentaciones de los problemas que hacen los alumnos y alumnas en sus primeros años en el Instituto? En el número 35 de SUMA, publiqué con Carlos Usón un artículo cuyo título –“¿Por qué seguir anclados en Egipto?”– resumía nuestra opinión sobre el arcaísmo que supone hoy día la importancia y el tiempo que se sigue concediendo a la operativa con fracciones. Pues bien: las anclas de la didáctica de las matemáticas –largas, viejas, antiguas– también parecen estar sujetas en al año 2000 a. C.

[No se conoce el nombre del escriba del papiro de Moscú pero sí el del “papiro de Rhind”. El escocés Rhind compró un papiro copiado por Ahmes en el año 1650 a. C. Simbolizaré en Ahmes la metodología expositiva de los antiguos egipcios.]

II

Vayamos ahora a un manual del matemático nazarí al-Qalasadi (s. XV), de título realmente poético: “*Cae el velo de los secretos de las cifras de polvo*”. Las “cifras de polvo” son las cifras hindúes, llamadas así por que se escribían en tablillas de arena. El capítulo V, “*Sobre la suma y resta de radicales*”⁷, empieza de esta manera:

Multiplicas los dos números el uno por el otro; tomas el doble de la raíz del producto que añadirás a la suma de los dos números; pondrás el signo radical sobre la suma obtenida.

Ejemplo: *Para hacer la suma de $\sqrt{3}$ y de $\sqrt{12}$, multiplica los dos números propuestos; obtendrás 36, el doble de cuya raíz es 12; añade este último a los dos números y obtendrás 27; coloca encima un radical; el resultado pedido es $\sqrt{27}$.*

Y continúa explicando cómo actuar si el producto obtenido no es un cuadrado perfecto. Al-Qalasadi está describiendo cómo aplicar la igualdad

$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}}$. Una interesante variación del cuadrado de una suma que no suele ser utilizada –me parece– en nuestras aulas pero que puede ser útil. Describe cómo aplicarla pero en ningún momento la justifica. Su didáctica sigue los pasos de la de los escribas egipcios. Obsérvese hasta qué punto la expresión “*coloca encima un radical*” parece pretender que el lector o lectora actúe por imitación. La más tosca versión de la teoría empirista del reflejo: aprender es repetir.

⁷ Qalasadi: “*Kasf al-asrar ‘an ‘ilm huruf al gubar*”. Traducción de Mohamed Souissi. Maison arabe du livre. Túnez. 1988.

Desde luego que no los estoy sometiendo a crítica ni a ellos ni a al-Qalasadi. Sus escritos responden a una tradición de presentación de los conocimientos matemáticos que, por otra parte, podrá ser sin duda justificada tanto desde la historia social como desde la propia evolución interna de las matemáticas. Lo que me interesa resaltar es la pervivencia del modelo. Avancemos hasta el siglo XVIII, hasta un texto impreso en Madrid y firmado por el *Maestro Juan García Berruguilla, el Peregrino*. Se trata de un manual para arquitectos y agrimensores⁸. Extraigo una muestra de la pericia didáctica del maestro Berruguilla:

Es un círculo, y se quiere medir su área, se sabe que el diámetro ab vale 8: para saber la circunferencia se dice: Si 7 dan 22, qué darán 8? Y dan 25, y un séptimo, y ello es la circunferencia. Para saber el área, se saca la mitad de la circunferencia, que es 12, y 4 séptimos, y se multiplica por la mitad del diámetro, que es 4, y salen 50, y 2 séptimos; y esto es el área.

Como puede verse, Berruguilla maneja π con la conocida aproximación $22/7$ ($= 3'142857 \dots$) y el círculo como equivalente a un triángulo cuya base es la longitud de la circunferencia y su altura el radio. Puede verse también que dirige a su lector como un lazarillo a un ciego. Ninguna justificación previa de las reglas que utiliza. La mayoría afirmaríamos que no es una obra didáctica, en el sentido de que su metodología no es buena. Sin embargo, los historiadores de la ciencia tildan a este tipo de obras de didácticas; para ellos, el simple hecho de que sea una obra de difusión basta para considerarlas como didáctica. No entran a valorar cómo se lleva a cabo esa difusión. Muchos textos escolares que se publican en nuestros días están en correcta continuidad con esta tradición histórica.

Para resolver ecuaciones de segundo grado del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, se aplica la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ya está. Punto. Ninguna justificación previa⁹. Más adelante:

Las funciones cuadráticas son las que se expresan de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, que es un polinomio de segundo grado.

Se representan gráficamente mediante parábolas: un tipo de curva abierta con un eje de simetría vertical.

Las características de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ son las siguientes:

Eje de simetría: $x = -\frac{b}{2a}$ Si $a > 0$, es cóncava. Si $a < 0$, es convexa. Vértice:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right).$$

⁸ El título anuncia: “Verdadera práctica de las resoluciones de la geometría, sobre las tres dimensiones para un perfecto arquitecto, con una total resolución para medir, y dividir la Planimetría para los agrimensores”. El Colegio de Aparejadores de Murcia publicó en 1979 una edición facsimilar.

⁹ En contrapartida, el libro de Edelvives para el 4º curso de bachillerato elemental de 1968 (14 años; nuestro 2º ESO) se toma la molestia de demostrar con rigor la fórmula de la ecuación de 2º grado. ¡¡¡Para 14 años!!! Ciertamente, los caminos del Señor son retorcidos.

Etcétera, etcétera. Un folio entero de matemáticas a martillazos. La tradición de Ahmes sigue siendo respetada, con la salvedad, claro está, de que ahora estaría muy mal visto recurrir a ejemplos numéricos en lugar de letras.

III

Es cierto que hay manuales que no hacen estas cosas, pero no tengo ninguna intención de efectuar un rastreo sistemático. Más allá de lo que pongan o dejen de poner los libros de texto, lo esencial es que no recuerdo ningún grupo de ningún nivel de los que me han tocado en suerte, ya sea en el anterior bachillerato o en la ESO y el bachillerato LOGSE, en el que me dijeran que sí, que alguien, alguna vez, les había explicado por qué las ecuaciones de segundo grado se resuelven por aplicación de la fórmula de marras. Hace dos meses, en un CPR, doce colegas comprendieron mi indignación ante estos métodos catequizadores pero reconocieron que la fórmula aparece en las aulas descendida de las alturas del saber, como si de una revelación divina se tratara. Si repaso mis primeros años de docencia, creo que tuvieron que pasar algunos cursos antes de que, por primera vez, explicara en un 1º del bachillerato (3º ESO) la justificación de la fórmula. Cuando relaté a una compañera mi satisfacción por la sonrisa de algunos alumnos al ver cómo la fórmula iba tomando cuerpo en la pizarra, me contestó que yo intentaba prepararlos para la vida, pero que no se trataba de eso.

¿De que se trataba, entonces? ¿De qué se trata ahora? ¿Dónde había quedado la exigencia de rigor que nos inculcó nuestra educación bourbakista? ¡Increíble paradoja! El producto escalar era hasta tal punto una forma bilineal que necesité un año –esta vez fui rápido, sólo uno– para convencerme de que tenía que ser otra cosa, pero incluso ese primer año la ecuación de 2º grado fue algo revelado y no creado.

Vino la Reforma, el constructivismo –me gusta la idea, me gusta incluso la palabra–, pero casi nadie escuchó su propuesta y, en el desconcierto posterior, ¿qué ha quedado? La vieja tradición de Ahmes. Nuestras esencias didácticas más firmemente arraigadas. El convencimiento de que las matemáticas son un conjunto de reglas que lo importante es conocer para aplicarlas no se sabe cuándo. Aquel personaje de Tolstoi que afirmaba algo así como “dicen los matemáticos que es más importante el camino que el punto al que se llega”, eso es para la literatura. Las matemáticas, las viejas matemáticas, las matemáticas de siempre, son fórmulas. En el CPR al que me he referido antes, un colega de Física presente en la sesión se mostró impactado por el hecho de que la solución al problema de cuántos desarrollos tiene un cubo no surgiera de la aplicación de una fórmula.

Las matemáticas reducidas a un manual de fórmulas. La tradición egipcia. El peso de las cadenas de Ahmes.

IV

Lo esencial es, pues, el respeto del gremio a una tradición anclada en los tiempos más remotos. ¿Exagero? ¡Si sólo ocurriera así para la ecuación de 2º grado! Ahí va un pequeño listado de conocimientos memorísticos que año tras año he ido observando que no tenían ninguna base conceptual en los alumnos o alumnas que me los recitaban:

- El eje de simetría de la parábola. El “menos b partido por dos a”.
- $2^0 = 1$.

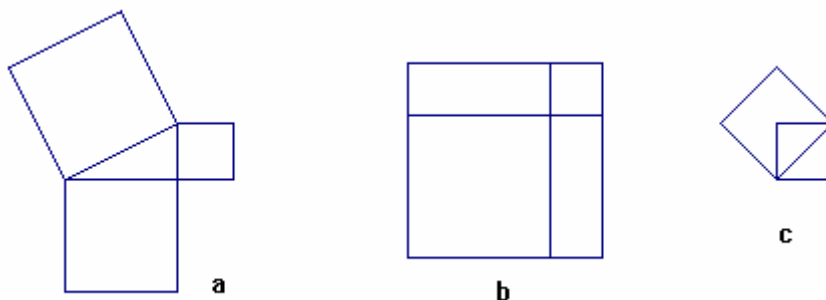
- La regla de Ruffini. ¡Sí! ¡La regla de Ruffini! Es decir, he visto a alumnos aplicarla sin saber que lo que estaban haciendo era dividir un polinomio por otro de primer grado.
- El paso de decimal a fracción. Un bonito tema penosamente destrozado con unas recetas estúpidas.
- La multiplicación y la división de fracciones.
- El algoritmo de la raíz cuadrada. (¡Sí, hay irreducibles que se empeñan en perder el tiempo en esas cosas!)
- El algoritmo de la división.
- Las reglas de derivación. ¡Sí! Existe por lo menos un lugar en la geografía española donde se suelta la tabla de derivadas sin justificar en absoluto cosas tan caprichosas como la derivada de un cociente o un producto. Sin establecer ninguna conexión entre las gráficas de una función y la de su derivada. Ya sé que no tengo derecho a suponer que ese lugar no es único ... pero algo me dice que, si hay uno, habrá más ...
- Los cambios de variable para las integrales. Anécdota real, que me contó un testigo presencial, ocurrida hace años en un Instituto de cuyo nombre no quiero acordarme:
 Alumno: “Oiga, ¿por qué para hacer esas integrales se usa ese cambio?”
 Profesor: “Mira chaval, no te plantees el porqué de las cosas que eso no puede conducir a nada bueno”.
- La fórmula para el ángulo de un polígono regular.

- El determinante $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ para obtener un vector perpendicular a otros dos. Sin

comprobar siquiera que el producto escalar del vector resultante mediante ese esotérico procedimiento, tiene producto escalar 0 con (a_1, b_1, c_1) y con (a_2, b_2, c_2) .

- Descomposiciones del tipo $\frac{x}{x^3 - 2x^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x}$.

- Aunque parezca mentira, muchísimos alumnos y alumnas de bachillerato no han visto nunca los dibujos **a** y **b** de la figura siguiente:



Carentes de todo contacto con la realidad, el teorema de Pitágoras y la fórmula del cuadrado de una suma se convierten así en simples igualdades formales, cuyo sentido profundo no es comprendido. De manera que, por ejemplo, y de nuevo en cualquier nivel educativo, ante la necesidad de medir la diagonal de un cuadrado, todos y todas recurrirán al mantra “ $a^2 = c^2 + c^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \Rightarrow a = \sqrt{2}$ ”. No han visto nunca y no saben interpretar el dibujo **c**.

Etcétera, etcétera. La lista cubre todos los temas de todos los niveles y cada vez se va haciendo más amplia, supongo que al hilo de las prácticas pedagógicas realmente aplicadas en la actualidad ... y siempre. Las cadenas de Ahmes son universales. Recientemente mostré a dos amigos colombianos, alto funcionario uno de ellos, y el

otro un ingeniero copropietario de una importante empresa de transportes, el sencillo dibujo anterior **(b)** –sencillo pero con pedigrí: ¡aparece en los *Elementos* de Euclides!– para justificar aquello de ...

“¿Te acuerdas, Jaime? Creo que era así: *El cuadrado de una suma es igual a la suma de los cuadrados de los dos sumandos más el doble producto del primero por el segundo. Me gustaban las matemáticas pero las cosas se olvidan ...* .”

¡¡“*Eldobleproductodelprimeroporelsegundo*”!! Cada cual guarda sus propios mantras vacíos de significado, testimonios personales del fraude permanente de la enseñanza. Los míos son más bien de geografía y religión: “*cuencatarancónysanclemente*”, “*babialasomañaaselbierzolamaragateríayelpáramo*”, “*elmundoeldemonioylacarne*”, Pero lo del “*dobleproducto*”, ese es universal. Cuando les advertí con el dibujo de Euclides que eso es así porque el mundo es así, su sorpresa fue grande y reían como niños ante el descubrimiento. A los cincuenta años ... Pero, ¡por favor!, ¿cómo no resulta evidente que todo esto no produce conocimiento? ¿Cómo es posible haber caído en un empirismo tan burdo: “*saber es repetir*”? Opinaba Unamuno –al menos eso dijo alguien por mi Facultad en mis años de estudiante– que “*las matemáticas producen vulgarina*”. ¡Claro que sí! Todo esto es vulgarina de la peor especie. Un fraude. Un atentado al derecho de alumnos y alumnas a ser educados en el espíritu crítico y en el libre pensamiento. Y luego hay quienes se escandalizan porque se den clases de Religión en los centros docentes. Alegan que lo que hay que hacer es educar en materias científicas para producir ciudadanos y ciudadanas críticos.

Pero ya advirtió Lakatos que “*la enseñanza de las ciencias es un foco de dogmatismo*”. No creo que estuviera pensando en la didáctica sino en la filosofía de la ciencia subyacente a las clases de ciencias. Si además constatamos que la didáctica de las ciencias realmente aplicada es “*astetiana*”

En Salamanca –en esa inefable Castilla, ¿dónde si no?– encontré hace unos meses el catecismo del Padre Astete. En el segundo párrafo del prólogo, que supongo escrito para la “*novísima edición*” de año 1985, leo:

“*Sí, ya sé que los pedagogos modernos han levantado su voz contra el método memorista; pero lo que en la práctica consiguieron fue hacernos caer en el extremo opuesto de un conceptualismo ininteligible para los niños e inútil para los adultos. Actualmente los niños no entienden mejor los nuevos Catecismos y tampoco se les urge la necesidad de aprenderlos de memoria; cuando lleguen a la mayoría de edad, caerán en el ateísmo práctico –con todas sus consecuencias– ante la imposibilidad de querer y practicar lo que desconocen.*

(...) *Por eso nuestros antepasados procuraron sintetizar y resumir el dogma y la moral de nuestra religión católica en breves catecismos, para que los niños los aprendiésemos de memoria y los entiendésemos según la capacidad receptiva de entonces; después, conforme iban pasando los años, era posible echar mano del caudal encerrado en el archivo de la memoria para desentrañar su contenido ...*”

¡Bendita ingenuidad! Pero, ¿acaso no os suena el argumento? ¿A cuántos colegas se lo habéis oído repetir con la misma convicción que a Fr. Arturo Alonso, el prologuista de la “*novísima edición* del Astete?”

V

Las Sociedades de Profesores de Matemáticas deberían decir algo sobre todo esto y abandonar la política del avestruz. ¿Acaso no publica el NCTM norteamericano unos estándares curriculares donde ejemplifica lo que, a su parecer, debe y no debe hacerse?

En lugar de ello, proliferan los concursos de matemáticas y la búsqueda de futuros talentos. ¿Qué debemos interpretar? ¿Supone esto el abandono de la reflexión sobre cómo se enseñan las matemáticas? ¿Se da por perdida la batalla y se busca refugio en las élites?

Las cadenas de Descartes

En el *Discurso del método*, al comparar la matemática de los antiguos y la de su época, escribe Descartes:

“Por lo que hace al análisis de los antiguos y al álgebra de los modernos, aparte de que no se refieren sino a materias muy abstractas y que no parecen de ningún uso; el primero está tan sujeto a la consideración de las figuras que no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación; y en la segunda, los matemáticos se han sujetado tanto a ciertas reglas y a ciertas cifras que han hecho de ella un arte confuso y oscuro, que confunde el espíritu, en lugar de una ciencia que lo cultive.”

¿Es justo hacer al programa de Descartes responsable último de los actuales libros que se autodenominan de geometría y no contienen ninguna figura? Davis y Hersh¹⁰ advierten que *“en su forma actual, la geometría cartesiana debe tanto a los propios contemporáneos y sucesores de Descartes como a Descartes mismo.”* Menos aún lo será colocarlo en el origen del abandono de la imaginación en las matemáticas escolares. A fin de cuentas, parece que ya desde Ahmes ha estado sometida al ostracismo más absoluto. Pero siempre me ha impactado esa crítica: *“no puede ejercitar el entendimiento sin fatigar mucho la imaginación”*. Certera, quizás, en el caso de la geometría de los antiguos, pero muy fuerte como declaración de intenciones si la sacamos de contexto: la preferencia por el método frente al flash vibrante del ingenio. Debería haber una solución de síntesis, pero lo cierto es que el álgebra es hoy en Secundaria un magma operativo pastoso¹¹ que, en el mejor de los casos, no *“confunde el espíritu”* pero desde luego *“no lo cultiva”*; *“no ejercita el entendimiento”* y ciertamente no *“se refiere sino a materias muy abstractas y que no parecen de ningún uso”*. Su más noble utilidad es servir en alguna ocasión como *“máquina para decidir automáticamente la veracidad de los enunciados geométricos”*¹² o no geométricos.

I

Urge recuperar el ingenio. Ninguno de estos problemas necesita del álgebra para ser resuelto.

¹⁰ Davis, P. J. y Hersh, R.: *“El sueño de Descartes”*. MEC y Labor. 1989.

¹¹ Ocurre lo mismo con la aritmética en Primaria.

¹² Davis y Hersh o. c.

1. Las tres cifras de un número suman 11. Si se invierte el orden de sus cifras el número que resulta es superior en 99 unidades al anterior y la cifra de las decenas es el doble de la de las unidades. ¿Cuál es el número?

2. La suma de dos números es 69 y se diferencian en trece unidades. ¿Cuáles son esos dos números?

3. El perímetro de un rectángulo es 52, y la base mide 7 unidades más que la altura. ¿Cuál es su área?

4. El perímetro de un triángulo isósceles es 18. Cada uno de los lados iguales es 3 unidades mayor que la base. ¿Cuánto vale cada uno?

5. Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro veale 24 cm. Sabiendo que la diferencia entre ellos es de 2 cm., ¿cuánto miden los lados del rectángulo?

6. El perímetro de un rectángulo es 20 y su área 21. Calcula sus dimensiones.

7. Un poste de la luz de 7m se rompe a una cierta altura del suelo y, al doblarse, la punta libre del trozo roto cae a 3m de la base del poste. ¿A qué altura se rompió?

8. El perímetro de un triángulo isósceles es 20 y la altura del lado distinto mide 6. ¿Cuánto miden sus lados?

9. Un segmento AB tiene 20 cm de longitud. Queremos hallar un punto Q sobre AB de tal forma que el cuadrado construido sobre AQ tenga el mismo perímetro que el triángulo equilátero construido sobre QB.

10. De todos los rectángulos de diagonal 10, ¿cuál es el que tiene área máxima?

II

No sólo es que no sea necesaria, es que si sólo recurrimos a ella nos quedaremos sin entender realmente el problema.

1. Las tres cifras de un número suman 11. Si se invierte el orden de sus cifras el número que resulta es superior en 99 unidades al anterior y la cifra de las decenas es el doble de la de las unidades. ¿Cuál es el número?

Lo encontré en un examen de la Diputación General de Aragón para acceso a ciclos formativos de grado superior. Supongo que quien lo propuso esperaba este planteamiento:

$$\begin{cases} x + y + z = 11 \\ y = 2z \\ 100z + 10y + x = 99 + 100x + 10y + z \end{cases}$$

Pero, sin toda esta parafernalia, un sencillo análisis de posibilidades conduce a la respuesta. La pareja de cifras decena – unidades sólo puede ser (2, 1), (4, 2), (6, 3) u (8, 4). Si la suma de las tres cifras debe ser 11, las opciones se reducen tres: (8, 2, 1), (5, 4, 2) o (2, 6, 3). Sólo esta última cumple la condición que falta: $362 - 263 = 99$. Por este método llegan a la solución, sin dificultades, alumnas y alumnos de 1º y 2º de ESO.

Me tocó vigilar este examen y fue penoso observar a personas adultas sufriendo la humillación de no poder continuar un camino de preparación profesional por no dominar un esoterismo innecesario para su futuro y, peor aún, ver cómo se minusvaloraban a sí mismas por no dominarlo, sin atreverse a desplegar su natural ingenio. ¿Es esto lo que realmente se aprende en la Escuela y en el Instituto? ¿Forma

parte del currículum oculto del sistema educativo que un porcentaje conveniente de ciudadanos y ciudadanas asuma esta pérdida de autoestima?

III

2. *La suma de dos números es 69 y se diferencian en trece unidades. ¿Cuáles son esos dos números?*

3. *El perímetro de un rectángulo es 52, y la base mide 7 unidades más que la altura. ¿Cuál es su área?*

4. *El perímetro de un triángulo isósceles es 18. Cada uno de los lados iguales es 3 unidades mayor que la base. ¿Cuánto vale cada uno?*

5. *Si los lados de un rectángulo se alargan 2 cm cada uno, el perímetro vele 24 cm. Sabiendo que la diferencia entre ellos es de 2 cm., ¿cuánto miden los lados del rectángulo?*

Enunciados tópicos y típicos en los capítulos sobre álgebra de los libros de texto. 2 es un ejemplo sencillo de cómo la sistematización algebraica mata el significado, la carga conceptual encerrada en la situación propuesta. Comparad el sistema $\begin{cases} x + y = 69 \\ x - y = 13 \end{cases}$, un ejercicio formalista de simbolización, con el sentido –incluso vital– de este simple razonamiento:

Si dos números suman 69, tienen que estar colocados de forma simétrica respecto a $69/2=34'5$. Si se diferencian en 13, habrá que añadir y restar a ese valor medio la cantidad de $13/2=6'5$. Por tanto, los números serán 41 y 28.

Ya sé que no descubro nada nuevo, pero he decidido resaltarlo en cursiva. Planteo mi preocupación en forma de pregunta de probabilidad: Elegid al azar un centro de Secundaria en España; elegid al azar dentro de ese centro un o una estudiante; ¿apostaríais 100 euros a que resuelve este simple problema sin recurrir al álgebra? ¿Aumenta significativamente vuestra probabilidad si apostáis a que el o la estudiante en cuestión se desconcierta y se asusta si le aportáis el razonamiento anterior¹³? ¡Debería estar prohibido resolver estos ejercicios mediante sistemas antes de 3º ESO!

3 y 4 son casi el mismo con los datos cambiados; no hace falta advertir que 3 no es en absoluto un problema de geometría. Si restamos al perímetro las 14 unidades que miden de más las dos “bases”, quedaría un cuadrado de perímetro 38, de donde resulta que la altura del rectángulo mide 9'5.

III

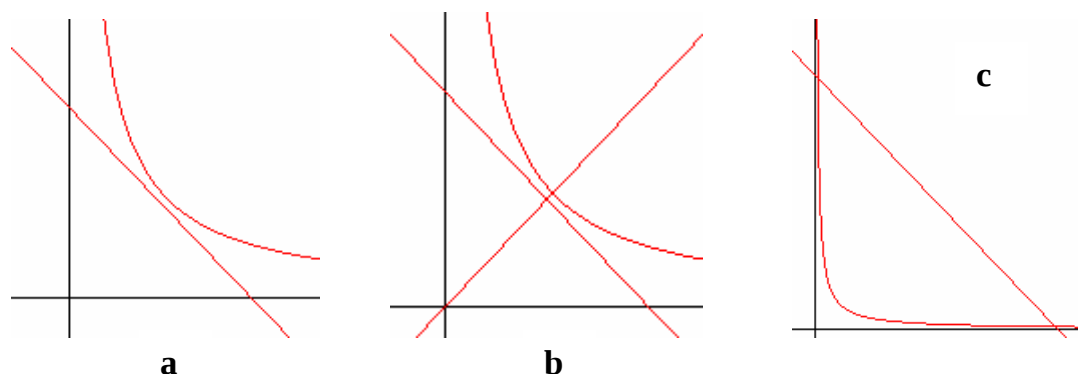
7. *El perímetro de un rectángulo es 20 y su área 21. Calcula sus dimensiones.*

Tampoco 7 es un problema de geometría. Se trata de hallar dos números que sumen 10 y cuyo producto sea 21. Está claro que la respuesta es 3 y 7. ¿Realmente merece la pena plantear los dos sistemas siguientes para resolver los problemas 3 y 7?

¹³ “El o la estudiante”: si es un chico manifestará desinterés; si es una chica, agobio e inseguridad. No se pueden tocar todas las teclas en una hora, así que dejaré de lado, otra vez, el comentario desde la coeducación.

$$\begin{cases} 2x + 2h = 52 \\ x = h + 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 2y = 20 \\ xy = 21 \end{cases}$$

¿O nos interesa sobre todo y por encima de todo que operen –en el caso de 7– con una ecuación “con denominadores” y apliquen la burocratizada fórmula de la de 2º grado? ¿Hago demagogia porque al ser los datos sencillos puedo prescindir del álgebra? Bueno, si queremos que usen el álgebra pongamos problemas en los que realmente sea necesaria o útil. ¿Qué ocurriría si el área del rectángulo fuera, por ejemplo 28. ¡No, con 28 no funciona! ¿Por qué no? Todavía no hay necesidad de ir a resolver el sistema: si los dos números suman 10 serán de la forma $5+a$ y $5-a$, pero $25-a^2$ no puede dar 28. Así que nos aparece un problema realmente interesante: ¿cuánto puede valer el producto de los dos números?



Excelente ocasión para un planteamiento gráfico. En la figura **a** vemos que $xy=28$ y $x+y=10$ no se cortan. En **b** queda claro que el tope máximo del producto lo marca el punto de corte entre $x+y=10$ y la bisectriz del primer cuadrante: dos números iguales cuya suma sea 10: 5 y 5, y el producto máximo posible será 25. Desde luego que eso se deducía de observar que $25-a^2=M$ sólo tiene soluciones para $M \leq 25$. ¿Para qué entonces las representaciones gráficas? ¡Para jugar! Entre los mamíferos el juego es la base de cualquier aprendizaje. Los utilitaristas y dogmáticos abominan de él, prefieren aquello del sufrimiento como base del aprendizaje, pero no podría decirse que una gata hace sufrir a sus gatitos. En el extremo contrario, partidarios y partidarias de una visión silvestre e ingenua olvidan que, como advirtió Valdano a propósito del fútbol, los juegos son algo muy serio. En particular, un juego puede ser placentero, lúdico, y encerrar un atractivo contenido matemático.

Me apetece seguir jugando con los rectángulos de perímetro 10. ¿Qué dimensiones tendrá el de área 1? A la vista de la gráfica **c**, con la evidencia del tipo de valores de x y de y para este caso, ¿fallará algo en mi formación matemática para que esta pregunta me atraiga? Me atrae el juego, el aspecto que puedan tener esos dos números que suman 10 y ¡su producto es 1! ¿Sorpresa de adolescente? En parte sí, porque supone una cierta pervivencia de los enteros como los únicos números existentes, pero eso es sólo una sorpresa momentánea: tengo también y sobre todo un interés estético. Me sigue sorprendiendo que (con las aproximaciones de la calculadora)

$$9'898979486 \times 0'101020514 = 1$$

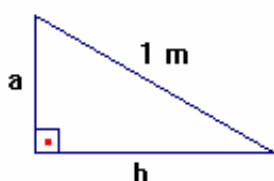
Y, para obtenerlos, me resisto de nuevo a resolver el sistema: resto y sumo a 5 la raíz de 24.

Pero nos hemos ido hace rato de los niveles de 3º ó 4º ESO. La última cuestión podría ser un problema de bachillerato; su enunciado adquiriría entonces este tono, que no tiene nada de lúdico: *de todos los rectángulos de perímetro 20, ¿cuál es el que tiene área máxima?* Tras la lectura de esta frase, alumnas y alumnos de esos que se tildan de “buenos”, arremeterían sin dudar un segundo con el protocolo oficial que obliga a derivar la función $A(x) = x(10 - x)$ para obtener, claro, el cuadrado de lado 5. De nuevo hay que decir que las cadenas de Descartes, la obsesión por el método, drenan el contenido matemático de la situación propuesta. Hace unos días, un alumno de 2º de bachillerato planteó el problema como lo he hecho anteriormente: cortando las gráficas de $xy=20$ y $x+y=10$. ¿Qué nota le habrían puesto en la parafernalia del “examen de madurez”? Probablemente sería buena, pero siempre queda en el aire la duda: ¿Qué nota le pondrán a alguien cuando no hace lo que se espera que haga?

En la Selectividad del 2004, algún distrito universitario propuso una ligera variante de **10**, propuesto también en Selectividad hace ya varios años. En este caso decía:

Determinar la mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 m.

Copio literalmente, dibujo incluido, la resolución oficial –es decir: la que sin duda se espera que hagan– de uno de esos libros que publican todos los exámenes propuestos el curso anterior por los distintos distritos universitarios, con todos los problemas resueltos.



$$\left. \begin{array}{l} a^2 + b^2 = 1 \\ A = \frac{a \cdot b}{2} \end{array} \right\} \rightarrow b = \sqrt{1 - a^2}$$

$$A = \frac{1}{2} a \sqrt{1 - a^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - a^4}$$

$$A' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a - 4a^3}{2\sqrt{a^2 - a^4}} = \frac{2a(1 - 2a^2)}{4a\sqrt{1 - a^2}} = \frac{1 - 2a^2}{2\sqrt{1 - a^2}} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - 2a^2 = 0 \rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2} m \text{ pues } a > 0$$

$$b = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} m$$

$$A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{4} m^2$$

Así, tal cual, sin una triste frase en castellano. Ya sé que son ediciones que deben ser resumidas y en las que se dan por supuestas muchas cosas pero, sin embargo, las obsesiones estéticas y operativas del gremio parecen brillar en ellas con todo su esplendor. ¿Son necesarias las dos últimas filas, tal como están? Decía Voltaire que la mejor manera de aburrir es contar todo; ¿se suponen o no se suponen cosas? ¿O la

finalidad de estas publicaciones –sin duda, intentar garantizar a hijos e hijas de la clase media una nota segura en el examen de marras– requiere que la escolástica al uso sea seguida a pies juntillas?

Formalismo vacío carente de significado. Y, entre paréntesis: ¿Qué sentido tiene haberle dado a la hipotenusa el valor 1m en lugar de 1, a secas? Hago la pregunta de otra forma: Elijamos un alumno o alumna de Secundaria o bachillerato al azar, entre todos los IES de España; ¿apostaríais 1000 euros a que se le ha pedido alguna vez que valorara la respuesta obtenida en un ejercicio o problema? ¿O, más bien, yendo al caso concreto en el que estamos, $\sqrt{2}/2$ es un valor esotérico casi nunca relacionado con 0'707? ¿Por qué no se enfatiza que el triángulo que responde al problema es la mitad de un cuadrado? ¿Que no es necesario porque los dos catetos salen iguales? Y los cálculos tan exhaustivos, ¿esos sí son necesarios?

Imaginad que alguien responde en la Selectividad de esta manera:



Los triángulos rectángulos que tienen la misma hipotenusa tienen el vértice del ángulo recto en una semicircunferencia cuyo diámetro es la hipotenusa. El de mayor área es el isósceles, porque es el que tiene mayor la altura correspondiente a la hipotenusa.

¿Obtendría puntuación máxima? Quizás, pero ¿qué le habríais aconsejado que respondiera? ¿Acaso no le diríais que incluyera los dos métodos, éste y el “oficial”, en su examen?

IV

La resolución sistemática de los problemas de optimización queda convertida habitualmente en una gimnasia carente de un objetivo interesante. Este año, trabajamos en 2º de bachillerato con este enunciado:

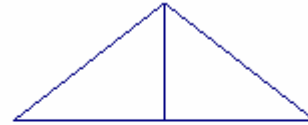
De todos los triángulos isósceles de perímetro 9, ¿cuál tiene área máxima?

Una vez hecha la derivada, igualada a 0, etc., etc., la respuesta indica que el área máxima se obtiene si el triángulo es equilátero. Un resultado bonito que en absoluto queda explicado, aunque sí justificado, por el cálculo y que, en cualquier caso, sumió en el desconcierto a varios alumnos: “*Pero esto, ¿qué quiere decir?*”.

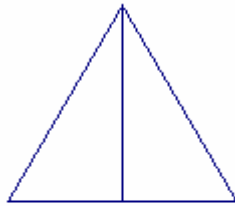
Así que hubo que visualizar el proceso. Una primera aproximación experimental, con el menor margen de error que el contador de CABRI me permitió, para comprender qué se estaba buscando y la aparente simetría del proceso.



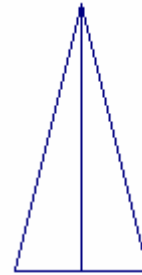
P= 9,00 cm
área=1,11 cm²
lado= 2,28 cm
base= 4,45 cm



P= 9,00 cm
área=3,07 cm²
lado= 2,52 cm
base= 3,97 cm

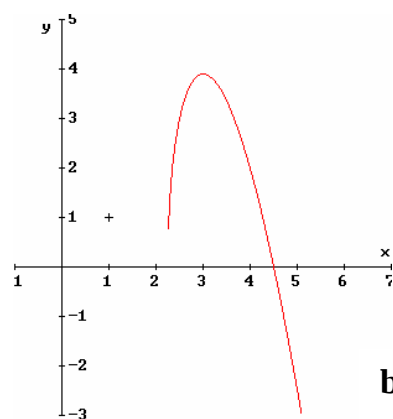
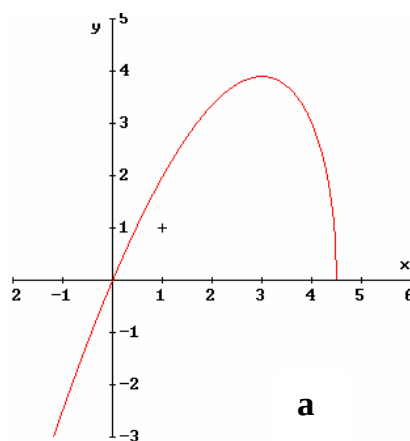


P= 9,00 cm
área= 3,90 cm²
lado= 2,99 cm
base= 3,02 cm



P= 9,00 cm
área= 3,07 cm²
lado= 3,63 cm
base= 1,75 cm

Simetría que no es tal, como se encarga de mostrar la gráfica de la función que hay que optimizar, tanto si elegimos como variable el lado distinto [$A(x) = \frac{\sqrt{4'5}}{2} x \sqrt{4'5 - x}$; gráfica **a**], o el repetido [$A(x) = 3(4'5 - x) \sqrt{x - 2'25}$; gráfica **b**]. Analizamos cómo es razonable, desde un punto de vista físico, que en un caso el dominio sea $[0, 4'5]$ y en el otro $[2'25, 4'5]$ y el hecho de que las dos gráficas carezcan de eje de simetría.



La combinación de los dos modelos permitió, por lo menos, aclarar qué habíamos estado buscando. ¿Por qué no se representan las gráficas de las funciones que se optimizan? ¿Para qué sirven las calculadoras gráficas?

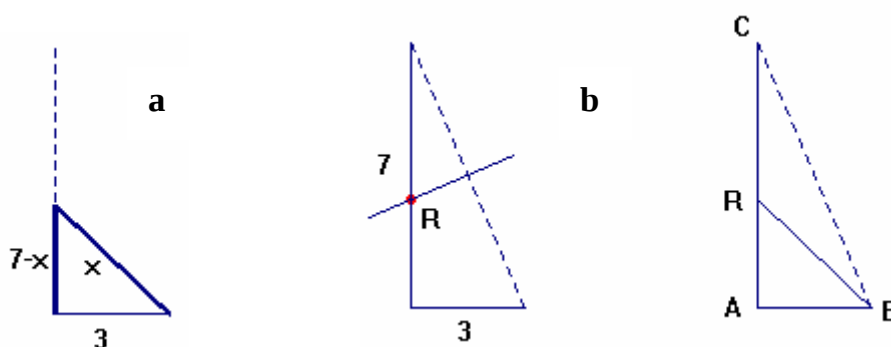
V

6. Un poste de la luz de 7m se rompe a una cierta altura del suelo y, al doblarse, la punta libre del trozo roto cae a 3m de la base del poste. ¿A qué altura se rompió?

El enunciado de este problema resultaría mucho más poético si en lugar de un poste de la luz se hubiera tratado de un junco, como proponía el *Chiu Chang*, una especie de enciclopedia china de las matemáticas del s. I. (G. Gheverghese Joseph (1996)).

Hay un bambú de 10 chih de alto, cuyo extremo superior al romperse toca el suelo a 3 chih de la base del tronco. ¿A qué altura se produjo la rotura?

Seguramente es más creíble la situación con un bambú que con un poste –en este caso más bien sería una gamberrada que un accidente, como parece sugerir la expresión “se rompe”– pero en fin, enunciados eternos adaptados a las distintas épocas. Supongo que lo que esperamos hoy que hagan los estudiantes, es plantear la ecuación $x^2 = 9 + (7 - x)^2$, a partir del dibujo a.



La regla y el compás (o, si se puede, CABRI), esos instrumentos demonizados implícitamente por el programa cartesiano –aquello de fatigar la imaginación– aportan una solución sencilla y elegante. Basta con dibujar un ángulo recto de catetos 3 y 7 y trazar la mediatriz de la hipotenusa (dibujos b); RA es la altura a la que se rompe el poste, porque $RC = RB$.

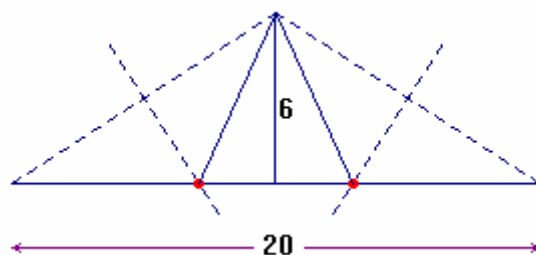
¿Qué esto no nos sirve, porque queremos una medida, un número y no un segmento? Vale, midamos. Mejor aún: si ponemos datos altos –imaginando un árbol de 40 m, por ejemplo– se verán en la obligación de trabajar a escala para hacer el esquema y volver después a las medidas “reales” (¡¡la realidad son los enunciados!!). Si se hace con cuidado, la aproximación puede ser muy buena. No practicamos operativa sobre el cuadrado de una suma, pero sí un procedimiento –el trabajo sobre croquis– de evidente utilidad práctica.

VI

8. El perímetro de un triángulo isósceles es 20 y la altura del lado distinto mide 6. ¿Cuánto miden sus lados?

La misma construcción permite resolver el problema 8, tal y como muestra la figura,

evitando así el sistema
$$\begin{cases} x + 2y = 20 \\ \frac{1}{4}x^2 + 36 = y^2 \end{cases}$$



Obviamente, no estoy sugiriendo volver al “fatigoso análisis de los antiguos”, que diría Descartes, sino buscar enfoques que doten de sentido, de significado conceptual y material, a las situaciones de problema propuestas. Hay que enseñar álgebra, claro que sí, pero no es necesario empezar tan pronto, no es necesario adoctrinar con métodos que arrasen con el ingenio y el punto de vista algebraico debe ser compatible con otros.

El trabajo a escala –en este caso, la regla de la falsa posición– tiene una bonita aplicación en el problema 9.

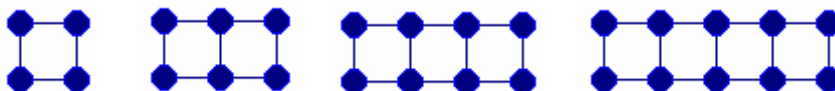
9. Un segmento AB tiene 20 cm de longitud. Queremos hallar un punto Q sobre AB de tal forma que el cuadrado construido sobre AQ tenga el mismo perímetro que el triángulo equilátero construido sobre QB .

La ecuación es tan sencilla $[4x = 3(20 - x)]$ que se puede dudar de si merece la pena complicar las cosas. Mi respuesta es que, si se puede, sí, merece la pena. Si la longitud del segmento hubiera sido 7, el problema sería trivial: 3 para el lado del cuadrado y 4 para el del triángulo. Como mide 20, la longitud del lado del cuadrado será $\frac{20}{7} \cdot 3$ y la del triángulo $\frac{20}{7} \cdot 4$.

Cosas que no deben hacerse

No estoy proponiendo volver al “fatigoso análisis de los antiguos” ni tampoco plantear un modelo sobre cómo mejorar la enseñanza del álgebra. Para esto habría que tener en cuenta los ejemplos, ya muy abundantes, de problemas que generalizan una situación aritmética o geométrica, búsqueda de regularidades¹⁴, etc., etc. Están publicados pero me temo que siguen sin usarse. Guardo como significativo el escrito de una alumna de 3º ESO a la que su profesora propuso el siguiente problema:

Observa cómo se construye esta estructura y cuenta cuántos palos y cuántas bolas tiene.



- ¿Cuántos palos y cuántas bolas son necesarios para hacer una fila de 10 cuadrados?

¹⁴ Shell Center: “Problemas con pautas y números”. MEC y Universidad del País Vasco. Bilbao, 1991.

- ¿Y para una fila de n cuadrados?

La alumna en cuestión lo enfocó desde varios puntos de vista que le permitieron obtener las expresiones $(n \cdot 2) + 2$, $\frac{n}{2} \cdot 4 + 2$ y $(n+1) \cdot 2$ para el número de bolas y $(3 \cdot n) + 1$ para el número de palos. La profesora resumió su revisión del trabajo en dos frases escritas en la cabecera del ejercicio: “Muy bien” y “Varios procedimientos”. Pues bien: este trabajo no fue tenido en cuenta para la nota de la evaluación. Sin duda, desde su respeto absoluto a la viciada tradición didáctica con que universalmente se enseñan las matemáticas, este trabajo era un simple divertimento.

Es urgente sino reflexionar sobre la pérdida de sentido, de significado. Hay que recuperarlo no sólo en los problemas sino también y sobre todo en la introducción de los conceptos y métodos. Hay cosas que no deberían hacerse bajo ningún concepto. Selecciono tres cuestiones que me obsesionan.

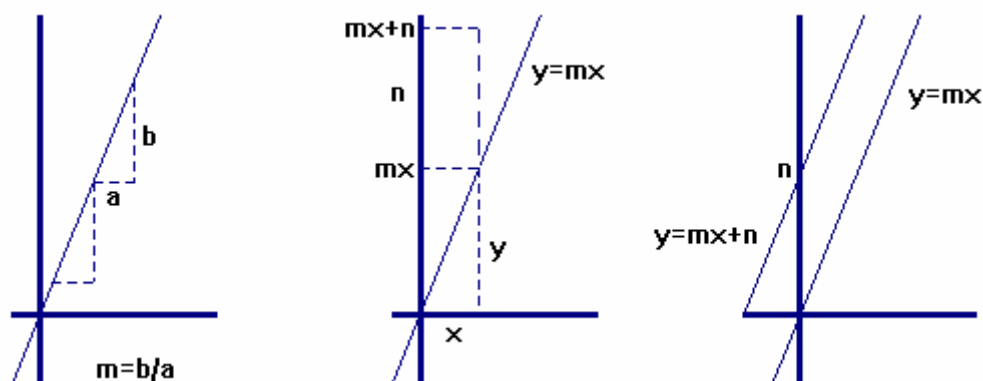
I

¿Cuántas veces habéis visto, para obtener la ecuación de la recta que pasa, por ejemplo, por los puntos (6,1) y (-3,2), el penoso sistema de ecuaciones $\begin{cases} 6m + n = 1 \\ -3m + n = 2 \end{cases}$?

No retiraré la palabra. He dicho “*penoso*” y la mantendré. He dicho también, al principio de este escrito, que hay que hablar de lo que realmente está pasando en las aulas. Y en muchas aulas pasa que se obvia cualquier sentido geométrico –y, por tanto, *vital*– al polinomio de primer grado que da la ecuación de una recta. ¿Qué aporta, desde el punto de vista conceptual, la resolución de ese sistema? ¿De nuevo el calculote ciego, el rodillo del método anulando el sentido! Intentad en un 1º de bachillerato o en un 4º de ESO, con alumnos y alumnas viciados a manipular ecuaciones de rectas sin pensar ni entender nada de lo que están haciendo, intentad introducir sentido enfocando la recta como la figura geométrica que mantiene constante su inclinación. ¡Qué pelea! La comodidad, la PMI –pereza mental institucionalizada– que decía un buen amigo¹⁵ se ha instalado ya en sus ánimos y en sus mentes. Les apoyarán en el mantenimiento de esa comodidad, academias, familias y asesores varios.

Insisto y, a pesar de su trivialidad, mostraré el dibujo. Lo hago como un grito de desesperación: hay que denunciar bien alto que alumnos y alumnas pueden terminar su Secundaria y su bachillerato sin haber visto figuras como éstas, sin haber tenido ocasión de comprobar –en papel cuadriculado, en tramas, con CABRI, eso me da igual; no hablo ya de metodología didáctica, me conformo con recuperar el sentido de las cosas– que los peldaños de lados **a** y **b** son constantes para una misma recta y que eso define la relación de proporcionalidad entre las dos variables.

¹⁵ Emilio Gómez: “Bloqueos en los umbrales de la resolución de problemas”. CPR de Graus. 1997



Para nosotros, profesores, todo esto es elemental pero es muy importante que quienes se ocupan por primera vez de esta cuestión puedan dedicarle tiempo, atención cuidadosa, convencerse experimentalmente de cómo esa característica definitoria de una recta se plasma en el simbolismo de una ecuación, hacer variantes, equivocarse al hacerlas, ... A cambio, en libros de texto que se pretenden dar gratuitamente a las familias, se siguen diciendo tonterías sobre funciones afines.

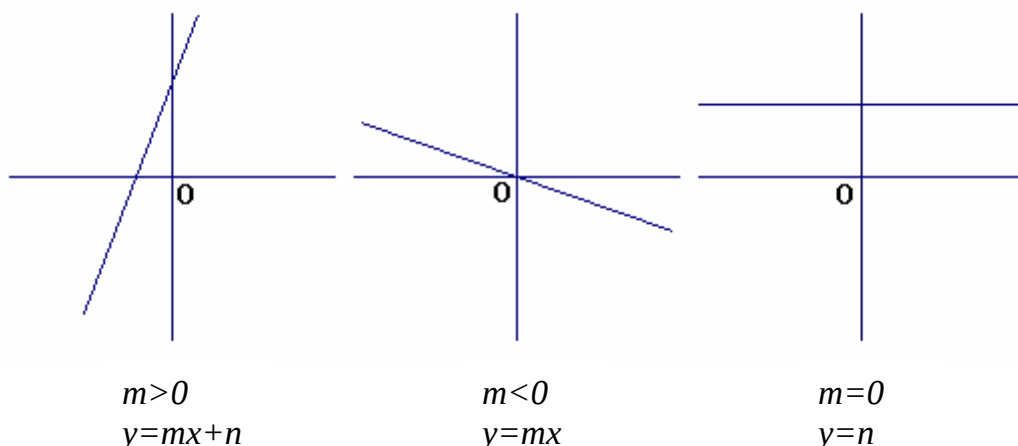
Una función afín tiene una expresión de la forma $y = f(x) = mx + n$.

Una función constante es una función afín con $m=0$.

Una función lineal es una función afín con $n=0$.

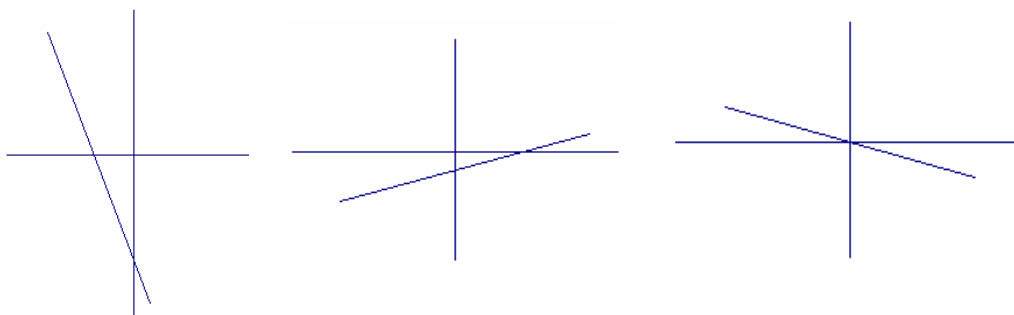
El coeficiente m recibe el nombre de pendiente de la recta.

El término independiente, n , recibe el nombre de ordenada en el origen.



Y, a continuación, se pide a los estudiantes que representen la gráfica de dos de esas funciones afines ... mediante tablas de valores. Esta propuesta confirma el desprecio del texto hacia el concepto de pendiente. Obsérvese que m ni siquiera es la pendiente: “*recibe el nombre de pendiente*”. De la misma forma, n no es el corte con el eje OY: “*recibe el nombre de ordenada en el origen*”. La ecuación de una recta queda así desprovista de su significado físico y conceptual más profundo; convertida en un mero juego –absurdo– formal carente de contenido.

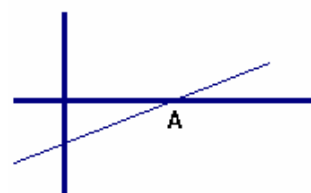
¿Por qué no eliminamos toda esta bazofia y la sustituimos por preguntas más abiertas y más cargadas de significado?



Escribe una ecuación para cada una de estas tres rectas. Explica qué criterio sigues.

Y entramos a observar las discusiones que pueden producirse, introduciendo en ellas preguntas que obliguen a pensar los conceptos:

- Pilar propone como ecuación $y=2x-1$. ¿Por qué no es acertada su propuesta?
- Elisa propone $y=0'5x-2$, y Jaime $y=0'5x-1$. ¿Qué coordenadas tendría el punto A en cada uno de los dos casos?



La tangente de un ángulo y la derivada no son sino variantes sobre el concepto de pendiente. ¿Sobre qué cimientos se quieren asentar si previamente no se le ha dedicado tiempo?

II

¡La fobia a los denominadores y la obsesión por despejar la x! Supongo que sabéis de qué hablo. Chicos y chicas de 2º ESO en adelante, en cuanto ven un denominador sacan la pistola y disparan antes de preguntar. ¡Incluso aunque se trate de una operación con fracciones numéricas! Empiezan así una desenfundada actividad que no termina hasta que llegan a una igualdad del tipo $x=algo$, venga o no a cuento. ¿Merece realmente la pena que tomen contacto con el álgebra si van a terminar convertidos en robots descerebrados? Tengo ante mí una hoja de trabajo que recogí hace tiempo en un Instituto: 82 ecuaciones de primer grado, todas parecidas: 82 situaciones similares, en las cuales actúan sin saber por qué ni para qué. Adoctrinamiento mecánico, adocenamiento mental.

¿Es razonable que si en un 1º de bachiller o un 4º ESO hago esta argumentación

$$\frac{3x-1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{x}{3} \Rightarrow \frac{3x-1}{2} = \frac{3+4x}{12} \Rightarrow \frac{6(3x-1)}{12} = \frac{3+4x}{12}$$
 y ahora sí, ahora sí puedo decir que los numeradores son iguales porque los denominadores de las fracciones lo son.

descubra tantas caras de sorpresa?

¿Por qué no recurrir, sencillamente, al sentido común en los primeros pasos? ¿Alguna vez aparece esto en las pizarras?

$$\frac{1}{2}x - 3 = 3x + \frac{1}{4} \Rightarrow 0'5x - 3 = 3x + 0'25 \Rightarrow -3'25 = 2'5x$$

III

Claro que, para que así sea, hay que haber trabajado antes la relación entre fracciones y decimales. Hace unos años, en un 2º de bachillerato de ciencias sociales, un numeroso grupo de alumnas guardianas de la ortodoxia aprendida en academias y cursos escolares, me recriminaba porque escribía $2^{0'5}$ en lugar de $2^{\frac{1}{2}}$ “que es como se ha escrito siempre”. Y, puesto que su principal preocupación no era la pureza estética de la escritura con fracciones –un alumno de ese mismo grupo alegó que “a mí me dijeron que son más elegante las fracciones”– sino su nota en la Selectividad, debo entender que suponían que el posible empleo de $2^{0'5}$ perjudicaba el futuro de su carrera estudiantil y, por tanto, profesional. Miedos y temores de clase media que tienen en este momento una fuerte incidencia en el desarrollo de las clases.

He visto a alumnos de 2º del COU antiguo –sí, del antiguo, del anterior a la LOGSE– derivar $y = 2^x$ sin saber qué era $2^{0'5}$. He escuchado a una persona que daba clase en 7º de Primaria, decirme que “nunca había pensado que $1/2$ y $0'5$ tuvieran algo que ver”. ¿Que no es correcto decir en alto todas estas cosas? No será con la táctica del avestruz como resolveremos ningún problema. Hay que cambiar la enseñanza de las fracciones y los decimales. Mandar al trastero de la Historia los estúpidos “castillos” y las atontadoras e inútiles reglas memorizadas tipo “sieldecimalespurosecogeelnúmeroformadoporlaparteenterayelperíodoyseleresta...” ¿Para qué queremos las calculadoras? Pregunto de nuevo: ¿Es razonable que alumnas y alumnos de 1º ó 2º de bachillerato muestren sorpresa ante una regularidad tan elemental como ésta?

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} = 0'25 & \frac{2}{4} = 0'5 & \frac{3}{4} = 0'75 & \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{5}{4} = 1'25 & \frac{6}{4} = 1'5 & \frac{7}{4} = 1'75 & \frac{8}{4} = 2 \end{array}$$

¿Acaso no clama al cielo que no entiendan por qué $1/4=0'25$?

Pero, además, ¿para qué sirven todas esas reglas? Incluso desde un enfoque estúpidamente pragmático hay que advertir que “se puede aprobar la Selectividad sin saberlas”. ¡Aquí ya no queda absolutamente ninguna justificación! A lo mejor, quién sabe, perjudica para ese examen escribir $2^{0'5}$, pero ¿qué incidencia puede tener en él desconocer las atontadoras e inútiles reglas memorizadas para pasar de decimal a fracción?

Es sin embargo muy interesante proponer a la clase un programa de investigación dirigido a construir esas reglas u otras similares. Un programa que, gracias a su inutilidad práctica académica, ¡podemos detener donde queramos! ¿Alguna vez aparecen en las aulas razonamientos de este tipo

$$3\widehat{3}4 = 3 + 0\widehat{3}4 = 3 + \frac{34}{99} = \frac{3 \cdot 99 + 34}{99}$$

desarrollados después de haber observado con una calculadora esta regularidad

$$\frac{1}{99} = 0\widehat{0}\widehat{1}; \quad \frac{2}{99} = 0\widehat{0}\widehat{2}; \quad \frac{3}{99} = 0\widehat{0}\widehat{3}; \quad \dots\dots\dots \frac{37}{99} = 0\widehat{3}\widehat{7}; \quad \dots\dots$$

$$\frac{98}{99} = 0\widehat{9}\widehat{8}; \quad \frac{99}{99} = 1; \quad \frac{100}{99} = 1\widehat{0}\widehat{1}; \quad \dots\dots$$

y argumentando que $3 + \frac{34}{99} = \frac{3 \cdot 99 + 34}{99}$ porque $1/99$ cabe 99 veces en una unidad y, por tanto cabe $99 \cdot 3$ veces en 3 unidades?
¿O de este otro

$$2\widehat{1}\widehat{7} = 2 + \frac{1}{10} + \frac{7}{90} = \frac{21}{10} + \frac{7}{90} = \frac{21 \cdot 9 + 7}{90}$$

desarrollado también a partir del sentido común matemático y no de reglas esotéricas?

Todavía aprendo

En la búsqueda de respuestas basadas en argumentaciones creíbles, con la mayor carga posible de empirismo, sigo sorprendiéndome ante soluciones sencillas que las cadenas de la tradición didáctica de las matemáticas no dejan aflorar. No puedo alargarme y, al igual que he hecho en toda esta ponencia, me centraré sólo en unos pocos de los temas habituales.

I

Las división de fracciones se ha reducido a una regla memorizada pero no comprendida. Pero, en realidad, si las dos fracciones tienen denominador común, nadie discute –me refiero, claro está, a los alumnos y alumnas de Secundaria– consecuencias como éstas: $\frac{8}{3} : \frac{4}{3} = 2$; $\frac{3}{5} : \frac{2}{5} = 1\widehat{5}$ ó, incluso, $\frac{7}{4} : \frac{5}{4} = \frac{7}{5}$. De manera que, si no tienen común denominador, saldremos del paso poniéndolo:

$$\frac{7}{5} : \frac{3}{4} = \frac{28}{20} : \frac{15}{20} = \frac{28}{15}$$

Este sencillo ejemplo es para mí paradigmático del fraude que ha sido y es la enseñanza de las matemáticas. El recetario impartido a martillazos, la aséptica contundencia del método ocultan incluso el hecho de que para dividir fracciones hay que poner primero común denominador. En serio: ningún adulto, fuera o no profesor o profesora de matemáticas, a quien he contado esta argumentación la conocía de antemano. Y la sorpresa que sienten alumnos y alumnas llega a ser muy grande. Hace unos días, unas alumnas de 2º ESO me decían con ingenuidad que tenía que “*escribir algo para contar esto de la división*”. Su sorpresa es un testimonio de la sensación de fraude –ellas no pueden expresarlo de esta manera– ante la ocultación del conocimiento.

II

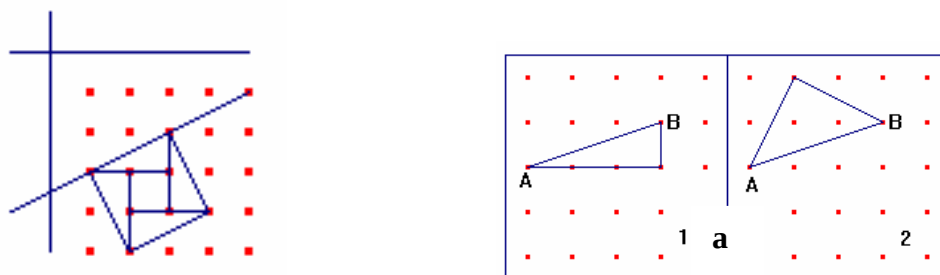
La afición de profesores y profesoras de matemáticas al papel en blanco, sin cuadrícula, es proverbial. Y así, la geometría analítica se realiza sobre este soporte, justificando este

hecho con la habitual afirmación de que la geometría es el arte de obtener conclusiones correctas sobre dibujos mal hechos. ¡Toda una declaración de principios que indica hasta qué punto se desprecia a la experiencia como apoyo de la creación de conocimiento!

En realidad el papel cuadriculado o tramado es un excelente auxiliar que permite interpretar con más claridad los enunciados, dar sentido a las respuestas obtenidas y, combinado con una calculadora científica, atacar problemas para los cuales el bagaje formulístico necesario es de difícil acceso desde la teoría. Incluso, descubrir alguno de estos resultados. Veamos dos ejemplos.

El punto $A(2, -5)$ es el vértice de un cuadrado, uno de cuyos lados está en la recta $x - 2y - 7 = 0$. Calcular el área de este cuadrado.

Enunciado clásico donde los haya. Obviamente, con la mecanización de la geometría que permite el álgebra es fácil llegar al valor 5 como respuesta, ni siquiera es necesario un dibujo. En el peor de los casos, habrá quien piense que, en los principios, como no se dispone de la consabida fórmula, no se puede plantear este problema. Es, sin embargo, un buen momento.



Se puede obtener el área pedida sin recurrir a procedimientos teóricos, y se puede observar en la trama cómo el cuadrado encierra el equivalente a cinco cuadraditos unidad. ¡Qué sorpresa con alumnos que ya conocían la fórmula “oficial” de la distancia de un punto a una recta, cuando se les pide que busquen esos cinco cuadritos! En algún caso he tenido que recordar incluso qué quiere decir la expresión “medir una superficie”. El daño conceptual que origina la mecanización estéril e irreflexiva de las relaciones entre las distintas unidades del sistema métrico es enorme. No he conseguido durante todo este curso que una alumna de 2º ESO manejara como unidad de medida la distancia entre dos puntos de la trama, de manera que para calcular los perímetros de los triángulos de los cuadros 1 y 2 –yo pretendía, evidentemente, que recurriera a Pitágoras–, empleaba su regla y los daba en cm, sin caer en la cuenta incluso de que en el primero dio como distancia entre A y B 2’5 y en el segundo 2’6.

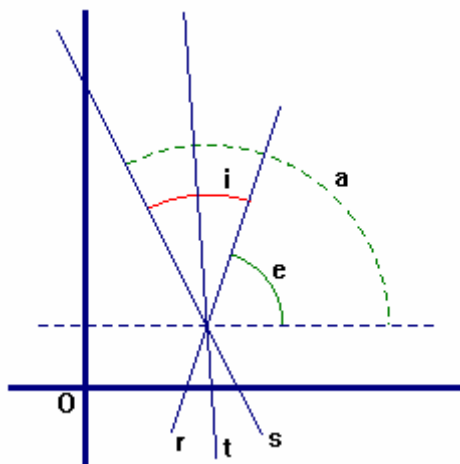
Volviendo al cuadrado, se puede también aprovechar para trabajar sobre la recta perpendicular a una dada –ya he dicho que estábamos en los principios– esperando que la trama lleve a la clase a la conclusión del $mm' = -1$. Para ello, claro, hay que haber dedicado previamente tiempo a la idea de pendiente.

III

El ángulo que forman dos rectas se suele obtener todavía mediante una fórmula a la que se accede desde la trigonometría o desde el producto escalar. En realidad, con

una calculadora científica y una clara comprensión del concepto de pendiente se pueden resolver las preguntas clásicas sobre esta cuestión.

Enunciado: Obtener el valor del ángulo que forman las rectas $r: 3x - y = 4$ y $s: 2x + y = 4$.



Sabemos que $\hat{e} = \arctg 3 = 71^{\circ}50'$ y $\hat{a} = \arctg (-2) = 116^{\circ}56'$. El ángulo $\hat{i}$ que buscamos será la diferencia entre ellos.

Enunciado: Obtener la ecuación de las bisectrices de los ángulos que forman las rectas anteriores.

El mismo dibujo permite observar con facilidad – es decir, permite obtener conclusiones correctas a partir de dibujos correctos – que la recta t forma con OX un ángulo que es la media aritmética de $\hat{e}$ y $\hat{a}$. La calculadora nos dará su pendiente. ¿Quién se acuerda de aquella fórmula con dos fracciones igualadas, cada una de ellas con un módulo en el numerador y una raíz en el denominador? ¿Que es necesaria en el espacio? Bien; ya llegaremos al espacio y, si hace falta se construirá. Mientras tanto, permitamos que un enfoque realista, materialista, o como queramos llamarlo, contribuya a una sana adquisición y construcción de conceptos.

Un momento difícil

Sí, estamos en un momento difícil. Se perdió la batalla didáctica de la Reforma y vivimos en un desconcierto en el que se imponen como único bagaje permanente las cadenas de la tradición: las de Ahmes, las de Descartes, las de Euclides¹⁶ ...

Ha aumentado significativamente la competencia social y, con ella, el miedo de las familias de clase media que ven el Instituto como un paso necesario para que sus hijos e hijas accedan a un confort material en el futuro. La competencia trae consigo el miedo y éste las cadenas. Conozco ya tres casos de personas relacionadas con movimientos de renovación pedagógica que no mantienen la coherencia con sus vástagos. En primaria la renovación es buena; en Secundaria ... eso son palabras mayores. Ahí ya nos jugamos el adosado y el BMW del mañana. Si el profesor quiere

¹⁶ Criticadas, las de Euclides, hace ya tiempo: por los bourbakistas, que pusieron otras igualmente asfixiantes; por Fielker, libertario y romántico. Pero, por supuesto, siguen vigentes en la ordenación de los temarios y libros de texto.

usar tramas, muy bien, no pasa nada; ya llevaremos el hijo al profesor particular o, incluso, a la concertada.

El miedo de las familias se traslada, como es natural, a los alumnos y alumnas. Como resultado se dan varias posibilidades: desde la desconfianza hacia el profesor que ya he comentado, hasta una inseguridad personalmente muy destructiva. Las cadenas no se asumen en balde.

Es patente el desconcierto de las administraciones educativas. La última idea brillante que se les está ocurriendo es dar los destructivos libros de texto gratis a las familias (a mayor provecho, claro, de los sectores privados –en este caso las editoriales– que viven a expensas de la educación¹⁷).

Una situación pastosa que hace difícil la tarea de quien quiera trabajar con delicadeza las matemáticas en su aula. Una situación en la que:

- La sociedad teme la creatividad de alumnos y alumnas (de todas las edades)
- Por tanto, teme la creatividad de la profesora o el profesor.
- Intenta, en consecuencia, reducirlas a la nada: programaciones, libros de texto, normativas, inspecciones, “evaluaciones de calidad”, selectividades, ...
- En este ambiente, alumnos y alumnas temen la posible creatividad de sus colegas y de sus profesores.
- Profesores y profesoras temen la creatividad de sus colegas y de sus alumnos y alumnas.
- Hasta el punto de que todos terminan autocensurándose, consciente o inconscientemente.

Pero no será con la política del avestruz como conseguiremos salir de este atolladero. Hay que hablar con claridad sobre lo que está pasando. Las Sociedades de Profesores de Matemáticas deberían decir algo sobre todo esto.

Bibliografía

Ya han ido apareciendo en notas a pie de página las obras citadas a lo largo de este escrito. Así que en lugar de un listado de libros añadiré dos fragmentos de Bertrand Russell¹⁸ y un tercero de Erich Fromm¹⁹:

“El sistema de exámenes y el hecho de que la instrucción sea tratada como para ganar la subsistencia hace que los jóvenes consideren los conocimientos desde un punto de vista puramente utilitario, como el camino a la riqueza y no como la puerta de la sabiduría. Esto (...) desgraciadamente afecta más a aquellos cuyos intereses intelectuales son más fuertes, pues sobre ellos es sobre quienes la presión de los exámenes recae con más severidad”.

“Si el objeto fuera hacer que los discípulos pensaran, antes que hacer que acepten ciertas conclusiones, la educación se llevaría de modo completamente distinto: habría menos rapidez de instrucción y más discusión, más ocasiones en que los discípulos se encontraran animados a expresarse por sí mismos”.

¹⁷ Siempre hay justos, naturalmente. Hay que salvar de la quema de esta afirmación a alguna editorial pequeña empeñada en mantener la dignidad.

¹⁸ B. Russell: “Principios de reconstrucción social”. (cap. V: “Educación”). Colección Austral. Espasa - Calpe. 1975

¹⁹ E. Fromm: “El miedo a la libertad”. Paidós. 1980 (continuamente reeditado)

“Prevalece la superstición patética de que sabiendo más y más hechos es posible llegar a un conocimiento de la realidad. De este modo se descargan en la cabeza de los estudiantes centenares de hechos aislados e inconexos; todo su tiempo y toda su energía se pierden en aprender cada vez más hechos, de manera que les queda muy poco lugar para ejercitar el pensamiento. Es cierto que el pensar carente de un conocimiento adecuado de los hechos sería vacío y ficticio; pero la “información” sin teoría puede representar un obstáculo para el pensamiento tanto como su carencia”.

[Etc., etc. Se podrían aportar mil opiniones, desde el principio de los tiempos hasta nuestros días, para advertir que lo que se está haciendo en nuestras aulas no es lo adecuado. Pero parece que muy pocos colegas las hacen suyas para llevarlas a la práctica (aquella propuesta marxista de influir en el mundo y no quedarse sólo en interpretarlo)]

