



Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas



Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 3

“GEOMETRÍA : LA BELLA DURMIENTE. LA GEOMETRÍA ¿SIGUE OLVIDADA?”

PONENCIAS

Floreal Gracia Alcaine

**“LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA
OBLIGATORIA”** _____ **161**

Santiago López Arca

**“CLICK + CLIIICK: FICCIONES Y REALIDADES PARA MIRAR Y
VER GEOMETRÍA”** _____ **179**

Manuel Pazos Crespo

“EL SUEÑO DE LA GEOMETRÍA” _____ **189**

Pedro Miguel González Urbaneja

“LA GEOMETRÍA EN LA ARQUITECTURA DE GAUDÍ” _____ **201**

LA GEOMETRÍA EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA

*Floreal Gracia Alcaine
IES Politécnico. Castellón
Universitat Jaume I. Castellón*

RESUMEN

La Ponencia analiza la situación actual de la Geometría en la Educación Secundaria Obligatoria: el currículum oficial, el proceso de enseñanza aprendizaje que se tiene en nuestros centros escolares y los contenidos y metodología que proponen las diferentes editoriales en los libros de texto.

Propone además otros enfoques para trabajar los contenidos de Geometría: recursos en internet, programas interactivos, materiales didácticos, trabajo de campo y proyectos.

Termina con un análisis de la bibliografía existente y algunos ejemplos de trabajos en clase.

1. LA EVOLUCIÓN

Propongo un viaje durante el último siglo para comparar los contenidos de Geometría estudiados, su presentación en los libros de texto y la metodología utilizada.

1900	1970	LOGSE	LOCE
1. Semejanza 2. Puntos notables de un triángulo 3. Relaciones métricas en los triángulos 4. Semejanza, homotecia y simetría 5. Potencia de un punto respecto a una circunferencia 6. Construcciones geométricas 7. Trigonometría. Aplicaciones	1. Elementos básicos de la geometría del plano y del espacio 2. Cálculo de áreas y volúmenes (Primaria) 3. Trigonometría 4. Geometría Analítica (BUP y COU) 5. Movimientos en el plano (FP)	1. Elementos básicos 2. La medida 3. Proporcionalidad geométrica 4. Transformaciones 5. Trigonometría Aparecen los: - Contenidos - Procedimientos - Actitudes	1. Elementos básicos de la geometría del plano y del espacio 2. Descripción, construcción, clasificación y propiedades características 3. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza. Teorema de Tales. Razón de semejanza. Escalas 4. Cálculo de áreas y volúmenes 5. Poliedros regulares. La esfera 6. Traslaciones, giros y simetrías en el plano

Para entender este cambio, deben analizarse las transformaciones que existieron en los valores de la sociedad en cada época, los objetivos de los estudios, las condiciones sociales, políticas y económicas, la tecnología, etc.

Etapa	1900-1970	1970-2000	Siglo XXI
Valores predominantes en la escuela	Jerarquía Orden Respeto	Participación democrática Asociacionismo Sentido crítico	Consumismo Actitudes violentas Individualismo
¿Quién estudia?	Hijos de la clase privilegiada (con alguna excepción) El resto trabaja	Se generaliza hasta los 14 años (16) Extensión cuantitativa	Enseñanza obligatoria hasta los 16 años Incremento del porcentaje de estudiantes en la etapa postobligatoria
Repercusión de los estudios	El estudio implica el acceso a un determinado escalafón y el reconocimiento económico y social	Una titulación no asegura un lugar de trabajo privilegiado ni, por consiguiente ningún reconocimiento económico ni social	Nuevas demandas laborales relacionadas al sector servicios, nuevas titulaciones, cada vez más especializadas (condición necesaria, pero no suficiente) El estudio no te garantiza una forma de vida
Recursos didácticos	Lápiz y papel Reglas de cálculo Libro de texto Pizarra	Se desarrollan las calculadoras y los ordenadores. Aparece Internet	Calculadoras Ordenadores Internet Telefonía móvil Un mundo gráfico y digital Infinitas posibilidades

2. LA GEOMETRÍA DEL SIGLO XXI

Los contenidos actuales que presenta la LOCE son:

REAL DECRETO 831/2003, de 27 de junio (BOE núm. 158 Jueves 3 julio 2003), por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes de la Educación Secundaria Obligatoria. (Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación)

Primer curso de ESO:

2. Geometría.—Elementos básicos de la geometría del plano. Descripción, construcción, clasificación y propiedades características de las figuras planas elementales. Cálculo de áreas y perímetros de las figuras planas elementales.

Segundo curso de ESO:

2. Geometría.—Elementos básicos de la geometría del espacio. Descripción y propiedades características de los cuerpos geométricos elementales. Cálculo de áreas y volúmenes. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Semejanza. Teorema de Tales. Razón de semejanza. Escalas.

Tercer curso de ESO:

2. Geometría.—Descripción y propiedades elementales de las figuras planas y los cuerpos elementales. Cálculo de áreas. Poliedros regulares. La esfera. Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Cuarto curso de ESO:

2. Geometría.—Descripción y propiedades elementales de las figuras planas y los cuerpos elementales. Cálculo de áreas y volúmenes. Poliedros regulares. La esfera. El globo terráqueo. Traslaciones, giros y simetrías en el plano.

Ante las características del alumnado y la tecnología actual, el currículum de la Secundaria Obligatoria no puede seguir siendo el mismo, debe cambiarse en su fondo y su forma, deben actualizarse los contenidos a las necesidades presentes, pero sobre todo, debe modificarse el método de trabajo, utilizando el entorno actual, los intereses de los alumnos y la tecnología de nuestro siglo.

2.1. ¿Qué Geometría se debe estudiar?

La Geometría está en todas partes, la vivimos día a día, está en la calle, en la naturaleza, en el arte, en el cine y en todo lo que nos rodea. Es tan importante el “cómo se estudia” como el “qué se estudia”; veamos algunos ejemplos.

2.1.1. En la calle

CENEFAS

Una cenefa es una estrecha banda ornamental formada por dibujos que se repiten y que son utilizados en bordes de pañuelos, cortinas, libros, pavimentos y techos. Nos centraremos en aquellas cenefas hechas con ganchos. Los que son aficionados o aficionadas a estas labores pueden encontrar en publicaciones relacionadas con el tema situaciones semejantes a ésta:

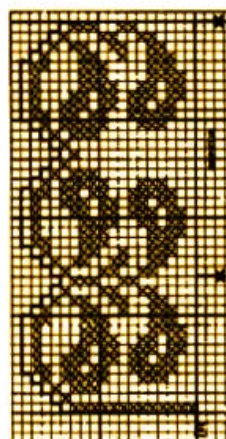


PUNTILLA A PUNTO DE RED ••

MATERIAL EMPLEADO: Hilo DMC Cébélia nº 10, en color blanco. Un ganchillo de acero adecuado al hilo.

PUNTOS EMPLEADOS: Punto de cadeneta, Punto bajo y Punto alto: (ver puntos utilizados). Aumentos a punto de red y Disminuciones a punto de red: (ver puntos utilizados).

REALIZACIÓN: Montar 46 p. de cadeneta, empezar en el punto E del gráfico y clavar el ganchillo, para el 1º p. alto, en el 4º p. de cadeneta a partir del mismo; proseguir siguiendo el gráfico. Al tener el largo necesario, cortar el hilo y rematar. Unir a la tela con la siguiente disposición: * 1 p. bajo clavado en la tela, 2 p. de cadeneta, 1 p. bajo sobre 1 p. alto de la puntilla, 2 p. de cadeneta, saltar un poco de tela *, repetir de * a

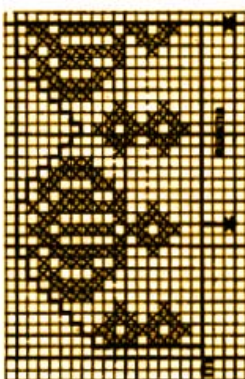


Signos del gráfico

• = 1 p. de cadeneta
⋮ = 1 p. alto

□ = ⋮ ⋮ ⋮

■ = ⋮ ⋮ ⋮



Signos del gráfico

• = 1 p. de cadeneta
⋮ = 1 p. alto

□ = ⋮ ⋮ ⋮

■ = ⋮ ⋮ ⋮

PUNTILLA ESTRECHA ••

MATERIAL EMPLEADO: Hilo DMC Cébélia nº 10, en color blanco. Un ganchillo de acero adecuado al hilo.

PUNTOS EMPLEADOS: Punto de cadeneta, Punto bajo y Punto alto: (ver puntos utilizados). Aumentos a punto de red y Disminuciones a punto de red: (ver puntos utilizados).

REALIZACIÓN: Montar 36 p. de cadeneta, empezar en el punto E del gráfico y clavar el ganchillo, para el 1º p. alto, en el 8º p. de cadeneta a partir del mismo; proseguir siguiendo el gráfico. Al tener el largo necesario, cortar el hilo y rematar. Unir a la tela con la siguiente disposición: * 1 p. bajo clavado en la tela, 2 p. de cadeneta, 1 p. bajo sobre 1 p. alto de la puntilla, 2 p. de cadeneta, saltar un poco de tela *, repetir de * a



Se muestra la fotografía de la labor acabada, pero las explicaciones son reducidas, sólo explican un mínimo del dibujo o motivo, siendo el resto de la labor una repetición, que experimenta diversas transformaciones: simetrías, giros, traslaciones y combinaciones entre ellas.

GRACIA, F. y otros. **Material per treballar Matemàtiques a l'Educació Secundària Obligatoria.** (6 vol + CD) Castellón: 1996-2000.

ENVASES: EL VALOR DE π

Es imposible medir con exactitud el valor de π , pero se puede calcular aproximadamente:

Consigue diversos botes cilíndricos (o platos), mide su perímetro (puedes ayudarte con una cuerda) y el diámetro de la base de cada uno de ellos, después divide ambas cantidades y



Bote	Perímetro	Diámetro	Cociente: P/D
1.			
2.			
3.			
.			
.			
.			
n .			

¿Puedes obtener alguna conclusión?

ICONOS

Analiza la simetría de la figura central. ¿Cuál es la relación entre el área de la flecha y la del círculo exterior?



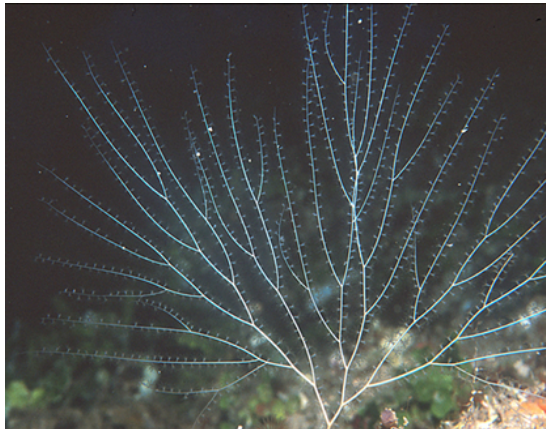
2.1.2. En la naturaleza

La Geometría se encuentra en las flores,



<http://www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/ArteFoto/Flores/Flores1.asp>

en el mar,



<http://www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/ArteFoto/GeomMar/Geomar7.asp>

Fotografía de Antonio Moreno

En los animales y



<http://www.divulgamat.net/weborriak/Exposiciones/ArteFoto/Animales/Animales8.asp>

Fotografía de Pilar Moreno

2.1.3. En el arte

En 2004 se cumplió el centenario del nacimiento del genial artista catalán, Salvador Dalí, uno de los máximos exponentes del surrealismo que destacó en multitud de facetas: pintura, grabado, orfebrería y decoración.

Los elementos simbólico-geométricos son evidentes en muchas de sus obras como en la Crucifixión (1954) Metropolitan Museum - Nueva York, también conocido por "CORPUS HYPERCUBUS".

<http://www.albacete.org/mates/Olimpiadas/vreg/PROBF.HTM>



Al trasladar un punto una unidad, su trayectoria forma un segmento. Si el segmento se mueve una unidad perpendicularmente a sí mismo, genera un cuadrado y cuando éste se mueve una unidad sobre un eje perpendicular al plano que lo contiene, aparece el cubo. De forma similar aparecerá el hipercubo, cuando desplazemos el cubo una unidad en dirección perpendicular a los tres ejes que forman el espacio.

Los elementos que componen estas estructuras se pueden agrupar en un cuadro:

Dimensión del espacio	Puntos	Líneas	Cuadrados	Cubos	Hipercubos	?
0	1	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0
2	4	4	1	0	0	0
3				1	0	0
4					1	0
5						1
.						
.						
n						

¿Podrías completar este cuadro?

Un ejemplo práctico de la relación entre la Geometría y el arte es la exposición “Matemáticas y Arte” que Vicens Vives publicó en 2003 bajo la dirección de Fernando Corbalán.

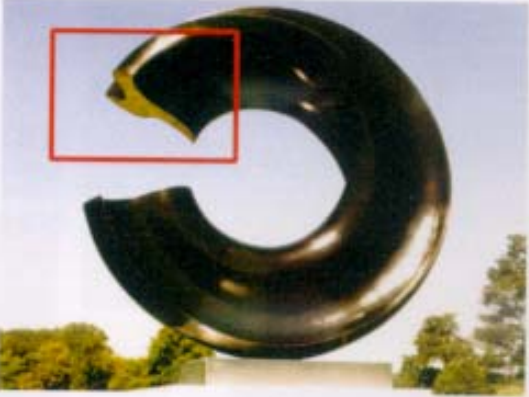
Mate^máticas

Escultura (1)

“Con el tiempo descubrí que forma y espacio son exactamente la misma cosa. No se puede comprender el espacio sin comprender la forma”.
Henry Moore (escultor inglés)



En la plaza de Europa de Zaragoza se encuentra esta escultura de fuerte contenido geométrico.



Música de las esferas
John Robinson alude con frecuencia a las matemáticas en sus esculturas. En ésta la sección tiene la forma de la pajarita de La Alhambra (mural 14). Si sigues los vértices de la pajarita, verás que el volumen es un nudo trébol, una variante de la cinta de Moebius.



La habitación del artista en Arlés
Vincent Van Gogh.

Unos siglos más tarde (a finales del S. XIX) los pintores impresionistas proponen una nueva forma de representar, “estudiando las relaciones entre colores, entre pinceladas, entre luces” (C. Corrales). Se comienza a renunciar a la imitación de la realidad.



2.1.4. En la literatura y el cine

La Literatura y el cine proporcionan un sinfín de ocasiones para trabajar Matemáticas en general y Geometría en particular. El Calendario Matemático 2005-6 propone varios meses temáticos sobre Literatura y Matemáticas, con el fin de motivar la lectura y los problemas que ella propone.

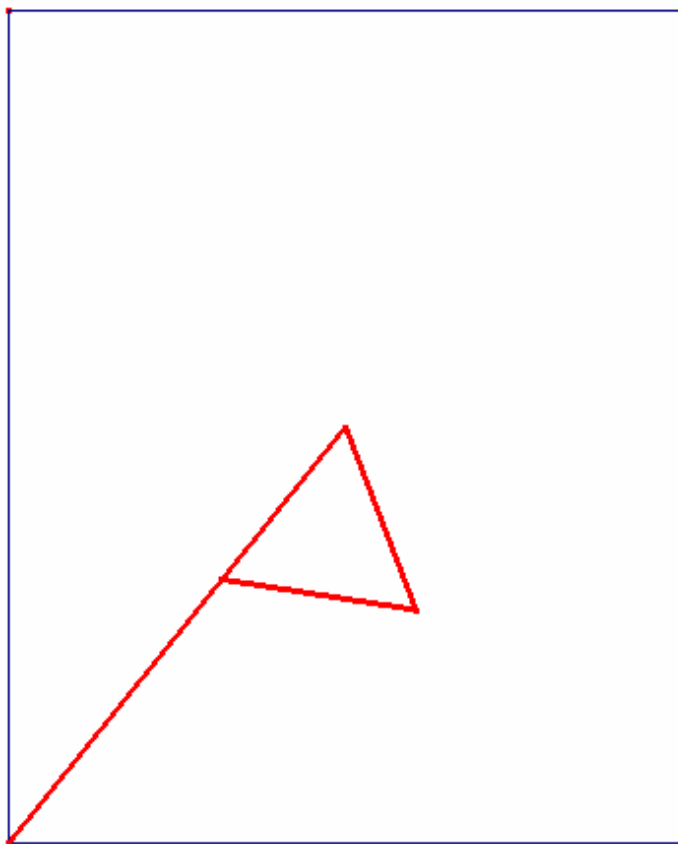
“*Donald en el país*” de las matemáticas es una película antigua, producida por Walt Disney y que muestra la importancia de las Matemáticas.

2.2. ¿Cómo estudiar la Geometría?

Para estudiar la Geometría es necesario que en nuestras clases se describan los objetos, se estimen magnitudes, se mida y compruebe las conjeturas realizadas, se calcule, se dibujen bocetos y soluciones exactas y se utilicen las nuevas tecnologías.

2.2.1. Describir

Explica a tu compañero la figura adjunta para que la dibuje, sin que la vea y sin realizar ningún movimiento de tus manos.



2.2.2. Estimar

El estudiante debe practicar la estimación, ya que es básica para su desarrollo mental, para valorar sus resultados, para practicar y crear nuevos algoritmos de cálculo, para mejorar en su capacidad de resolución de problemas, etc. Planteamos algunos ejemplos:

ERROR ADMISIBLE

¿Cuál sería el error máximo admisible que se podría cometer en las siguientes medidas?:

- a. Peso de un cerdo, con el objetivo de estimar el dinero a recibir por su venta.
- b. Superficie de una vivienda con el objetivo de estimar el importe de la contribución.
- c. Medida de las paredes de una habitación, con el fin de estimar el número de rollos de papel necesarios para empapelarla.
- d. Peso de azúcar, para preparar un pastel.
- e. Capacidad de una piscina, con vista a establecer el coste del agua necesaria para su llenado.
- f. Volumen de yodo, con vista a preparar un determinado medicamento.
- g. Peso del oro, para hacer un anillo.

2.2.3. Medir

INSTRUMENTOS DE MEDIDA

Necesitamos efectuar las siguientes medidas:

- a. La distancia entre Castellón y Vila-real.
- b. El peso de un coche.
- c. El tiempo que tarda un atleta en correr los 100 metros lisos.
- d. La altura a la cual un satélite gira alrededor de la Tierra.
- e. La velocidad de una moto de carrera.
- f. El peso de un virus.
- g. La capacidad de una olla.
- h. El espesor de una hoja.
- i. El tiempo que tarda un autobús en ir de Albacete a Madrid.
- j. La profundidad de un lago.

¿Qué unidad y qué instrumento sería más apropiado utilizar en cada caso?

2.2.3. Calcular

PISCINA

Se desea construir la piscina de la figura, si tiene 8 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de radio en la entrada. Su profundidad máxima es de 2.5 m y la mínima de 1.4 m, calcular:

- Los metros necesarios para construir una valla.
- Los m^2 de cerámica que se requieren para la obra.
- El volumen de agua necesaria.



2.2.4. Dibujar

Se dice que si uno es capaz de imaginar el problema y dibujarlo se ha resuelto la mitad del problema. Esto es una realidad que induce a que se trabaje con los estudiantes la lectura de problemas, se realicen esquemas, hasta ver el problema.

El dibujo lineal es una parte importante del estudio de la Geometría, por lo que se debe trabajar coordinadamente con el área de Educación Plástica y Visual.

Los diferentes programas que existen de Geometría interactiva proporcionan una herramienta básica para el estudio de la Geometría plana, ya que nos permite dibujar, construir figuras, medir, hasta llegar a la animación.

2.2.5. Relacionar la Geometría con otras áreas

- Números
- Álgebra
- Funciones

CAMPING

A su llegada a un camping, a un grupo de campistas les dan una cuerda de 50 metros de largo y cuatro estacas con las cuales deben marcar un recinto rectangular para su tienda.

- a) ¿Cuál es el área máxima que puede tener la parcela?
- b) ¿Y si colocan la tienda junto al río?

EL LENGUAJE DE FUNCIONES GRÁFICAS. Shell Centre for Mathematical Education. MEC- Universidad del País Vasco.1990.

2.2.6. Usar nuevas tecnologías

El uso de los diferentes programas interactivos de Geometría, permiten:

- Construir figuras
- Resolver problemas
- Relacionar

3. ALGUNOS EJEMPLOS

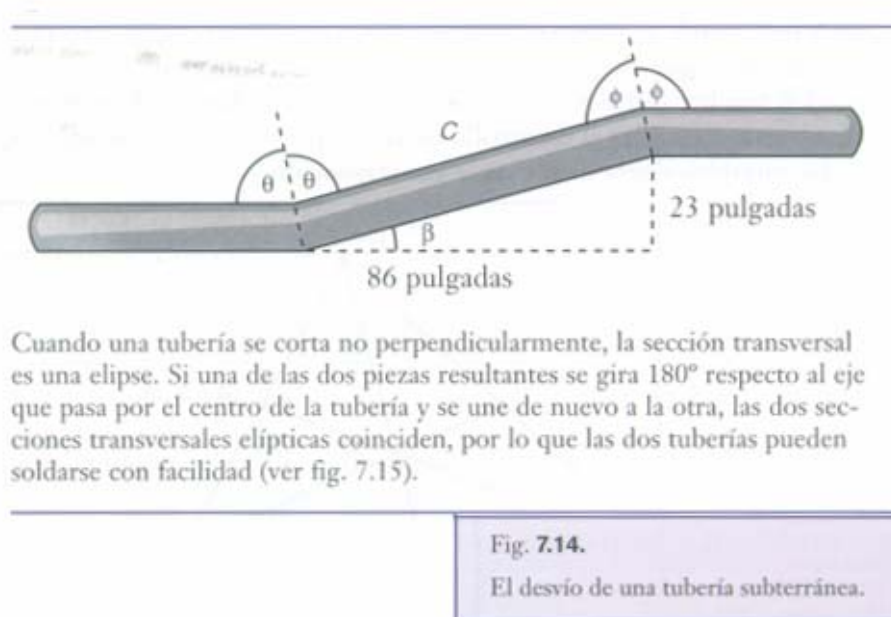
3.1. Principios y Estándares para la Educación Matemática

La NCTM recomienda para la etapa:

- Analizar las características y propiedades de las figuras geométricas de dos y tres dimensiones y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas.
- Localizar y describir relaciones espaciales mediante coordenadas geométricas y otros sistemas de representación
- Aplicar transformaciones y usar la simetría para analizar situaciones matemáticas
- Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica para resolver problemas

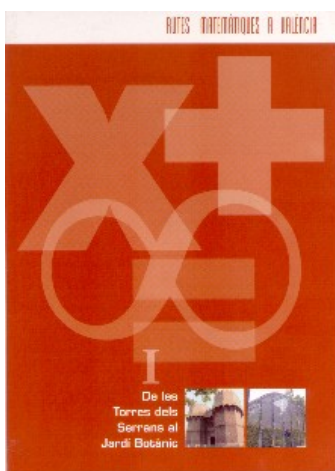
Alguno de sus comentarios para la secundaria son:

- * La geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo, y ver la belleza en sus estructuras
- * Los alumnos pueden generar rápidamente y explorar ejemplos geométricos mediante un programa de geometría dinámica.
- * Las oportunidades para utilizar y comprender la medida surgen de forma natural: de otras áreas de las matemáticas, en las ciencias y en la educación tecnológica.



3.2. Rutas matemáticas

El trabajo de campo que, unido al mejor conocimiento de nuestras poblaciones, permite un trabajo motivador y significativo para el estudiante. Las diferentes “Rutas Matemáticas” proporcionan una herramienta para nuestro trabajo.



<http://www.semcv.org/valencia/Rutes/Rutes.htm> (poner el enlace desde la imagen)

3.2. Concursos

Presento tres materiales que pueden ser de gran utilidad en clase:

- Pruebas de campo en Olimpiadas Matemáticas
- Trabajo de campo, concursos de fotografía
<http://www.ctv.es/USERS/capblanch/es/Fotografia/Bases9c.pdf>
- Calendario Matemático

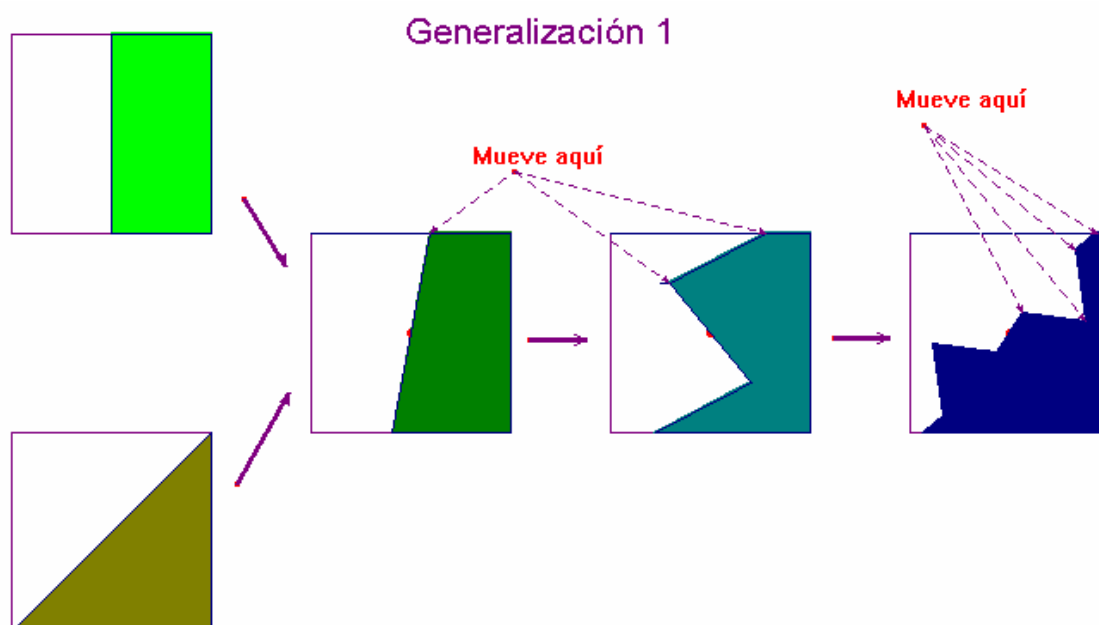
3.3. Construcción del Omnipoliedro

Un proyecto desarrollado por la SEMCV en convenio con el Ayuntamiento de Alicante.

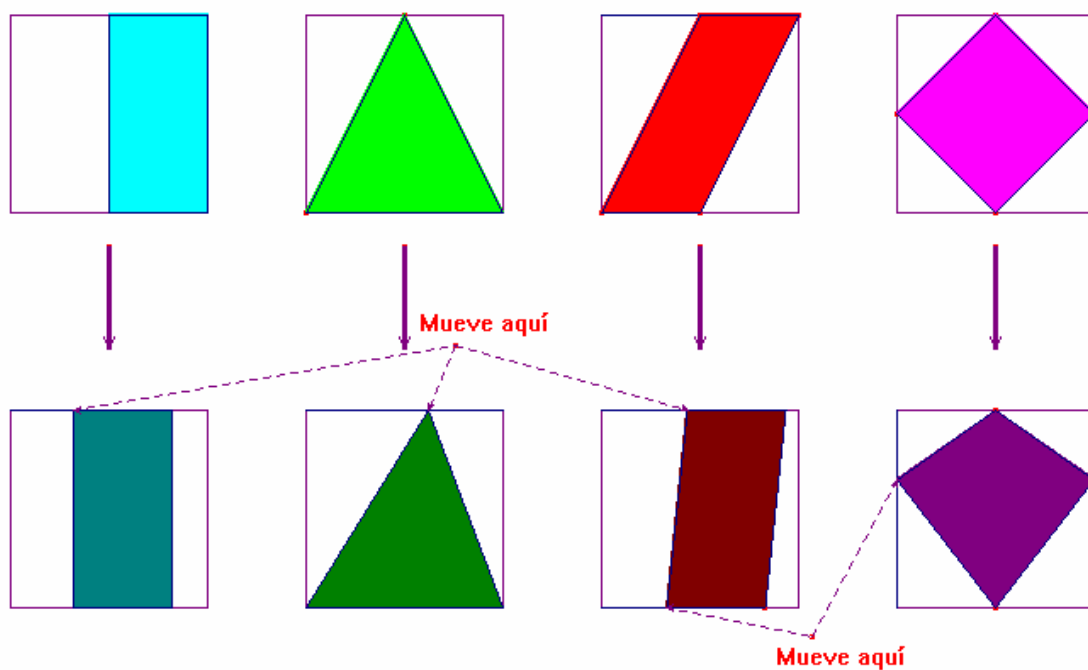


3.4. La mitad del cuadrado

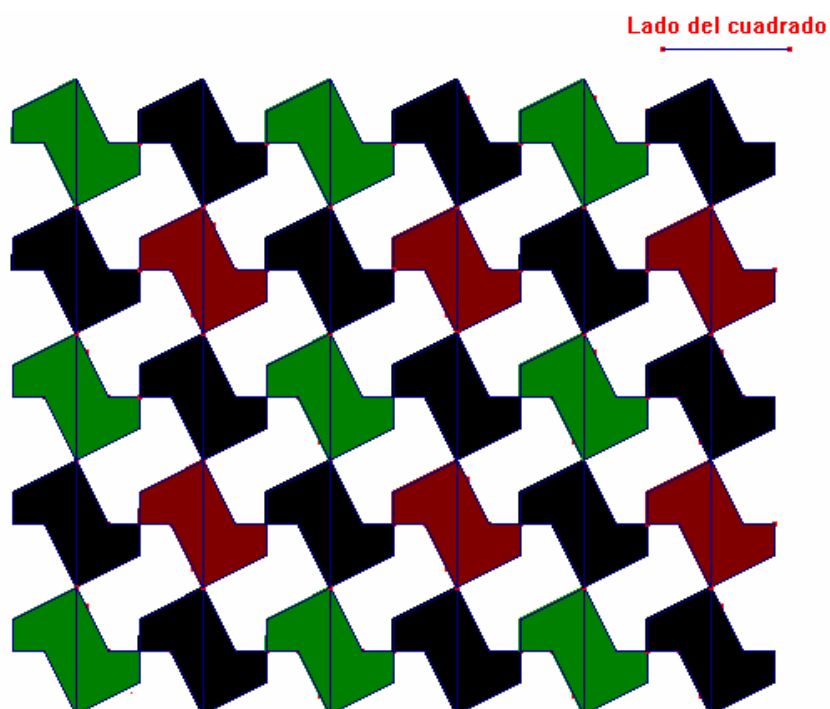
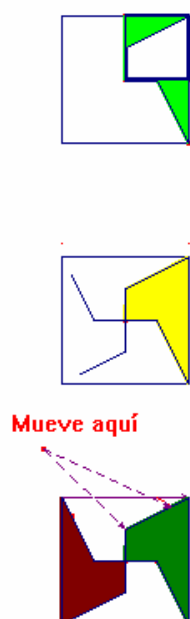
Dividir un cuadrado mediante una recta en dos polígonos iguales.



Generalización 2. Los Polígonos



La mitad del cuadrado



José Antonio Mora. 2002

3.5. Matgrams

**1 Sumas y restas
con números naturales**

✂

PISTA
 Realiza las operaciones y une cada pieza para que coincidan los resultados. Indica el orden en que haces las operaciones.

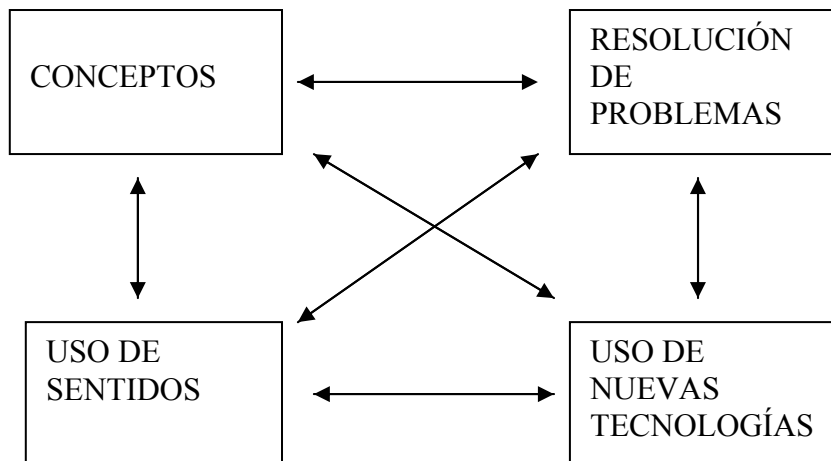
SOLUCIÓN

PUCHALT, L. Matgrams.

4. CONCLUSIONES

- Debe estar presente en todos los cursos de la Secundaria Obligatoria.
- Considerar las conclusiones de la NCTM.
- La Geometría debe ser real: verse, tocarse, imaginarse.
- La Geometría es: describir, estimar, medir, calcular.
- Debe relacionarse con el:
 - Dibujo
 - Números
 - Álgebra
 - Análisis
 - Probabilidad

Todo, a través de problemas geométricos.



5. BIBLIOGRAFÍA

1. GRACIA, F. y ALFONSO, J. **Geometría. Matemáticas 3^{er} Curso. ESO. Actividades para los alumnos y alumnas.** Generalitat Valenciana. 2ª Edición. Quart de Poblet: 1993.
2. GRACIA, F. y RODRIGO, J. **Geometría. Materiales de Matemáticas para 4º Curso ESO.** Generalitat Valenciana. Valencia: 1993.
3. GRACIA, F. **Imágenes.** Colección: 2 Puntos Proyecto Sur de Ediciones S.A.L. Granada: 1995.
4. GRACIA, F. y otros. **Material per treballar Matemàtiques a l'Educació Secundària Obligatoria. (6 vol + CD)** Castellón: 1996-2000.
5. GRACIA, F. y otros. **Estructuras espaciales.** Colección SUMA N° 3. Tandem Edicions. Valencia: 1998.
6. GRACIA, F. y otros. **Matemáticas 3. ALFA.** Vicens Vives. Barcelona. 2002.
7. GRACIA, F. **Percepción e Intuición Espacial.** Revista. UNO. N° 2. Pag. 120-130. Barcelona: 1994.
8. GRACIA, F. **Representación del espacio en el plano.** Revista UNO. N° 4. Pag. 29-40. Barcelona: 1995.
9. GRACIA, F. y otros. **Calendario Matemático.** Ediciones SM. 1996-2005.
10. **PRINCIPIOS Y ESTÁNDARES PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA.** NCTM. SAEM Thales. Granada. 2003

Páginas WEBs

http://www.uv.es/~buso/escher/index_es.html
<http://www.mcescher.com/>
<http://www.editorialmarfil.com/matematica/>
<http://www.fi.uu.nl/en/welcome.html>
http://www.fi.uu.nl/wisweb/welcome_en.html
<http://www.howe-two.com/applets/reflsym/symmetry.html>
<http://www.scienceu.com/geometry/>

CLICK + CLIIICK: FICCIONES Y REALIDADES PARA MIRAR Y VER GEOMETRÍA.

Santiago López Arca

Advertencia preliminar:

Desocupado lector: Los párrafos siguientes son el fruto de un ejercicio de reflexión que tiene como objetivo conseguir el beneficio de disponer del pie que me permita presentar una ponencia en estas XII JAEM. Es decir, constituyen el guión que utilizaré para comentar y completar la parte visual de la disertación. Tal vez, desligados de ella, resulten ser de difícil comprensión; es altamente probable que ni siquiera la confluencia de imágenes y texto lleguen a alcanzar la meta pretendida...

En un lugar de la Mancha...

¿En dónde me encuentro y que hago yo aquí?

Me gustaría empezar tomando conciencia del contexto que me rodea en este preciso instante. La subida del telón de las XII JAEM dejó ante nosotros un escenario generosamente amplio que debe su génesis a la conjunción de múltiples entusiasmos y abundantes horas de trabajo.

¿Y que se representa aquí? El lema motivador que dio origen a los diversos capítulos de esta historia sugiere claramente las intenciones: ***Matemáticas con imaginación para un mundo real***. Y, más concretamente, la sección que nos ocupa ahora mismo reabre en nuestro subconsciente historias que creíamos lejanas: ***“Geometría: La Bella Durmiente. La Geometría ¿sigue olvidada?”***.

¿Qué hago yo por estos parajes? El objetivo de mi ponencia será, pura y llanamente, transmitir la experiencia cotidiana. Esta experiencia consistente en tratar de sobrevivir inmerso en la amalgama de intereses, expectativas y capacidades de los estudiantes con los que cada día me encuentro en Educación Secundaria Obligatoria; diversidad que provoca que lo que debiera ser una simple labor habitual se presente como un verdadero reto a la habilidad para captar la atención del alumnado.

Me veo, pues, hoy por estas latitudes asumiendo la obligación de hilvanar ideas tomadas de entre lo ficticio y lo concreto, lo virtual y lo real, y me asalta la duda de si

será acertado este punto de partida, sugerido por antiguas fantasías, para ser tomado como origen de reflexiones adecuadas a tiempos y a lugares en los que las niñas ya no quieren ser princesas...

La parte más dura: obtener los hilos con los que tejer la historia...

Dar argumentos y manifestar objetivos.

A veces en esta profesión no dedicamos el tiempo suficiente a dejar claras ante el alumnado cuales son las razones que motivan la realización o la omisión de determinadas actuaciones. Nuestros estudiantes merecen que destinemos unos minutos a la explicación de por qué llevamos a cabo unas acciones y desechamos otras. Tratarán de comprender los objetivos que nos proponemos alcanzar; entre los que se encuentran, en relación con la cuestión que nos ocupa, los siguientes:



- Conocer que las matemáticas aportan registros de lenguaje que nos ayudarán a comunicarnos de forma clara, concisa y rigurosa.
- Reconocer el entorno en el que nos movemos como diverso y susceptible de ser explicado desde diferentes puntos de vista.
- Saber emplear y valorar con sentido crítico los recursos tecnológicos, aprovechando las ayudas que puedan ofrecernos y procurando no depender en exceso de ellos.
- Utilizar y aplicar los conocimientos geométricos para analizar y comprender las parcelas concretas y abstractas que conforman nuestra realidad cotidiana.
- Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que debemos adquirir para poder interpretar todos los aspectos (científicos, tecnológicos, sociales, estéticos, laborales...) que determinan nuestra forma de actuar como ciudadanos.
- ...

Tomar el pulso a la situación... ¿con el ánimo de poder reconducirla?

En la actualidad somos bastantes profesoras y profesores los que solemos realizar actividades encaminadas a determinar el nivel del alumnado cuando comenzamos un nuevo tema o bloque. Es frecuente que, después de estas valoraciones de diagnóstico inicial, todos acabemos acercándonos a la siguiente conclusión global: “Los alumnos y alumnas nos llegan muy mal”. Este es el sino de la mayoría del alumnado actual, “llegar mal”. Bueno sería, por lo tanto, que nos detuviéramos en algún lugar del camino para, de vez en cuando, tratar de evaluar el proceso y sopesar si realmente estamos consiguiendo logros significativos.

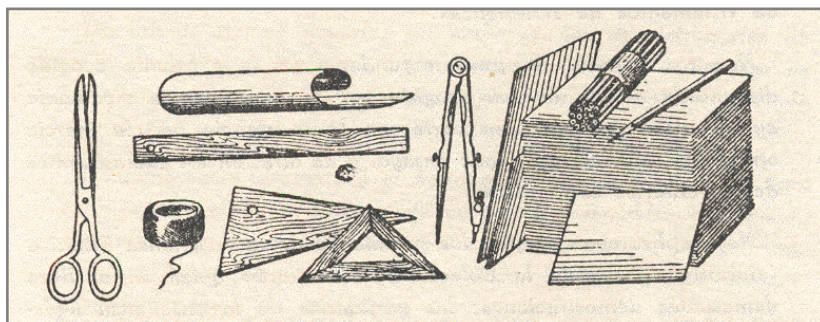
Asumir que la mayor parte del problema descansa en la falta de interés o en la escasa motivación del alumnado, equivale a querer disponer de una respuesta-solución excesivamente simplista. Sin pretender entrar ahora en las importantes cuestiones que afectan a la sociedad actual y, por ende, al mundo educativo (desestructuración familiar, inmigración, peculiaridades del mercado laboral...) no podemos olvidarnos de otros parámetros, sin duda de rango inferior, que constituyen verdaderos vicios del sistema escolar contra los que cada día debemos luchar:

- La rigidez en los puntos de vista.
- La sobredosis teórica.
- Suponer que el alumnado posee destrezas e incluso domina técnicas que escasamente nos hemos dedicado a potenciar.
- Las ideas erróneas preconcebidas.
- Lo que creemos transmitir frente a lo que nuestros alumnos asimilan o interiorizan.
- Las ingerencias en el campo profesional.
- ...

Aprovechar enseñanzas y legados valiosos.

Los que tenemos por profesión el ejercicio de la docencia en la franja de educación secundaria debemos ser especialmente cuidadosos con dos facetas que inciden de forma directa en nuestro trabajo: velar de forma continua por nuestra (auto)formación/información y adiestrarnos en el manejo básico de los recursos.

Puestos en disposición de incorporar a nuestro quehacer diario metodologías que otros ya certificaron como valiosas, permítaseme transcribir aquí textualmente parte del prólogo con el que *Julio Rey Pastor* y *Pedro Puig Adam* abren la primera edición de sus *“Elementos de Geometría”*. Bajo el epígrafe *“Dos palabras para los chicos”*, se puede leer lo siguiente:



Aquí te presentamos, lector querido, a los que han de ser durante este curso tus compañeros de trabajo: unas tijeras, un ovillo de hilo, una regla, un par de escuadras, un compás, un rollo de papel de calco, unos cartones, un paquete de lápices y un montón muy grande de hojas de papel.

Ni un solo día debes empezar la lección de Geometría sin tener al lado estos tus buenos compañeros, ni terminar de estudiarla sin dejar tu mesa materialmente llena de recortes y de papeles con figuras.

Si alguna vez el libro te hace pensar, no lo desdén, pues es entonces precisamente cuando mayores beneficios te proporciona. La Geometría empezó

siendo casi un juego y ha resultado, andando el tiempo, el edificio racional más hermoso y perfecto que ha construido el pensamiento humano.

Conclusiones e ideas importantes son las que podemos obtener de la lectura de estos párrafos y otros similares. Hagamos relación de las que se nos ocurren en este momento:

- A la hora de trabajar en geometría es fundamental que el alumnado adopte un papel especialmente activo puesto que la observación y la manipulación adquieren una importancia fundamental.
- Existen materiales, instrumentos y recursos clásicos que debemos utilizar (a veces son insustituibles o imprescindibles), puesto que de su empleo depende grandemente la consecución de los objetivos perseguidos.
- No debemos menospreciar las posibles virtudes de utensilios cotidianos (envases, planos, instrumentos de medida...) ni el abanico de oportunidades que ofrece el propio entorno y la realidad de cada día.
- Debemos aprovechar las prestaciones ofrecidas por los recursos actuales, tanto en lo que se refiere a nuevos materiales como a ayudas tecnológicas.
- No podemos renunciar a la abstracción, a la importancia del pensamiento lógico, a la formalización, a la generalización...

Click + cliiick: Ficciones y realidades para mirar y ver geometría.



Utilizar la estrategia (la estratagema, quizá) de echar mano de herramientas que en la actualidad ejercen una mayor atracción sobre la población con la que trabajamos, facilitará que, junto con ellas, podamos hacer uso de otras más tradicionales. Combinar posibilidades informáticas (click) e imágenes de la vida diaria (cliiick) con otros recursos escolares pueden ayudarnos a que cuando nuestros alumnos miren en esa conjunción de mundos virtuales y reales en la que nos encontramos más o menos inmersos, lleguen a ver, admirar e imaginar geometría.

La fuerza de lo local y lo cotidiano.

A veces desaprovechamos las posibilidades de aquello que nos es más cercano. Es probable que en alguna clase de GEOMETRÍA hayamos mencionado al planeta Tierra cuando definimos lo que es una zona esférica, una cuña esférica, un huso o un casquete; tal vez hemos hablado de coordenadas geográficas, pero es igualmente posible no haber reservado ni un segundo para destacar las características de nuestro caso particular. No es rentable pasar por alto los ejemplos que son próximos al alumnado pues, a través de ellos, los conceptos teóricos adquieren mucha mayor significación.



Sería una rara casualidad que el territorio en el que nos movemos habitualmente mis alumnos y yo (latitud norte: $43^{\circ} 20' - 43^{\circ} 24'$; longitud oeste: $8^{\circ} 22' - 8^{\circ} 28'$. Es decir, la ciudad de A Coruña) fuese especialmente prolífico en ejemplos matemáticos. Sin embargo, estamos literalmente rodeados (¿o será que intentamos autoadiestrarnos para verlos?). Algunos de nuestros lugares y monumentos más emblemáticos (Torre de Hércules, Milenium, Torre de Control Marítimo...) son fantásticos ejemplos para tomarlos en consideración a la hora de estudiar geometría.

Exagerando ahora la pasión localista, hagamos una sucinta mención, a modo de homenaje, a nuestro importante (y poco conocido en España) matemático local y a parte de su obra relacionada con geometría:

Juan Jacobo Durán Loriga (A Coruña, 1854-1911). Los matemáticos europeos de su tiempo le tuvieron en gran consideración. Colaboró en múltiples revistas y publicaciones matemáticas. Fue miembro de diversas academias y sociedades matemáticas españolas y extranjeras.



Alguno de sus trabajos publicados: *Tres capítulos de geometría superior*, *Nota sobre el triángulo*, *Breve nota matemática sobre el triángulo*, *Sobre la potencia del triángulo*, *Sur les cercles radicaux*, *Seconde note sur les cercles radicaux et anti-radicaux*, *Notes de Geometrie*, *Sur les cercles remarquables du triangle*, *Sur les triangles isogonologiques*, *Notas de Geometría*,...

En el primer número de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1911) aparece un artículo suyo: ¡*Sursum Corda!*

Hacer uso de lo local no es equivale a ceñirse únicamente a lo que nos es próximo. La mayoría de las veces los puntos de partida tomados de lo cotidiano nos llevarán hasta abstracciones y generalizaciones de cierto calado. Bastantes veces hemos iniciado una sesión proyectando como primera diapositiva la Torre de Hércules, para seguir hablando de poliedros regulares y concluir con Platón y su teoría de los elementos que forman el universo.

La importancia de la manipulación y la experimentación.

En educación secundaria obligatoria lo tangible adquiere una significación especial. Bueno será (prosiguiendo con el ejemplo de los poliedros regulares), que antes de mencionar a Platón, las alumnas y alumnos hayan podido manipular materiales adecuados para alcanzar convencimientos y conclusiones. Constatar que realmente sólo se pueden construir cinco sólidos platónicos o



tomar conciencia de sus elementos característicos y propiedades básicas será asimilado más fácilmente por el alumnado a partir de la manipulación.

En el IES Ramón Otero Pedrayo de A Coruña tenemos la suerte de contar en la actualidad con un aula-taller de matemáticas que nos permite realizar actividades que serían difíciles de llevar a cabo en las aulas de los grupos correspondientes.



A veces (haciendo bueno el dicho aquel de “*es preferible que la inspiración le pille a uno trabajando*”) nos encontramos con verdaderas sorpresas. Por ejemplo, al construir poliedros utilizando únicamente polígonos regulares, el profesor Gonzalo Temperán Becerra ha constatado con sus alumnos que el número de bipirámides, poliedros regulares, deltaedros y poliedros semirregulares son, respectivamente, 3, 5, 8 y 13. Es decir, cuatro términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Las ayudas de la tecnología.

Las recompensas que se alcanzan teniendo un conocimiento básico de algunas aplicaciones informáticas son de difícil consecución sin esas ayudas. Es claro que a la hora de trabajar en geometría, los beneficios que podemos obtener nos sirven para atacar en varios frentes:

- El diseño de gráficos y la representación de modelos.
- La comprobación de conjeturas y la verificación de hipótesis.
- La búsqueda de información y su contraste.
- El adiestramiento en métodos de investigación.
- La solución a problemas de la vida real.
- La flexibilidad en las presentaciones.



Debemos ser conscientes de que, si tomamos partido por un aprovechamiento eficaz de las ayudas tecnológicas, no podemos descuidar aquellos extremos que pueden pensarse obvios: la programación de las actuaciones por parte del profesorado, adecuando los tiempos de dedicación a cada tema y asegurándose la disponibilidad de los espacios y los medios que se van a necesitar en cada momento para llevar a cabo las tareas pretendidas.

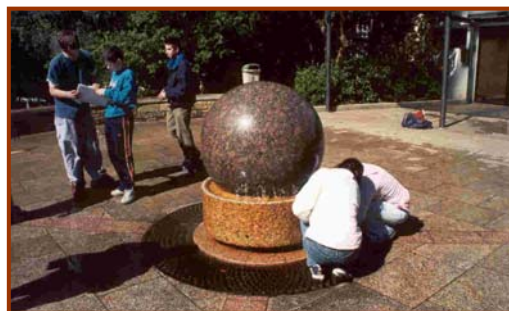
Reforzar lo virtual con lo real (y viceversa).

Tomar la propia ciudad como un pretexto motivador suele dar excelentes resultados. La localización de elementos urbanos, el análisis de edificaciones singulares junto a la consideración de cuales son sus utilidades o funciones (si su razón de ser es por un interés práctico, puramente ornamental, conmemorativo,...) permiten despertar,

además de la atención del alumnado, otros sentimientos y su relación con las matemáticas: estéticos, de solidaridad, de urbanidad...

A Coruña vista con ojo matemático o *Matemáticas a partir de un cliiick* son dos ejemplos de actividades que giran sobre los ejes de ciudad y matemáticas y que han involucrado al alumnado y profesorado del IES Ramón Otero Pedrayo. Para llevarlas a cabo hemos capturado algunas de las imágenes que dibujan nuestra vida cotidiana y las hemos analizado bajo una óptica matemática.

Otras veces utilizamos “al revés” nuestra idea de ligar teoría y realidad: Trasladamos el aula a la calle para aprovechar las posibilidades del exterior. Allí constatamos que la teoría se hace útil y que nuestros conocimientos se pueden complementar con una visión más diáfana y significativa de la realidad que nos rodea.



Investigar y divulgar en ESO.

En algunas ocasiones, durante el transcurso de las clases, surgen pretextos que pueden transformarse en magníficas oportunidades que nos permiten acceder a parcelas de conocimiento que, en principio, no pretendíamos explorar. Por otra parte, no será nunca excesiva la precaución de tener meditada y disponible una colección de recursos de los que podamos echar mano en un momento dado.

Si nos empeñamos, puede ser la Educación Secundaria Obligatoria un excelente momento para iniciar al alumnado (digamos mejor, a determinadas alumnas y alumnos) en técnicas que les resulten valiosas en su vida futura como estudiantes. Nos encontraremos en el tiempo apropiado para dar pautas e iniciar métodos relacionados con la búsqueda de información y la redacción de conclusiones sobre aquellas cuestiones que tengamos la habilidad de proponer.



Sirvan los errores que nosotros hemos cometido a la hora de proponer a nuestros alumnos la acometida de tareas encaminadas a la ampliación de conocimientos en un tema determinado, para disculpar la carga de obviedad que pudiera desprender la pequeña relación de normas que se mencionan a continuación:

- En principio, los alumnos y alumnas de ESO no disponen de pautas que les permitan llevar a cabo trabajos de investigación.
- Las propuestas que se hagan estarán concebidas para ser ejecutadas individualmente. Los trabajos en equipo sólo son viables cuando se realizan en horario lectivo y utilizando los recursos disponibles en el centro.

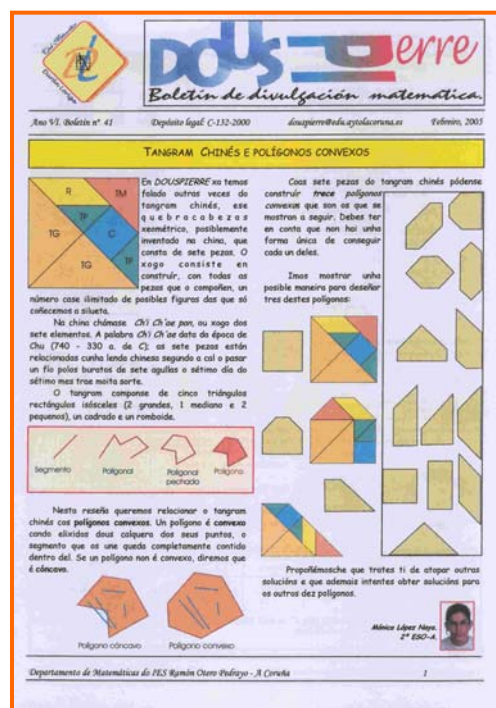
- Aunque a veces propondremos trabajos de título común para todo el alumnado, se obtienen mejores resultados con opciones individualizadas.
- Podemos aprovechar un mismo tema para que sea realizado por estudiantes de distintos niveles o desde diferentes puntos de vista.
- Debemos constatar cuales son los medios de los que puede disponer el alumno afectado.
- El profesorado debe tener clara la medida de su dominio sobre los temas que propone, que sugerencias debe hacer, que material puede aportar...
- Debemos fijar los plazos de realización y marcar fechas intermedias de control e intercambio de informaciones antes de dar luz verde a la redacción final del trabajo.
- Por regla general, a los alumnos les agrada que se difundan sus aportaciones.

¿Qué queremos decir con esta última observación? Lógicamente, lo mejor que le puede pasar a un trabajo de investigación es que sea publicado. De igual forma, y salvando las evidentes distancias, los trabajos escolares adquieren una mayor significación para sus autores si se colocan en algún escaparate.

En el IES Ramón Otero Pedrayo de A Coruña disponemos de una herramienta que nos está dando excelentes resultados, se denomina **DOUSPIERRE** (es decir, $2\pi r$). *Douspierre* es nuestro boletín de divulgación matemática y procuramos que se mantenga en forma desde que su primer número vio la luz, allá por enero de 2000 (cuando celebramos el Año Mundial de las Matemáticas). Su presencia física es modesta: las cuatro páginas que nos proporciona una hoja Din-A3 al ser doblada. Nuestra pretensión inicial de presentar un mínimo de dos números al trimestre se está cumpliendo puesto que hemos cerrado este curso editando el número 46.

Muchos de los trabajos escolares que proponemos son realizados con la finalidad de aparecer en las páginas del boletín y este pretexto nos sirve para que alumnos y alumnas pongan más empeño en su realización. A lo largo de los números que llevamos publicados hemos tocado muchas facetas y temas matemáticos; queremos resaltar aquí que nuestra ciudad nos ha facilitado (y nos seguirá ofreciendo) multitud de oportunidades para ser tratadas bajo la óptica de las matemáticas en general y de la geometría en particular.

En la actualidad, se pueden consultar números de *Douspierre* (a partir del número 13) pulsando en el enlace [A lagarada \(IPM Tools\)](http://cce.peda.net/magazines/galego/) que se encuentra en la siguiente dirección electrónica: <http://cce.peda.net/magazines/galego/>.



Despedida y cierre.

Comenzaba este escrito dejando clara mi intención de poner en orden algunas ideas, relacionadas con la enseñanza de la geometría, emanadas de la propia experiencia como docente en Educación Secundaria.

Si sucediese la extraña coincidencia de que quién leyera este párrafo haya asistido a la presentación “en vivo” de esta ponencia, le pido que sea benevolente y sepa disculpar los apartados que considere improcedentes al tiempo que reciba mi más sincera gratitud.

Sirva para mi descargo que he iniciado esta redacción con una *advertencia preliminar* que, por cierto, tomaba prestadas *dos* palabras de Miguel de Cervantes. Puesto que hemos comenzado con palabras de uno de los más grandes literatos de todos los tiempos, hagamos uso ahora de una famosa frase pronunciada por uno de los más brillantes matemáticos actuales, Andrew Wiles: “*Creo que lo dejaré aquí*”.

EL SUEÑO DE LA GEOMETRÍA

*Manuel Pazos Crespo
IES Eusebio da Guarda (A Coruña)*

*El profesor no es el saber, sino un mediador del
saber: sabe buscarlo donde se encuentra, en las
mejores condiciones posibles.*

Francesco Tonucci

Hace tiempo, mucho tiempo que conozco a Lolo. Hoy es mi amigo. En su niñez intentaron enseñarle matemáticas cuando por su casa no pasaba ningún tren.

Lolo, a veces, oía el tren pero no lo veía... Esperaba poder verlo alguna vez, pero de verdad. La primera vez que es consciente de ver un tren fue cuando su madre le compró el segundo manuscrito, “El Europa”, que siempre guardó y todavía guarda con tanto mimo. El tren lo oía pitar en los días de primavera; cuando el viento venía del sur el silbo llegaba nítidamente hasta su casa, camino de Finisterre. El tren siempre le atraía. Iba con su madre a Coruña y, en la estación, él le preguntaba porque se juntaban las vías allá, lejos. “Non se xuntan, Lolo - le decía ella -, non sexas tontiño, por onde ían ir senón as rodas do tren?”

Lolo, según me contó, vivía con sus padres en una aldea de Galicia y en su contacto con el medio aprendió a observar las muchas formas de la naturaleza y esto le provocó una cantidad de vivencias y experiencias muy ricas. La escuela más cercana estaba a unos dos kilómetros, campo y monte a través, y sus padres decidieron que ellos le enseñarían a leer y las casi cuatro reglas, además de proporcionarle tebeos del Capitán Trueno, El Jabato, Hazañas Bélicas, Roberto Alcázar y Pedrín o Milton el Corsario ...

La madre de Lolo tenía un taller de costura al que acudían chicas y adolescentes a aprender a manejar la aguja y el dedal. Cada vez que llegaba una aprendiz nueva Lolo estaba preparado con un trozo de fieltro, a ser posible de color fuerte, para recortarlo en forma de cuadrado o de rectángulo, con las tijeras, según pudiese aprovecharlo mejor, y coserlo en la vieja Singer para, luego, llenarlo de serrín y rematarlo a mano con hilo y aguja. Sin darse cuenta pasaba de 2D a 3D. Evidentemente estamos hablando de un acerico o alfiletero. La mayor parte de ellos partían de un rectángulo o de dos cuadrados. Le vendrá de ahí su pasión por el tangram?

Lolo comenzó a ir a la escuela a los 9 años; su madre le enseñó a leer, a escribir, a sumar, a restar y a multiplicar... lo de dividir ya era mucho para ella. Su padre se

ocupaba más de la parte de juegos, como el tres en raya, por ejemplo. Era una persona feliz.

Más adelante, casi sin darse cuenta, Lolo se dedicó al mundo de la enseñanza y, cuando se vió con semejante cantidad de gente menuda delante, se acordó de su niñez y de la importancia de sentirse querido en casa; se le quedó grabada la idea de que a las personas, sea cual sea su edad, para que puedan construir su conocimiento, también el matemático, es preciso tratarlas como tales, respetarlas y facilitarles su aprendizaje en función de lo que cada una puede aprender, porque la exigencia del trabajo bien hecho no debe ser algo contrapuesto al cariño, al respeto y a disfrutar con lo que se hace.

También a mí me parece, como a él, que la enseñanza de las matemáticas, cuando menos, debe ir en tren, modelo AVE, cargado de afecto y de entusiasmo.

Lolo y yo nos vemos con cierta frecuencia y casi siempre me cuenta algunas anécdotas de sus clases recibidas e impartidas, de su manera de ver las matemáticas y la geometría, claro. Recuerdo alguno de los casos más recientes que me contó.

Caso 1. Lolo hace 3º de bachiller.

Lolo ya había estudiado las ecuaciones de 1º grado y también la proporcionalidad. Según él dice, la primera vez que tuvo libros en technicolor fue en 3º de bachiller. El libro de matemáticas, era uno de los que más le gustaba; también los dos de latín (el de Métodos y el de Gramática). Aún hace un par de años, más o menos, me declinó bellum, i en singular y en plural, y de un modo nada neutro por cierto, mientras hablábamos del Tigris y del Eufrates.

Pues bien, me contaba que cuando le explicaron el Teorema de Pitágoras lo había entendido bastante bien y que, incluso, lo sabía aplicar en los problemas que le proponían para ver si una regla de una longitud determinada cabía o no en un cajón de una mesa. A él le parecía que era mejor experimentar con la regla en el cajón... pero como no tenía ni cajón, ni regla y además le gustaba hacer la raíz cuadrada pues obedecía al maestro gustosamente y también por la cuenta que le traía.

Pero cuando llegó a estudiar aquellos teoremas del cateto y de la altura no había manera de poder entenderlos. Le hablaban de proyecciones y él no sabía lo que quería decir eso; le hablaban de que en un triángulo rectángulo... no sé que pasaba y no veía triángulo rectángulo alguno. Nunca había visto un triángulo rectángulo acostado. A él aquello le parecía poco serio ya que los triángulos rectángulos tenían que estar sobre un cateto, de pié; olvidémonos del tamaño del pié pero tenían que estar de pié.

Además le decían que se formaba una proporción continua... y él no se acordaba de que nadie le dijera que una proporción se llamaba así y por qué. Terminó diciéndome que los problemas los hacía correctamente. Incluso el profe le había dado sobresaliente en matemáticas pero cuando llegó a entender la mayoría de las cosas ya se afeitaba.

Yo le comento que es duro prescindir de la tiza y que, a veces, es necesaria pero, seguramente, no debe ser hoy el material básico y único en el proceso de aprender y enseñar matemáticas. Exagerando un poco, y del mismo modo que la Física de la tiza, fue relevada por la Física experimental habría que ir haciendo lo mismo, en la mayor parte de la enseñanza obligatoria, con la matemática de la tiza y pasar a la matemática de la acción, de la acción concreta, con materiales manipulativos, para poder verbalizar,

representar, volver a verbalizar, simbolizar, re-volver a verbalizar... para ir construyendo el conocimiento matemático que no tiene porque ser un compartimento estanco. No debemos olvidar que las matemáticas solas y puras solo se dan en las clases de matemáticas. En el mundo mundial están mezcladas con todo lo existente, están contextualizadas.

Como dice Emma Castellnuovo, es necesario recurrir al objeto y a la acción si se quiere que la enseñanza de la geometría intuitiva tenga un carácter constructivo y sea formativa.

Pero no nos vayamos a olvidar del triángulo rectángulo porque sigue teniendo importancia. Si un niño o una niña coge un triángulo de cualquier material, del que sea, siempre lo reconocerá como triángulo, independientemente de la posición que ocupe en el plano o el espacio. Para eso, desde hace tiempo, hay materiales como son el tangram, los mecanos, geoplanos, mosaicos, etc que son de una ayuda enorme en el aula... Y para calcular la raíz cuadrada... utilizamos la calculadora... aunque que sea con tecla de la raíz cuadrada estropeada.

Decía Jean Piaget, y pienso que con mucha razón:

Todo lo que le enseñemos a nuestro alumnos estamos prohibiéndoles que lo aprendan

Caso 2. Lolo ejerce como maestro en un puerto de mar y, más tarde, en un medio rural.

Después de un año como provisional en una de las muchas escuelas unitarias de su tierra, Lolo obtuvo su primer destino definitivo en un precioso pueblo da Costa da Morte. Allí se dio cuenta de que tenía que buscarse la vida y encontrarle un sentido práctico a lo que hacía, concretamente en Matemáticas. Fue su despertar y su rechazo al fichismo de la época de los setenta. En estos inolvidables destinos aprendió de sus compañeros y compañeras casi todo lo que no le enseñaron en donde correspondía. Entró en contacto con personas preocupadas también por mejorar su manera de hacer y por comunicárselo a los demás y compartir sus preocupaciones.

De este modo fueron apareciendo entre sus materiales, ¡los bloques lógicos!, los geoplanos, los mecanos, el libro “El material para la enseñanza de las matemáticas”, revistas como Cacumen, etc. En cualquier caso la Geometría, me decía Lolo, la seguía dejando para la última parte del curso y no siempre la relacionaba con los demás contenidos ni con las demás áreas.

Caso 2.1. Lolo se lía con el tangram y con los sólidos platónicos.

Aún en la década de los ochenta, me decía, esperaba al último trimestre para hacer geometría. Pero ya coseguía trabajar en 3D y en 2D pasando en cada momento de una a otra, aunque con algunos fallos que cometía cuando les proponía a los alumnos estas actividades.

En 2D utilizaba materiales como el tangram, sobre todo el chino, pero tambien el de Fletcher, el pitagórico, el triangular, el de Loyd, el “de huevo”, ... y geoplanos, y mosaicos, y minós, etc.

A la vez que realizaba este tipo de actividades Lolo se iba informando e intentaba buscar puntos de apoyo que fundamentasen todas estas tareas tan divertidas, eficaces y gratificantes para él y para sus alumnos ... y también más laboriosas, porque cada vez le llevaba más tiempo preparar sus clases... y siempre cargando con bolsas de materiales...

Era consciente de la importancia de determinadas actividades que seguramente habría que ver y de las que encontró información en determinadas revistas extranjeras sobre:

- El papel que desempeñan las imágenes y la visualización espacial en la clase de matemáticas, y
- Cómo se puede relacionar la visualización espacial con el aprendizaje de las matemáticas.

Afortunadamente en los procesos de enseñar y aprender, cada vez más, nos acercamos a la construcción de figuras y al estudio de sus relaciones, dejando al margen el concepto de matemáticas como una colección de hechos y de procedimientos.

A la construcción de figuras y formas y al estudio de sus relaciones es a lo que se conoce como **sentido espacial**. En general, se entiende por sentido espacial a todo aquello que tiene que ver con términos como visualización espacial, razonamiento espacial, percepción espacial, imágenes visuales, rotaciones mentales, etc. Algo que está claro es que cuando hablamos de sentido espacial nos referimos a imágenes.

Algunos casos en los que se considera útil el sentido espacial son los siguientes:

a) Comparación de dos figuras orientadas de distinta manera:

Si rotamos mentalmente una de ellas, ya sea por giro en el plano o por abatimiento, la comparación parece más fácil; pueden ser dos romboides girados o abatidos, por ejemplo.

b) Reconocimiento de la simetría de algunas figuras:

Podemos considerar figuras sencillas como un cuadrado, una cometa o un hexágono.

c) Variación de formas por cambio en la medida de lados, ángulos, etc.

En este caso podemos establecer variaciones cuadrado/ rombo o rectángulo/ romboide.

d) Realización de un diagrama para ver mejor la resolución de un problema.

Diagrama en árbol, diagrama de problemas típicos de animales de dos y cuatro patas

e) Colocación relativa de dos líneas con un punto común, cuando se trata de ángulos.

Entendido de este modo parece que el sentido espacial desempeña un papel importante en el razonamiento matemático.

Moses (1982), sostiene que “la habilidad para transformar y comparar imágenes mentales está íntimamente relacionada con el éxito en el cálculo integral. El sentido espacial es tan útil en el aspecto numérico como en el geométrico”.

De la misma manera que los segmentos pueden formar figuras geométricas, los números pueden formar figuras numéricas, porque el establecimiento de relaciones matemáticas generales lleva consigo algún tipo de construcción de imágenes.

Las imágenes son verdaderamente valiosas para establecer relaciones nuevas y resolver problemas que no sean rutinarios.

Puede ocurrir que algunas ideas matemáticas lleguen a hacérsenos muy familiares y es posible que tengamos muy desarrollado nuestro propio método didáctico labrado a lo largo de nuestros años de ejercicio y que nos permite realizar operaciones de un modo verdaderamente eficaz. Pues bien, aún así, en un principio tenemos la necesidad de comprender las relaciones y, al querer dominar el sentido espacial, implica que centremos en él toda nuestra atención.

La reflexión sobre la actividad matemática pone de manifiesto que hay una importante interacción entre las imágenes y el análisis. Brumby (1982), sostiene que el razonamiento espacial y el analítico tienen papeles complementarios en el pensamiento matemático y cuando se acentúa uno de ellos, no por ello disminuye el otro.

Así, por ejemplo, un diagrama sería probablemente útil para resolver el conocido problema de las personas que se pueden sentar alrededor de una mesa de forma rectangular juntando mesas cuadradas.

“Tenemos mesas cuadradas que, juntas por un lado, forman un rectángulo. Si, sentándose una frente a otra, caben 10 personas alrededor de toda la forma rectangular, ¿cuántas mesas cuadradas se precisan?”

Parece claro que para concebir el diagrama y, por tanto, el dibujo, necesitamos imágenes. Pues bien, la solución de muchos problemas matemáticos, al igual que ocurre con éste, necesita tanto de las imágenes como de los procedimientos y de la lógica.

Después de todo lo dicho y de todas las lecturas realizadas, Lolo tiene bastante claro que parece importante el dar a todos los alumnos una oportunidad para desarrollar su sentido espacial.

¿Cómo?

Empleando tangrams, minós (dominós, triminós, tetraminós, pentominós, ...), teselaciones, ... Dibujando y discutiendo sobre formas geométricas, construyendo y comparando figuras tridimensionales, ... Son algunos ejemplos de actividades adecuadas que se debe intentar introducir a lo largo de todo el currículum, porque la “habilidad mental” para rotar, girar, y comparar imágenes de figuras geométricas se puede mejorar con un buen diseño de actividades en un amplio abanico de situaciones.

A la vez que se dice todo esto hay que reconocer la enorme dificultad que conlleva la tarea de concienciar, construir y evaluar el sentido espacial... cuando todavía en algunas aulas hay vestigios de que la memorización de hechos y las destrezas de cálculo de lápiz y papel son objetivos prioritarios.

Pero, cada vez menos en los primeros niveles, la geometría tiende a centrarse en nombrar simplemente e identificar las figuras geométricas. Cada vez son más los libros de texto que introducen actividades espaciales y es una evidencia de que el sentido espacial se considera importante en las matemáticas elementales. Seguramente todavía no es suficiente lo que se hace pero tenemos que ser optimistas y a medida que vaya apareciendo en los criterios de evaluación provocará un tratamiento más profundo del mismo. No podemos olvidar que la evaluación condiciona los contenidos y, a veces, también la manera de hacer las cosas.

Aunque sólo sea brevemente parece interesante citar y ejemplificar sobre las principales habilidades de percepción espacial (Hoffer, 1977) de considerable importancia en el estudio de la Geometría.

1. Coordinación visual:

Habilidad para coordinar la visión con el movimiento del cuerpo.

La coordinación visual se desarrolla con:

- 1.1. La actividad diaria: vestirse, sentarse a la mesa, pasear, cortar ...
- 1.2. Seguir un camino entre líneas: rectas, curvas, quebradas con ángulos. Trazar figuras o pintar regiones.
- 1.3. Dibujar (copiando) líneas verticales, horizontales, oblicuas o curvas en tramas cuadradas. Al alumnado le resulta más fácil realizar las tramas horizontales o verticales que las oblicuas.

2. Percepción de figuras planas:

Acto visual que permite identificar una componente específica en una situación compleja. Esta habilidad, a veces, se describe como la distinción entre el primer plano y el fondo.

La percepción de figuras planas se desarrolla con actividades geométricas tipo:

- 1.1. Identificar una figura entre un conjunto de figuras traslapadas (una figura escondida entre otras).
- 1.2. Completar una figura.
- 1.3. Reconponer las partes de una figura (actividades típicas con el tangram).

3. Constancia perceptiva o permanencia de la forma:

Implica el reconocimiento de figuras geométricas cuando cambian de tamaño, color, textura, posición en el espacio o cuando están mezcladas con otras figuras geométricas semejantes.

La constancia perceptiva fue empleada por Piaget e Inhelder (1956) cuando se referían a la forma y al tamaño de los objetos. Vurpillot (1976) ilustra la constancia perceptiva con el ejemplo de un cuadrado colocado (1º) sobre un lado y (2º) sobre un vértice, tipo “rombo”.

La constancia perceptiva nos ayuda a ajustarnos al medio en que vivimos.

Así, por ejemplo, cuando vemos una cancha rectangular, de basket o de cualquier otro deporte, nos damos cuenta de que es un rectángulo aunque difícilmente la vemos como tal. La mayor parte de las veces la vemos como un romboide o un trapecio aunque nuestra percepción nos indique que es un rectángulo.

Las actividades geométricas que ayudan a desarrollar la constancia perceptiva son, fundamentalmente, del tipo:

- Identificar figuras que tienen la misma forma pero distinto tamaño.
- Ordenar objetos según su tamaño. Por ejemplo de más a menos largo.
- Identificar figuras que tienen la misma forma y tamaño.

4. Percepción de posición espacial

Habilidad para relacionar un objeto en el espacio consigo mismo.

Los niños son el centro del universo y perciben objetos delante, detrás, fuera, dentro, alrededor, etc.

Un niño con dificultades en la percepción de posición espacial corre el riesgo de tener problemas con la lectura (inversión de letras) y también problemas correspondientes la interpretación de representaciones geométricas y a la ordenación aritmética (Frostig y Horne, 1964).

Las actividades que desarrollan la percepción de posición espacial son aquellas que se refieren a la discriminación de inversiones y a la rotación de figuras. Actividades con pes, bes, qus, des, por ejemplo.

Los profesores deberíamos insistir en que los alumnos entiendan con claridad lo que significa “lo mismo”. Para la percepción de posición espacial significa “coincidente y con la misma orientación”.

Cuando se habla de discriminación visual, “lo mismo”, se llama “coincidente” (congruente), esto es, figuras que son una imagen de la otra pero para hacerlas coincidir es preciso someterlas a una traslación (desplazamiento) o a un giro.

Los niños experimentan la percepción de posición espacial cuando dibujan o identifican una figura y su imagen con un espejo o un reflex. Las habilidades para identificar traslaciones, giros... ayudan a los alumnos a identificar figuras congruentes en dibujos complejos. Esta habilidad es esencial en muchas actividades, pero sobre todo en el estudio de la geometría.

5. Percepción de relaciones espaciales:

Habilidad para ver dos o más objetos, cada uno de ellos en relación consigo mismo y también en relación con los demás.

Por ejemplo, al construir una figura con cubos, un niño debe percibir la posición de los cubos en relación consigo mismo y también en relación a la posición de los cubos entre sí. También es una buena actividad que el niño continúe una serie de figuras

geométricas porque necesita percibir la posición de las figuras en relación con cada una de las demás y crear una imagen mental de la siguiente figura dibujándola.

Esta habilidad está íntimamente relacionada con la percepción espacial en algunas tareas. Hoffer (1977) establece que las operaciones de percepción espacial y visual requieren un gran sentido de orientación corporal.

Mediante el aprendizaje espacial y de profundidad se ayuda a los niños a poder estimar y juzgar distancias de cosas que están a su alrededor. Estas tareas se emplean en situaciones tan normales y cotidianas como pueden ser el jugar al tenis o andar en bicicleta.

6. Discriminación visual:

Habilidad para establecer semejanzas y diferencias entre objetos.

Así como la percepción espacial y la percepción de relaciones espaciales se basan en la posición de un objeto en el espacio, la discriminación visual es independiente de la posición. Las actividades de clasificación de objetos y dibujos geométricos como pueden ser los bloques de diferente color, forma, tamaño y grosor, ayudan a los alumnos a desarrollar la discriminación visual, mientras hacen comparaciones verbales de las cosas que ven.

Las actividades que requieren que los alumnos comparen todos los posibles pares de figuras constituyen una estrategia en la organización de resolución de problemas que puede que los alumnos no tengan, pero que es posible enseñarles.

7. Memoria visual:

Habilidad para recordar exactamente objetos no muy grandes y decir cuáles son sus características con respecto a otros objetos que pueden estar o no a la vista.

Una persona con gran memoria visual puede estar dotada de una “memoria fotográfica”. Una gran cantidad de personas retenemos poca información, alrededor de seis o siete características y, además, durante espacios muy pequeños de tiempo (Hoffer, 1977). Para recordar mucha información tenemos que almacenar las cosas en la memoria a largo plazo a través de la abstracción y del pensamiento simbólico.

Con niños pequeños se pueden utilizar actividades del tipo de recordar, después de un primer vistazo, que objetos había en una estantería. Se les muestra un dibujo con objetos (mejor juguetes) en una estantería o bien los mismos objetos reales con una especie de cortinilla en la estantería durante un breve espacio de tiempo. Se les da una hoja con una trama cuadrículada y se les pide que dibujen tanto la estantería como los juguetes en los correspondientes estantes. Evidentemente la graduación de la actividad está en función de lo que se estime oportuno para los niños, haciéndola más fácil o más difícil, con más objetos o menos objetos, etc. Esta actividad con juguetes, sirve para ilustrar lo necesario del sentido espacial en las tareas diarias. La misma clase de ejemplos se puede emplear con sólidos geométricos: cubos, cilindros, etc.

Actividades semejantes se dan en geometría cuando a los alumnos se les dice que copien una figura en una trama cuadrada. En esta actividad, se les muestra una configuración, sólo un momento, y ellos tienen que dibujarla en otra trama semejante.

Teniendo todo ello en cuenta Lolo se lía con el tangram y los sólidos platónicos y pone en práctica todo lo que puede en cuanto al sentido espacial sin olvidar la parte de geometría clásica, más tradicional.

El tangram lo obtiene por papiroflexia y, más tarde, se trabaja con cartón pluma, spontex y metacrilato. De este modo no sólo realiza con los alumnos de forma divertida todas las actividades de sentido espacial sino que, al representar las distintas formas, facilita la adquisición de destrezas y habilidades en cuanto al manejo de materiales de dibujo, destrezas de psicomotricidad... Construye poco a poco los conceptos de superficie, de perímetro, medida, congruencia, equivalencia,... Llegando a trabajar “ecuaciones tangrámicas”, una vez que los alumnos descubrieron que el triángulo pequeño era el módulo.

Paralelamente con troquelados y polydrón los alumnos dan rienda suelta a su imaginación construyendo infinidad de cuerpos geométricos. A base de introducir poco a poco restricciones llega a los sólidos platónicos contruidos, por equipos, en el patio con madera y alambre recubriéndolos, según su superficie previamente calculada, con plástico verde (cubo/tierra), blanco (octaedro/ blanco), rojo (tetraedro/ fuego), azul (icosaedro/ agua), dejando el dodecaedro sin recubrir y con su estructura al aire en el centro.

Son actividades que merece la pena realizar porque son gratificantes para el profesorado... y para el alumnado. Nunca tanta geometría aprendieron los alumnos ni tanta enseñó el profesor Lolo... sin darse cuenta, como una tarea común en la que todos los participantes estaban implicados.

La geometría, así, es un sueño.

Caso 3. Lolo duerme en el Centro de Profesores: comienza a recopilar materiales, a divulgar la matemática recreativa y, a través de exposiciones, intenta promover el trabajo matemático también fuera del aula

Con la experiencia anterior, como una mancha de aceite, se movilizó el alumnado (y con él el profesorado), primero de un ayuntamiento y después de toda una comarca; el tema se fue extendiendo... a través del tangram chino y de una exposición de juegos matemáticos, la mayoría geométricos.

Lolo entra en el CEFOCOP como asesor. Cursos, talleres, xornadas, seminarios, grupos de trabajo... Es la época de sueño contagioso para los demás, de intentar hacer llegar al mayor número de centros la ilusión, este sueño geométrico vivido. En este sentido fueron los años de la Bella Durmiente. Las experiencias particulares se limitaron a fuegos de artificio en uno y otro centro acompañando, en algunos casos, a los profesores en las aulas para ayudarles a dar el primer paso o un paso más en la realización de actividades.

Pero sería injusto callarse que no es lo mismo ir un día a un aula y hacer una actividad concreta que estar día a día en clase, gestionando aula, programa, tutoría y... todo lo que venga.

En este sentido fueron años en los que Lolo se pinchó, no sé si con la astilla o con la rueca, y creo que se quedó dormido, aunque quiere creer que a algunas personas

de su entorno les creó un conflicto cognitivo e incluso pasaron de la fase oscura a la fase diáfana.

Caso 4. Lolo vuelve al aula ... y reflexiona.

Pero a Lolo le gustaba el aula y solicitó volver a ella. ¿Cómo ve Lolo la geometría?

En los dos cursos de su regreso al aula les propone a sus alumnos, los primeros días, unas cuestiones de tipo general para conocer sus destrezas, habilidades, estrategias, conocimientos..., vamos, para ver como están en Matemáticas y obtener pautas que le permitan establecer el punto de partida.

Son cuestiones extraídas de diversas fuentes y más o menos adaptadas, pero en ningún caso Lolo se atribuye su paternidad. La verdad es que en libros, en la red, en soportes audiovisuales,... hay toda una batería de materiales que son de una utilidad extraordinaria para el aula.

EPÍLOGO:

Después de mis charlas con Lolo, cuyas opiniones comparto al pie de la letra, reconozco que los cambios en educación son lentos. No hay mayores diferencias, en lo que a Geometría se refiere, entre los alumnos de hace doce o catorce años y los de ahora. Al menos yo no las veo. Lo que si observo es que tenemos que incorporar determinados aspectos pero que ya se proponían el siglo pasado. En el fondo es una cuestión metodológica.

Me atrevería a decir que mientras se siguen sobrevalorando cuestiones matemáticas como pueden ser las rutinas operacionales o los procesos deductivos, se le presta poca atención a otros como la visualización espacial: a ver cuando se mira, por ejemplo.

Pero creo que no debemos desesperarnos. Lo que tenemos que hacer es estar despiertos y pensar que somos capaces de tomar el tren de la ilusión, de ayudar a nuestros alumnos a que vean cuando miran, a que la geometría forme parte de sus sueños y a que sea dinámica, viva, activa, ilusionante: seremos más felices ellos y nosotros.

BIBLIOGRAFÍA:

Abboot, Edwin A. (1 993): "Planilandia". Laertes. Barcelona.

Alsina, C./ Fortuny, J.M^a.(1 992): "Miralandia. Un viaje al país de los espejos". Proyecto Sur. Granada.

Alsina, C./ Burgués, C./ Fortuny, J.M^a. (1 991): "Materiales para construir la geometría". Síntesis. Madrid.

Alsina, C./ Burgués, C./ Fortuny, J.M^a. (1 992): "Invitación a la didáctica de la geometría". Síntesis. Madrid.

Alsina, C./ Pérez, R./ Ruíz, C. (1 989): "Simetría dinámica". Síntesis. Madrid.

Brumby, M.: "Consistent Differences in Cognitive Development for Geometry Learning in Preservice Elementary Teachers. "Journal for Research in Mathematics Education 13 (March 1982): 332-40.

Callejo de la Vega, M^a L. e alt (1 986): "La geometría en el aprendizaje de las matemáticas". IESP Somosaguas. Narcea. Madrid.

Chamorro, M^a C. (Coord): "Didáctica de las Matemáticas para Primaria". Pearson Educ. Madrid, 2003.

Del Grande, J.J.: "Can Grade Two Children's Spatial, Perception Be Improved by Inserting a Transformation Geometry Component into Their Mathematics Program?". University of Toronto, 1986.

Dickson, Linda/ Brown, Margaret/ Gibson, Olwen. (1 991): "El aprendizaje de las matemáticas". Labor / M.E.C. Barcelona.

Fisher, R./ Vince, A. (1 990): "Investigando las Matemáticas. Vol 1, 2, 3 e 4". Akal. Madrid.

García Arenas, J / Bertrán Infante, C. (1 992): "Geometría y experiencias". Alhambra. Madrid.

Guibert, A. e alt. (1 993): "Actividades geométricas para E. Infantil y E. Primaria". Narcea. Madrid.

Guillén Soler, G.(1 991): "Poliedros". Síntesis. Madrid.

Gutiérrez, A./ Jaime, A.(1 995): "Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática". Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Hernán, F./ Carrillo, E. (1. 991): "Recursos en el aula de Matemáticas". Síntesis. Madrid.

Hoffer, A.R.: "Mathematics Resource Project: Geometry and Visualization. Palo Alto, Calif. Creative Publications, 1977.

Martínez Recio, A./ Rivaya, F.J. (1 989): "Una metodología activa para la enseñanza de la geometría". Síntesis. Madrid.

Mora, J.A./ Rodrigo, J. (1 993):
- "Mosaicos I". Proyecto Sur. Granada.
- "Mosaicos II". Proyecto Sur. Granada.

- "Mosaicos. Actividades". Proyecto Sur. Granada.

Moses, B. E.: "The Nature of Spatial Ability and Its Relationship to Mathematical Problem Solving. Dissertation Abstracts 78. Bloomington, Ind.: University Microfilm no. 77-30, 309, 1977.

Tonucci, F. (1990): "Enseñar o aprender?". Graó. Barcelona, 1993.

Vurpillot, E.: "The visual World of the Child". London. George Allen&Unvwin, 1976.

LA GEOMETRÍA EN LA ARQUITECTURA DE GAUDÍ

Pedro Miguel González Urbaneja

pgonzale@xtec.net

933475324@terra.es

«Las formas derivadas de la Geometría proporcionan distinción y claridad». GAUDÍ.

«Yo soy geómetra que quiere decir hombre de síntesis, que es la capacidad de ver las cosas en su conjunto antes de realizarlas». GAUDÍ.

Arte y Geometría.

La originalidad de Gaudí. La naturaleza como fuente de inspiración.

La Filosofía de la Belleza de Gaudí.

Las raíces místicas del Arte de Gaudí.

Los recursos geométricos de Gaudí.

La Modulación.

La Traslación.

La Simetrización.

La deformación topológica.

Los recubrimientos poligonales.

Las formas poligonales.

Las formas poliédricas.

Las formas curvilíneas.

Las formas catenarias.

Las formas espirales.

Las formas sinusoidales.

Las formas cónicas.

Otras formas curvilíneas.

Las superficies regladas.

Cilindros y conos.

La generación helicoidal.

El Hiperboloide de una hoja.

El Paraboloide hiperbólico.

Las superficies no regladas.

La maclación de cuerpos geométricos.

La fractalidad.

La sabiduría geométrica de Gaudí.

Bibliografía.

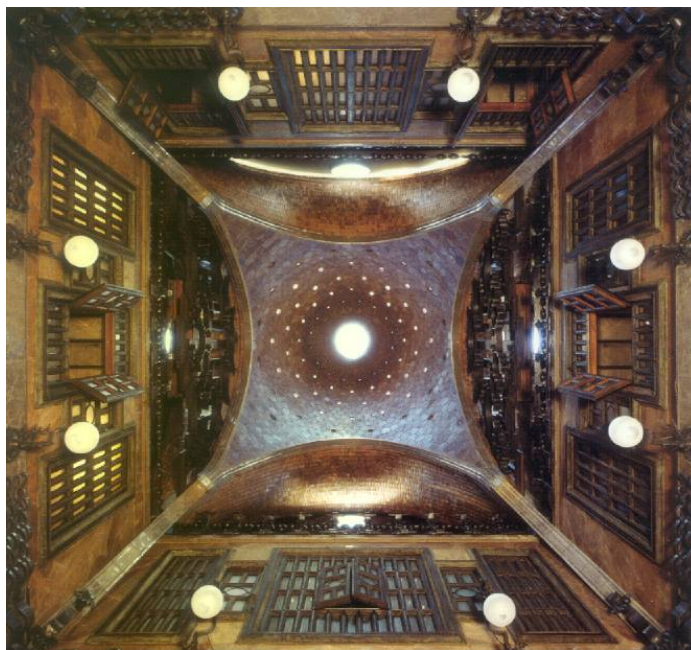
Textos y artículos.

Prensa.

Exposiciones.

Apéndice 1. Algunos monumentos emblemáticos de la Geometría de Gaudí.

Apéndice 2. La Geometría de Gaudí en la clase de Matemáticas.



Arte y Geometría.

«La Geometría es el lenguaje propio del Arquitecto cuya principal misión consiste en alcanzar la calidad estética al hallar las formas geométricas propias de cada función estructural». GAUDÍ

La Matemática, y en particular la Geometría, ha sido uno de los argumentos más importantes en las especulaciones teóricas de los artistas. En todos los tiempos la Matemática ha estado al servicio de la expresividad en el arte por su capacidad de evocar simbólicamente a través de un ideal de belleza, lo esencial, lo original, lo inmutable y lo verdadero, en el afán de conocimiento de lo universal, de modo que subyace en la obra de Arte unos saberes matemáticos, ostensibles o secretos, que conforman proporciones, dan significado a las intenciones del artista y contribuyen a la emoción y al misterio que emana de la belleza.

El Arte intima con la creatividad y la belleza, y la Ciencia con el descubrimiento y la utilidad. La Matemática, y en particular la Geometría, participa de todos estos aspectos, de ahí su incidencia sobre ambos, Arte y Ciencia, y recíprocamente se afecta por ellos. Por su belleza y creatividad, gran parte de la Matemática es Arte, y como tal, sus ideas, métodos y estructuras han participado de forma palmaria o subrepticia en multitud de creaciones artísticas. Genio, ingenio y técnica, presiden cálculos, proporciones y simetrías, fundamento de la belleza que trasmite la obra de arte, que en modo alguno es casual, sino consecuencia de la primigenia armonía pitagórica de las proporciones que los matemáticos descubrieron y los artistas aplicaron. Así nos lo enseña desde la época clásica los textos de Aristóteles (*Metafísica* Libro XII, cap.III, 1078b):

«Las formas más estimadas de lo bello son el orden, la simetría y la proporción, cosas que dan a conocer en alto grado las ciencias matemáticas».

Las obras de los grandes artistas y estudiosos del Arte del Renacimiento (Piero de la Francesca, Luca Pacioli, Leonardo, Durero, Alberti, Palladio, etc.), todos ellos brillantes matemáticos y geómetras, nos sitúan en las raíces geométricas del Arte; y en la modernidad, la brillante literatura sobre el tema (Gombrich, Pedoe, Heilbron, Ghica, Wittkover, Bouleau, etc.) nos permite conocer estos fundamentos. En ellos vemos trazos geométricos sobre las obras de arte que intentan probar la aplicación deliberada de un sistema de proporciones por parte de los artistas, lo que no siempre está exento de arbitrariedad, ya que aunque se hagan con regla y compás en la mano, no dejan de ser suposiciones geométricas con una gran carga subjetiva y con frecuencia especulaciones fantásticas. Ante la obra de arte, todo matemático puede encontrar presuntas relaciones geométricas que intenten descifrar las intenciones del artista, ya que *«el compás no suele contradecir las pretensiones del erudito»*, sobre todo si éste es matemático.

Si esta declaración de principios quiere ser un pronunciamiento general en torno a la incidencia de la Geometría sobre el Arte, en el caso de Gaudí, por sus palabras (a las que aludiremos reiteradamente) y por sus hechos, es decir, por su obra, (*«por sus frutos los conoceréis»*), puede ser una descripción más que literal, manifestación de lo visual, porque en cada uno de sus edificios la Geometría no sólo se revela esplendente sino que sus formas se exhiben ostentosamente. El crítico o el estudioso de Gaudí no tiene que

hacer interpretaciones sobre la utilización de tal o cual proporción; es innecesario, porque su Geometría es patente no sólo en las formas sino en las estructuras, es decir, es una Geometría que da tanto servicio a la estética como la estática. No hay, pues, Geometría secreta en Gaudí. Como él mismo escribe:

«La evidencia es a los ojos del espíritu lo que la visión a los del cuerpo».

La originalidad de Gaudí. La naturaleza como fuente de inspiración.

Lo anterior no quiere decir que la Geometría de Gaudí sea trivial y convencional. Al contrario, Gaudí es, como veremos, el gran innovador en la aplicación de nuevas estructuras geométricas a la Arquitectura; y algunas de tal complejidad que sólo los recursos visuales de las nuevas tecnologías han permitido desentrañar su funcionalidad. Gaudí no desdeñó los elementos geométricos de la Arquitectura tradicional basada en la rigurosa aplicación platónica de la regla y el compás, a base de utilizar formas geométricas muy simples (triángulos, cuadrados y círculos en el plano; poliedros, prismas, pirámides, cilindros, conos y esferas, en el espacio), pero, con una capacidad casi milagrosa de utilizar todas las formas geométricas, Gaudí amplió de forma considerable el número de formas planas y espaciales aplicables a la Arquitectura, y no sólo como nueva morfología estética en el ámbito de la belleza sino como componente estructural desde la perspectiva gravitatoria de las cargas. Es decir, hay en Gaudí una fusión de calidad estética y excelencia estructural, de forma y función. Así que en su acervo geométrico encontramos: curvas parabólicas, catenarias, espirales, sinusoidales, etc., en el plano, y sobre todo otras superficies regladas, además del cono y el cilindro, en el espacio: helicoides, hiperboloide de una hoja, paraboloides hipérbolicos, compuestas por líneas rectas, que determinan superficies curvas en el espacio, en las que Gaudí encontró un campo fascinante de exploración e investigación arquitectónica, especialmente en relación con la penetración de la luz:

«Los paraboloides, hiperboloides y helicoides varían constantemente la incidencia de la luz, tienen una riqueza propia de matices que hacen innecesaria la ornamentación y el modelado. [...] El hiperboloide representa la luz y el helicoides el movimiento».

Las superficies regladas, que son de fácil construcción, permitieron a Gaudí una considerable ampliación de su repertorio de formas y la consecución de soluciones hasta entonces inéditas en los muros, bóvedas y cubiertas. Tres vías condujeron a Gaudí a trabajar con la Geometría de las superficies regladas: su dominio de la Geometría tridimensional, estudiada y asimilada con pasión desde su época de estudiante y auténtica obsesión a lo largo de su vida, su espíritu de experimentador con las formas geométricas en general y sobre todo las formas orgánicas naturales (troncos y frutos de árboles, huesos, crustáceos, etc.) que desde la niñez habían captado su atención:

«En la naturaleza está el principio y el fin de todas las formas».

Aquí hay que buscar la sorprendente concepción de Gaudí sobre la originalidad, basada en la pura etimología de la palabra:

«La originalidad consiste en volver al origen».

como simple retorno a las formas y estructuras de la naturaleza geológica, botánica y anatómica, que debemos imitar y estudiar en toda experimentación:

«El gran libro, siempre abierto que hay que esforzarse en leer es el gran libro de la naturaleza: los otros libros están extraídos de éste y además contienen las equivocaciones e interpretaciones de los hombres. Hay dos revelaciones, una la doctrinaria de la moral y la religión, y la otra la que se guía por los hechos, que es la del gran libro de la naturaleza».

Pongamos la frase en su contexto:

«La creación continua y el creador se sirven de sus criaturas; los que buscan las leyes de la naturaleza para configurar nuevas obras colaboran con el creador. Los copistas no colaboran. La originalidad consiste en volver al origen».

Al partir de la naturaleza, Gaudí entendía la Ciencia y la Técnica bajo unos principios muy similares a los de Leonardo basados en la experimentación, a base de llegar a la teoría a partir de la observación y el análisis:

«Me quejo como Da Vinci: qué cosas tan bellas haría si me diesen los medios»,

La originalidad de la Geometría de Gaudí nace de los descubrimientos personales ulteriores a un profundo estudio continuado. Gaudí intuye las formas y una vez que las tiene fijadas en la mente, busca y encuentra los medios para materializarlas en objetos físicos construibles, incluso con maquetas que someterá a experimentación para comprobar la viabilidad práctica de la forma:

«Lo calculo todo; primero suspendiendo unos pesos para buscar la funícula, después conformo la funícula encontrada con formas y materiales, los pesos de los cuales vuelvo a revisar, [...]. De esta manera sale la forma lógica nacida de las necesidades. Las funículas de la Sagrada Familia las he encontrado gráficamente, y las de la Colonia Güell experimentalmente; pero los dos procedimientos son el mismo, uno es hijo del otro. Este procedimiento de ensayo le es necesario a la limitada inteligencia humana».

En efecto, Gaudí calculó las estructuras de la Iglesia de la Colonia Güell, mediante cordeles suspendidos y pequeños sacos de perdigones con las cargas puntuales obteniendo la forma correcta del arco catenariforme con total precisión y sin cálculo matemático alguno.

La Filosofía de la Belleza de Gaudí.

Como los grandes artistas y teóricos del Renacimiento, Gaudí fundamenta su Filosofía de la belleza en la armonía de las proporciones geométricas, según la cual *«la fuente de la belleza reside en la armonía de las partes entre sí y con el todo en términos de proporciones y razones matemáticas»*. Bajo estas concepciones, la Geometría es base esencial de la belleza y piedra filosofal de la Estética.:

«La proporción, es decir, la ley que regula la relación de las partes con el todo, y de cada una de ellas con las otras, hemos de precisarla sin divagar. [...] Entre los griegos se fijó como proporción la del Partenón y durante la edad Media se fijó en las catedrales. La base de todo raciocinio es la regla de tres, la proporción matemática, el silogismo».

Gaudí redundará una y otra vez en este gran principio estético de la antigüedad:

«Para que una obra arquitectónica sea bella, es necesario que se ajusten todos sus elementos en cuanto a situación, dimensión, forma y color»;

todo ello es la base de la armonía:

«La cualidad esencial de la obra de arte es la armonía; en las obras plásticas nace de la luz. [...] Para la armonía, o lo que es lo mismo, el equilibrio, es necesario el contraste, luz y sombra, continuidad y discontinuidad, concavidad y convexidad».

En Gaudí hay una alusión constante a conceptos geométricos.

Las raíces místicas del Arte de Gaudí.

Para Gaudí las armonías matemáticas suministran las proporciones geométricas adecuadas que componen la esencia de la belleza y son el reflejo de la armonía cósmica que rige el universo sostenido por el creador como Arquitecto supremo, que infunde esa simpatía entre el microcosmos humano y el macrocosmos universal. Vemos, pues, en la Geometría de Gaudí una vena mística de naturaleza pitagórico-platónica, que es inseparable de la concepción global de su obra, y así lo manifiesta de forma reiterada en sus frecuentes metáforas que quieren ilustrar sus formas geométricas:

- *«Por muchas razones quiero hacer las bóvedas con paraboloides hiperbólicos. Es un magnífico signo de la Santísima Trinidad, porque son dos generatrices rectas e infinitas, y una tercera generatriz recta e infinita, que se aguanta sobre las otras dos. El Padre y el Hijo relacionados por el Espíritu Santo. Los tres igualmente infinitos, los tres una sola cosa».*
- *«Los santos, santos, santos, ordenados helicoidalmente, están dedicados [en la Sagrada Familia] de tres en tres al Padre, al Hijo y al Espíritu Santo».*
- *«La belleza es el resplandor de la verdad, y el resplandor seduce a todo el mundo; por eso el arte tiene esa universalidad».*
- *«La inteligencia del hombre sólo puede actuar en un plano, es de dos dimensiones: resuelve ecuaciones de una sola incógnita. La inteligencia angélica es de tres dimensiones, actúa directamente en el espacio. El Hombre no puede actuar hasta que lo ha visto hecho: de primera intención sólo sigue trayectorias, líneas en un plano».*

Será Dalí, en una conferencia sobre Gaudí, que impartió en el Parque Güell de Barcelona en 29/09/56, quien nos aclara la última cita:

«La inteligencia angélica consiste en ver las cosas del espacio sin necesidad de plano. Cuando se pidió a Gaudí sobre los planos de la Sagrada Familia respondió que él para hacer catedrales no necesitaba planos. Así hizo Gaudí su Arquitectura, sin planos, como un ángel».

Esta capacidad casi divina de intuir las formas geométricas y percibir las con los ojos de la mente, antes de plasmarlas en la realidad arquitectónica, es enfatizada por el propio Gaudí cuando escribe:

«Yo soy geómetra que quiere decir hombre de síntesis, que es la capacidad de ver las cosas en su conjunto antes de realizarlas».

La multitudinaria conferencia de Dalí sobre Gaudí del Parque Güell –asistieron unas cinco mil personas– tuvo una gran repercusión mediática (RNE, NO-DO). Dalí hizo una vehemente apología de Gaudí, pintó la Sagrada Familia con alquitrán en una inmensa lona e hizo una ardiente defensa de la continuación de las obras del templo. Tras ponderar de forma apasionada el inmenso valor de la Arquitectura de Gaudí, Dalí continuó hablando sobre Gaudí:

«Hace algún tiempo cayó una bomba en Hiroshima y después han venido las bombas de hidrógeno, pero los pintores locales continúan pintando sus naturalezas muertas y sus árboles trazados más o menos oloquinos (sic) como si nada verdadero hubiera pasado, pero antes que la primera bomba, cayó en el propio corazón de Barcelona una bomba más temible y potente, porque en vez de ser una bomba destructiva fue una bomba creadora, en vez de ser una bomba uniforme, fue una bomba morfológica y, en vez de destruir, aniquilar desintegrar, en el lugar donde cayó, en este mismo corazón de Barcelona, se levantaron los edificios sublimes del arquitecto Gaudí; la prueba de lo que digo es que aquí, en nuestro país, no nos damos cuenta de la importancia cósmica de Gaudí, es el hecho que los Amigos de Gaudí tienen abierta en el Tinell una exposición maravillosa de documentos y objetos de Gaudí, y tenemos que hacer constar que ha sido casi exclusivamente visitada por extranjeros.»

Los recursos geométricos de Gaudí.

Concretaremos ahora los elementos geométricos más importantes de la obra de Gaudí. Además de las fuentes aludidas en la Bibliografía, nos guiaremos por los aspectos excelente y didácticamente plasmados en las magníficas exposiciones tituladas:

Gaudí, a la búsqueda de la forma (Espacio, geometría, estructura y construcción),

celebradas en Barcelona y León, con motivo del Año Gaudí 2002 que conmemoraba el sesquicentenario de su nacimiento.

Sinteticemos algunos de estos aspectos:

A) La Modulación. Ordena el espacio a base de módulos lo que permite el uso de elementos prefabricados, así como encajes de formas cóncavas y convexas, salientes y entrantes, como el banco sinuoso del Parque Güell. La Sagrada Familia tiene como módulo principal de medida 7.5 m y un sistema de proporciones basado en los divisores de 12. Esta regularidad permite, en la actualidad, la continuación de la obra.

B) La Traslación. La repetición mediante desplazamientos crea un efecto cenefa (rejas, vidrieras, adornos en fachadas). A veces hay una traslación espacial de elementos enteros como ventanas, puertas, arcos, etc. En relación con su constante aplicación de la traslación, Gaudí escribe:

«El único camino fértil es la repetición».

C) La Simetría. La simetrización es un proceso que utiliza planos de simetría para engendrar elementos con simetría especular. Se advierte tanto en las fachadas (Casas Calvet, Batlló, Botines, Palacio Episcopal de Astorga, Teresianas, Palacio Güell, etc.) como en las plantas (Sagrada Familia, Palacio Episcopal de Astorga, etc.) y en la escalinata de acceso al Parque Güell. También son magníficos modelos de simetrización los famosos estudios *estereofuniculares* que Gaudí construyó mediante hilos, cables, cuerdas o cadenas de las que pendían cargas, obteniendo maquetas formadas por funículas en tres dimensiones, que le servían al arquitecto para obtener una simulación de la estructura buscada.

D) La deformación topológica. Sobre todo el *redondeo de las formas* para suavizar ángulos (planos y sólidos) y salientes puntiagudos que se contornean con arcos de círculo, parábola o senoide. Es un recurso muy aplicado por Gaudí, sobre todo en el Parque Güell, en la fachada de las Casas Milà y Batlló y en las columnas de la Sagrada Familia.

E) Los recubrimientos poligonales de superficies (*mosaicos topológicos*). Es el original “*Trencadís*”, famoso por su vistosidad, y con curioso nombre que en catalán significa “*destrozo o estropicio*” porque consiste en usar la técnica de romper losetas y vajillas para decorar superficies con los trozos. Se utiliza sobre todo en el Parque Güell. Gaudí escribe a propósito:

«La elegancia es hermana de la pobreza; pero conviene no confundir la pobreza con la miseria».

F) Las formas poligonales. Gaudí las aplica por doquier como elementos constructivos (plantas, fachadas, baldosas, etc.) y decorativos (cerámica, rótulos, etc.). Los polígonos más frecuentes son triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, octógonos, decágonos y dodecágonos.

Son famosos los triángulos de Bellesguard; las baldosas cuadradas de la Casa Vicens; las ventanas pentagonales y las baldosas cuadradas con decoración floral del Capricho de Comillas; las formas triangulares formando hexágonos en la fachada de las Teresianas y en el muro de la portería de la Finca Güell; las rejas triangulares formando hexágonos en la cripta de la Colonia Güell; las estrellas pentagonales (pentagrama místico pitagórico), los hexágonos de *trencadís* bellísimamente decorados con otros polígonos interiores y formas redondeadas, y cuadrados y rectángulos de *trencadís* del Parque Güell; los pentágonos regulares de capiteles del Palacio Episcopal de Astorga; las baldosas hexagonales del Paseo de Gracia; el embaldosado hexagonal en suelos de parquet de la Casa Milà con la división del hexágono regular en doce triángulos rectángulos de colores alternos; los mosaicos hexagonales con espirales de la casa Escofet; las formas hexagonales y octogonales en el interior de la cúpula de la Capilla de la Virgen del Rosario de la Sagrada

Familia y las formas hexagonales en la base de los rótulos de las torres.

También son dignas de mención las formas cuadradas en el artesanado y los diminutos mosaicos hexagonales que integran el paraboloide hiperbólico de la cúpula del Palacio Güell. En ella aparecen orificios circulares interiores a los hexágonos para dar paso a luz cenital, imitando la bóveda celeste en la que refulgen las estrellas o el techo de los baños medievales musulmanes.

En el espacio las formas poligonales tienen una triple incidencia:

- a. Como formas con cargas para estudiar los funículos, desde el punto de vista estructural.
- b. Como caras de los poliedros que intervienen en elementos decorativos, en lámparas, cruces y pináculos.
- c. Como generadores de las columnas de la Sagrada Familia.

G) Las formas poliédricas. Gaudí diseñó luces en forma de dodecaedro tanto en la cripta de la Sagrada Familia como en la catedral de Palma de Mallorca y es curioso saber que del techo de su obrador colgaban algunos poliedros.

En las torres de la Sagrada Familia hay un impresionante despliegue geométrico poliédrico, a base de maclas (intersecciones) de diversos cuerpos geométricos de forma poliédrica con vaciados cilíndricos funcionales que crean espacios donde situar la original iluminación. Encontramos diversas pirámides truncadas en cuyos lados se proyectan otras, poliedros semirregulares formados al cortar las esquinas de cubos y octaedros, pirámides triangulares que desarrollan otras hexagonales que a su vez descansan sobre otras que se proyectan hacia abajo.

En concreto, en los pináculos de los campanarios de las fachadas del Nacimiento y de la Pasión aparece de arriba a abajo un tronco de pirámide de base triangular y aristas achaflanadas con diedros de unión en el cuerpo inferior y pirámides cuadrangulares en sus caras; un poliedro pseudoregular obtenido por truncamiento de los vértices de un octaedro o de un cubo y una esfera interior, secante en todas sus caras, dos de ellas perforadas para dar paso a focos luminosos (que se obtiene mediante un proceso de maclación sucesiva de un cubo, un octaedro y un cilindro que forma el poliedro pseudoregular con casquetes esféricos que sobresalen en algunas caras o vaciados cilíndricos funcionales donde se situará la iluminación); otro tronco de pirámide de base triangular; un tronco de cono; un cuerpo de envolvente troncocónica de base inferior hexagonal y superior triangular, un tronco de pirámide de base hexagonal invertido; etc.

En los cuatro pináculos de los campanarios de la fachada de la Gloria de la Sagrada Familia están presentes dodecaedros regulares y en la torre dedicada a la Virgen hay un poliedro estrellado.

En las proporciones de la Sagrada Familia, Gaudí optó por las relaciones $1/4$, $1/3$, $1/2$, $2/3$, $3/4$, 1 , asociadas a los divisores de 12. Además, hay doce campanarios con pináculos –asociados a los doce apóstoles– no sorprende, pues, que los tres poliedros regulares que intervienen sean el cubo y el octaedro que tienen 12 aristas y el dodecaedro que tiene doce caras.

H) Las formas curvilíneas.

H₁) Las formas catenarias. Son uno de los recursos geométricos más originales de

Gaudí. El arco catenario es el más perfecto, ya que se aguanta a sí mismo. La forma del *arco de catenaria*, se obtiene por simetría de la curva catenaria, que describe una cadena que cuelga de dos puntos y soporta sólo su propio peso. Si la carga que soporta es horizontalmente uniforme, al colgarla de dos puntos adopta la forma de parábola. Si soporta diferentes cargas puntuales, la cadena o cable adopta la forma llamada *arco funicular*, que es una línea poligonal.

La curva catenaria, está relacionada con el coseno hipérbólico y la función exponencial, ya que tiene por ecuación $y = a \cdot \cosh(x/a) = a \cdot [\exp(x/a) + \exp(-x/a)]/2$. Se había estudiado en Física y Matemática desde el siglo XVIII. Cerca de su mínimo la catenaria $y = a \cdot \cosh(x/a)$ se aproxima bastante bien mediante la parábola $y = a + x^2/2a$, pero fuera de este extremo la divergencia entre ambas curvas es considerable. Por estas razones está muy extendida la confusión entre catenaria y parábola.

Gaudí se dio cuenta de que en arcos catenarios de igual longitud cuanto mayor sea la altura menor es el empuje horizontal en los puntos de arranque y en la clave del arco, por tanto, estos arcos permiten gran altura sin empujes laterales y, en consecuencia, no precisan de elementos exteriores de refuerzo como los contrafuertes o arbotantes contruidos al lado de las naves centrales, tan característicos del gótico.

Ejemplos bellísimos de arcos catenarios encontramos en Colegio de Santa Teresa (en la entrada, en el corredor planta baja y en el corredor del primer piso); en las golfas de la Casa Batlló y de la Casa Milà, en el mirador y en las cuadras de la Finca Güell; en las fachada de la Casa Batlló; en las Bodegas Güell; en las puertas de entrada, en la sala de columnas y en la base de la cúpula –que descansa sobre cuatro arcos de este tipo– del Palacio Güell.

H₂) Las formas espirales. Numerosas formas espirales se generan con hilos que se bobinan y rebobinan sobre la superficie de conos y cilindros. La *Espiral de Arquímedes* (llamada a veces *Espiral aritmética*) es engendrada por un punto que se mueve de forma uniforme sobre un segmento el cual a su vez gira en un plano con movimiento uniforme permaneciendo fijo uno de sus extremos. La *Espiral logarítmica* ha cautivado, por su belleza y propiedades, la atención de matemáticos, artistas y naturalistas. Se le llama *Espiral equiangular* (el ángulo de corte del radio vector con la curva es constante, Descartes) y *Espiral geométrica* (el radio vector crece en progresión geométrica mientras el ángulo polar decrece en progresión aritmética, Halley). La *Espiral logarítmica*, vinculada a los rectángulos y triángulos áureos, gobierna el crecimiento armónico de muchas formas vegetales (flores y frutos) y animales (conchas de moluscos), aquellas en las que la forma se mantiene invariante. Se trata de un crecimiento gnomónico cuyo ejemplo más visualmente representativo es la concha del Nautilus. Ambas espirales aparecen por doquier en la naturaleza vegetal como en los girasoles, y animal como en las diversas conchas, cuernos, colas, etc.

De acuerdo con la habitual inspiración de Gaudí en la naturaleza, las espirales son muy frecuentes en su obra, sobre todo como elementos decorativos en rejas, balcones, timbres, escudos, figuras, etc. Citemos por ser muy conocidas las espirales de las rejas del Parque de la Ciudadela, del balcón de la Casa Vicens, de los mosaicos del Paseo de Gracia, del dragón de la Finca Güell, del timbre de la Casa Calvet y las numerosas espirales que aparecen en la Sagrada Familia.

H₃) Las formas sinusoidales. Aparecen estas curvas en los movimientos serpenteantes, por ejemplo en el avance de las olas del mar, y también en las sombras de las hélices espaciales. Gaudí las utiliza con frecuencia siendo algunas de las más conocidas las del banco del Parque Güell, las del muro de la Casa Miralles, así como las de las cubiertas de las Escuelas provisionales de la Sagrada Familia y las de su propio obrador, que son conoides sinusoidales.

H₄) Las formas cónicas. Todas las curvas cónicas –circunferencias, elipses, parábolas e hipérbolas– están presentes en las obras de Gaudí al ser las secciones principales de las superficies regladas que forman parte esencial del inventario geométrico del arquitecto. Por esta razón Gaudí realizó estudios profundos sobre el trazado de estas curvas y de sus propiedades vinculadas a sus habituales inquietudes artísticas en relación con la acústica y la iluminación.

H₅) Otras formas curvilíneas. Gaudí utilizó una ingente cantidad de otras curvas, muchas de ellas obtenidas por deformación continua de círculos, es decir, curvas topológicamente equivalentes a éste. Dan prolífica cuenta de ello la original decoración de puertas, sofás, rejas, cerámicas, muros, fachadas, balcones, ventanas, algunas plantas como los pabellones de la entrada del Parque Güel y las exuberantes formas de la Casa Milá, la Casa Batlló y otros edificios.

I) Las superficies regladas. Gaudí fue el primer arquitecto que apreció el interés arquitectónico de las superficies regladas siendo su uso constructivo una de las más señeras aportaciones de Gaudí a la Arquitectura moderna, resultado de la inspiración del creador en la Geometría natural. Gaudí se había interesado por el estudio de estas superficies en el texto de *Geometría Descriptiva* de Leroy de 1855, pero quedó fascinado por su redescubrimiento al construir modelos y maquetas con los que experimentaba la funcionalidad e idoneidad práctica y de la forma de la estructura buscada. Gaudí afirmaba respecto al uso de la Geometría en la construcción:

«Para la ejecución de superficies, la Geometría no complica, sino que simplifica la construcción»,

y respecto de las bóvedas, decía que buscaba que

«sus formas tuvieran propiedades geométricas adecuadas a sus finalidades utilitarias, ornamentales y constructivas».

I₁) Cilindros y conos. Las formas cilíndricas son muy utilizadas por Gaudí en sus primeras obras; por ejemplo, en las bases de las torrecillas de la Casa Vicens, en las torrecillas y las cubiertas de los pabellones de la Finca Güell, en la torre principal y en los cuerpos del Capricho de Comillas, en las torres de las esquinas la Casa Botines o en las torres del Palacio Episcopal de Astorga.

En estos dos últimos edificios las torres cilíndricas son rematadas con pináculos cónicos. Además, dentro de la excelsa originalidad de Gaudí, debemos resaltar el uso espectacular e inteligente de la superficie conoidal en el porche de la entrada del Palacio Episcopal de Astorga: los arcos conoidales de acceso resultan de la intersección del cilindro que configura el porche con semiconos de eje perpendicular a este cilindro.

En el Palacio Güell hay formas conoidales en los capiteles de las columnas interiores de los comedores y en las chimeneas de la azotea. Las chimeneas de la

Casa Batlló también culminan en conos.

I₂) La generación helicoidal. El principio helicoidal combina una o varias rotaciones en torno a un eje y traslación en la dirección de éste, produciendo un complejo movimiento vertical que está vinculado a las hélices cilíndricas, al helicoides y a las rampas helicoidales.

Muchas columnas (en el Parque Güell, en las Teresianas y en la Casa Milà) y chimeneas de los edificios de Gaudí se basan en el principio helicoidal. Si a éste se le añade la aplicación de homotecias, se alcanza el efecto de la hélice cónica, patente de forma fastuosa en las chimeneas el Palacio Güell y en la aguja del pabellón de entrada al Parque Güell.

El *Helicoides* es una superficie reglada engendrada por una recta que se mueve paralela a un plano y apoyándose en una recta perpendicular a éste y en una hélice asociada a un cilindro que tiene como eje central la recta dada. En la pendiente constante de la hélice se fundamenta el uso del helicoides como escalera. De hecho el helicoides es la superficie inferior de una escalera de caracol. Ejemplos espectaculares de ellas diseñó Gaudí para el Capricho y en diversos accesos a las torres de la Sagrada Familia.

Al considerar todas las rectas tangentes a una hélice fijada en la superficie de un cilindro se obtiene una rampa helicoidal que es una superficie desarrollable (llamada *Helicoides desarrollable*). La rampa helicoidal puede apoyarse sobre rectas del helicoides interior al cilindro prolongadas hacia fuera. Encontramos magníficas rampas helicoidales con funciones de acceso en el Palacio Güell, la Casa Milà y la cripta de la Colonia Güell.

I₃) El Hiperboloide de una hoja. El caso más frecuente se obtiene de la revolución de una hipérbola en torno al eje principal que no corta a la curva. Resulta ser una superficie reglada engendrada por el conjunto de rectas que se apoyan simultáneamente en tres rectas que se cruzan dos a dos. Gaudí descubrió que esta superficie era óptima como campana (que se forma con medio hiperboloide rematado con media esfera); y la empleó en algunas columnas de la entrada y en la bóveda para el giro de carruajes del Parque Güell, en los capiteles de la sala de columnas del Palacio Güell, en la cúpula central de las cuerdas de la Finca Güell y de la Casa Calvet, así como en ventanales de la Sagrada Familia, en relación con la iluminación del templo.

Pero es sobre todo en las bóvedas de la Sagrada Familia donde el hiperboloide de una hoja se convirtió en la pieza fundamental de los techos de las naves. Según C.Buxadé y J.Margarit (en Gaudí. *La búsqueda de la forma*. Lunwerg. Barcelona, 2002, pp.113-114):

«Medio hiperboloide pleno forma el capitel de las columnas que soportan el techo del templo, lo que permite la continuidad con la sección circular de la parte superior de las columnas. El hiperboloide vacío, que muestra su piel interna, es la base para formar el techo de la nave, como un conjunto de claraboyas soportadas por las columnas, por donde se filtrará la luz natural que llega de las cubiertas y también la artificial instalada adecuadamente para producir el efecto similar. [...] El arquitecto resolvió el paso de un hiperboloide de una hoja a otro con paraboloides hiperbólicos, también superficies regladas que pueden mantener la continuidad de las formas resultantes por medio de generatrices comunes. [...] El conjunto de formas hiperbólicas se completa con lóbulos parabólicos y planos diédricos que

acaban de definir la estructura resistente del techo de la nave».

I4) El Paraboloide hiperbólico. Gaudí empezó a utilizar esta superficie en los acabados de alguna chimenea del Palacio Güell y ya de forma más notoria en algunas zonas del techo de la cripta de la Colonia Güell y en el soportal, y en el pabellón de la cubierta de la entrada al Parque Güell. Según C. Alsina (en Gaudí. *La búsqueda de la forma*. Lunwerg. Barcelona, 2002, p.40):

«Fue en la Sagrada Familia donde los paraboloides hiperbólicos hallaron su culminación. Uno de los primeros ejemplos del templo lo encontramos en los ventanales laterales donde los paraboloides hiperbólicos se acoplan a las complejas formas de los hiperboloides de una hoja presentes en torno al centro elíptico en el que forman parte del ventanal. Un segundo caso lo conforman las bases de las grandes columnas, que crean una transición suave entre el suelo plano y el principio de las columnas, con parejas de medios paraboloides hiperbólicos de 16 centímetros simetrizados. En el techo de las naves laterales, los árboles de columnas están rematados por capiteles hiperboloidales, y los paraboloides hiperbólicos se utilizan como solución para suavizar la intersección de los hiperboloides de una hoja, aprovechando restos de los hiperboloides implicados para construir las generatrices de los hiperbólicos. También en la base de los pináculos de la fachada del Nacimiento se observa una combinación interesante de formas. La culminación del uso de los paraboloides hiperbólicos se encuentra en la cubierta superior de las naves y las sacristías, donde las dimensiones son mayores, y también en los campanarios y en el cimborrio, donde estas superficies, que exteriormente muestran la parte cóncava, alcanzan una gran altura».

J) Las superficies no regladas. Ejemplos interesantes de este tipo de superficies son: la impresionante cúpula del Palacio Güell que es un paraboloide de revolución; los elipsoides de los nudos de las columnas de la Sagrada Familia, cuyos semiejes guardan proporciones simples ($1,2/3,1/2$); esferas de las chimeneas de las Casas Batlló y Milà; esferas en el rosario de piedra del Parque Güell y en el remate de las torres de la Sagrada Familia.

K) La maclación de cuerpos geométricos. Es el resultado de la intersección o acoplamiento de diversas estructuras geométricas, sobre todo de superficies regladas, elipsoidales y poliédricas. Aparte de los diversos ejemplos reseñados anteriormente, a propósito del estudio de intersección de poliedros y acoplamiento de varios tipos de figuras tronco-piramidales y tronco-cónicas en los pináculos, así como de hiperboloides de una hoja y de paraboloides hiperbólicos en capiteles y techos de la Sagrada Familia, una de las muestras más espectaculares de maclación está en las columnas de doble giro de la Sagrada Familia que resultan de la intersección de dos columnas que se entrecruzan y se someten, además, a un pautado movimiento helicoidal. Para columnas rectangulares, a partir de la superposición de dos rectángulos que giran de forma opuesta, se crean formas de cuadrado, octógono,...“*hasta llegar el círculo*”. He aquí una aproximación práctica a la exhaución arquimediana.

Otros casos singulares de maclación son: los nudos de elipsoides que coronan las

columnas principales de la Sagrada Familia de donde nace la ramificación siguiente de columnas; las maclas de esferas en chimeneas, el acople de columnas, arcos y paraboloides hiperbólicos en la cripta de la Colonia Güell; o los accesos principales de la Casa de Botines y del Palacio Episcopal de Astorga con sus arcos conoidales.

L) La fractalidad. Quizá uno de los recursos geométricos de mayor genialidad de Gaudí sea la utilización pionera de *fractales* en Arquitectura. La *fractalidad* es el principio natural de crecimiento por autosemejanza que se manifiesta en el crecimiento de los árboles. Gaudí lo utilizó como recurso constructivo estructural de reparto de cargas en las columnas de la Sagrada Familia. Explicado mediante el símil del árbol, la columna principal, actuando como *columna-tronco*, origina, a partir de los *nudos elipsoidales*, nuevas *columnas-ramas*, que soportan y transmiten a la *columna-tronco*, la carga de las gigantescas cubiertas del templo en forma de paraboloide hiperbólico. Parafraseando la célebre expresión: «*divide [la carga] y vencerás*», he aquí una genial manera de distribuir, repartir y transmitir las cargas superiores.

La sabiduría geométrica de Gaudí.

Con su fascinación por los elementos geométricos en los que se basa la belleza incomparable y la funcionalidad práctica de su obra; por su capacidad de optimización que permite conseguir la máxima resistencia con el mínimo de materiales; por su insuperable originalidad al aplicar nuevas formas geométricas al servicio de la luz, el sonido y las cargas; por su magnífica aplicación de la estética de la forma geométrica en apoyo de la estática de la estructura; por su brillante y equilibrada articulación de teoría y práctica, de arte, ciencia y técnica, de simplicidad y complejidad, de austeridad y ornamentación; y por otras muchas cualidades sin par, que tienen su base en la inteligencia, la experiencia y la observación, Gaudí fue un genio excepcional; pero sobre todo fue un sabio, que es mucho más que un científico o un artista, aunque también de ambas condiciones gozaba en grado sumo como científico de la Geometría al servicio del Arte.

Una curiosidad inconmensurable sobre su entorno había acostumbrado a Gaudí a reflexionar, en voz alta o en silencio, en compañía o en soledad, sobre todo lo que le rodeaba, y también sobre todo lo que estudiaba, intuía o imaginaba. De ahí brotaba su cautivadora sabiduría de la que modestamente era muy consciente:

«La sabiduría es superior a la ciencia. La ciencia nos da la certeza de las cosas analizadas; la sabiduría es la riqueza que proporciona la reflexión, es un tesoro.

Y en efecto, toda obra de Gaudí es siempre el fruto final de una profunda reflexión experimental geométrica, ya que para el genial arquitecto, no sólo «*las formas derivadas de la Geometría proporcionan distinción y claridad*» sino que «*la Geometría es el lenguaje propio del Arquitecto*», cuya principal misión consiste en alcanzar la calidad estética al «*hallar las formas geométricas propias de cada función estructural*», aunando forma y función en toda búsqueda geométrica experimental.

La espectacularidad de las formas, la riqueza de los colores, la variedad de los

materiales, la complejidad del simbolismo, pueden llegar a ocultar al conocimiento la dimensión más profunda de la Arquitectura de Gaudí vinculada de forma indisociable a los conceptos de espacio, geometría y estructura, que fundamentan una lógica constructiva incuestionable, que enfatizará el propio arquitecto:

«Mis ideas son de una lógica indiscutible; lo único que me hace dudar es que no hayan sido aplicadas anteriormente y que tenga que ser yo el primero en hacerlo».

Huyendo de la geometría especulativa ajena a la realidad, al trascender la geometría de la escuadra y el compás con la aplicación de una inmensa parafernalia de curvas geométricas y superficies regladas, Gaudí encuentra infinidad de posibilidades formales y constructivas que han conformado no sólo un legado arquitectónico de proyección mundial, sino un ámbito de investigación científica sobre la llamada Geometría gaudiniana –en especial respecto de la construcción de la Sagrada Familia–, que merced a las técnicas informáticas actuales permite tanto la comprensión de las soluciones geométricas adoptadas por Gaudí como la exploración matemática y estructural de nuevos mundos de curvas, superficies y relaciones espaciales para la Arquitectura del futuro.

Bibliografía.

Textos y artículos:

- Alsina, C.: *Gaudí, Geométricamente*. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME). Vol.5, núm.3 (2002), 523-539.
- Bassegoda, J.: *Antonio Gaudí. Vida y Arquitectura*. Obra Cultural de la Caja de Ahorros de Tarragona. 1977.
- Bassegoda, J.: *Gaudí. Arquitectura del futur*. Salvat. Barcelona, 1984.
- Bassegoda, J.: *Gaudí. L'home y l'Obra*. Lunwerg Editores. Barcelona, Madrid, 1999.
- Ciriot, J.: *Gaudí, una introducción a su Arquitectura*. Triangle. Barcelona, 2001.
- Funes, A.: *Gaudí x Gaudí*. Triangle. Barcelona, 2001.
- Giralt-Miracle, D.: (Director): *Gaudí. La búsqueda de la forma*. Lunwerg. Barcelona, 2002.
- González Urbaneja, P.M.: *La Matemàtica en la creativitat de Gaudí*. Crèdit de Síntesi.
 - <http://www.xtec.es/entitats/abeam/finestra/sjc/>
 - <http://anduril.eupvg.upc.es/semg/inici.html> .
- Pérez, R.: *Gaudí y la Proporción*. Gaceta de la RSME. Vol.5, núm.3 (2002), 540-558.

Prensa:

- Revista GEO. Número especial, 2/2002. *Gaudí, Arquitectura viva*.
- La Vanguardia. *Gaudí, el genio que proyectó Barcelona al mundo*. Suplemento

especial, Año Gaudí, 2002.

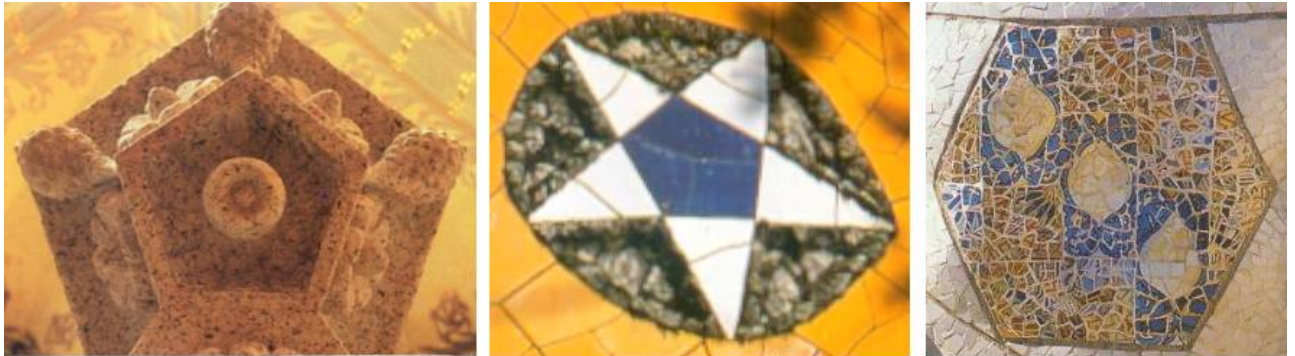
- El País. *Gaudí, el único*. Suplemento Babelia. 28/03/02.

Exposiciones:

- *Gaudí. La recerca de la forma*. Salón del Tinell. Barcelona. 21/03-29/09 de 2002.
- *Gaudí. La búsqueda de la forma. Espacio, geometría, estructura y construcción*. Casa Botines de Gaudí. León. 05/11/02 – 02/02/03.
- *El obrador de Gaudí. Gaudí y su taller*. Museo del templo de la Sagrada Familia. Barcelona. 16/06/02 – 31/12/02.
- *Dalí-Gaudí. La revolució del sentiment d'originalitat*. Barcelona. La Pedrera. 08/04/04 – 16/05/04.

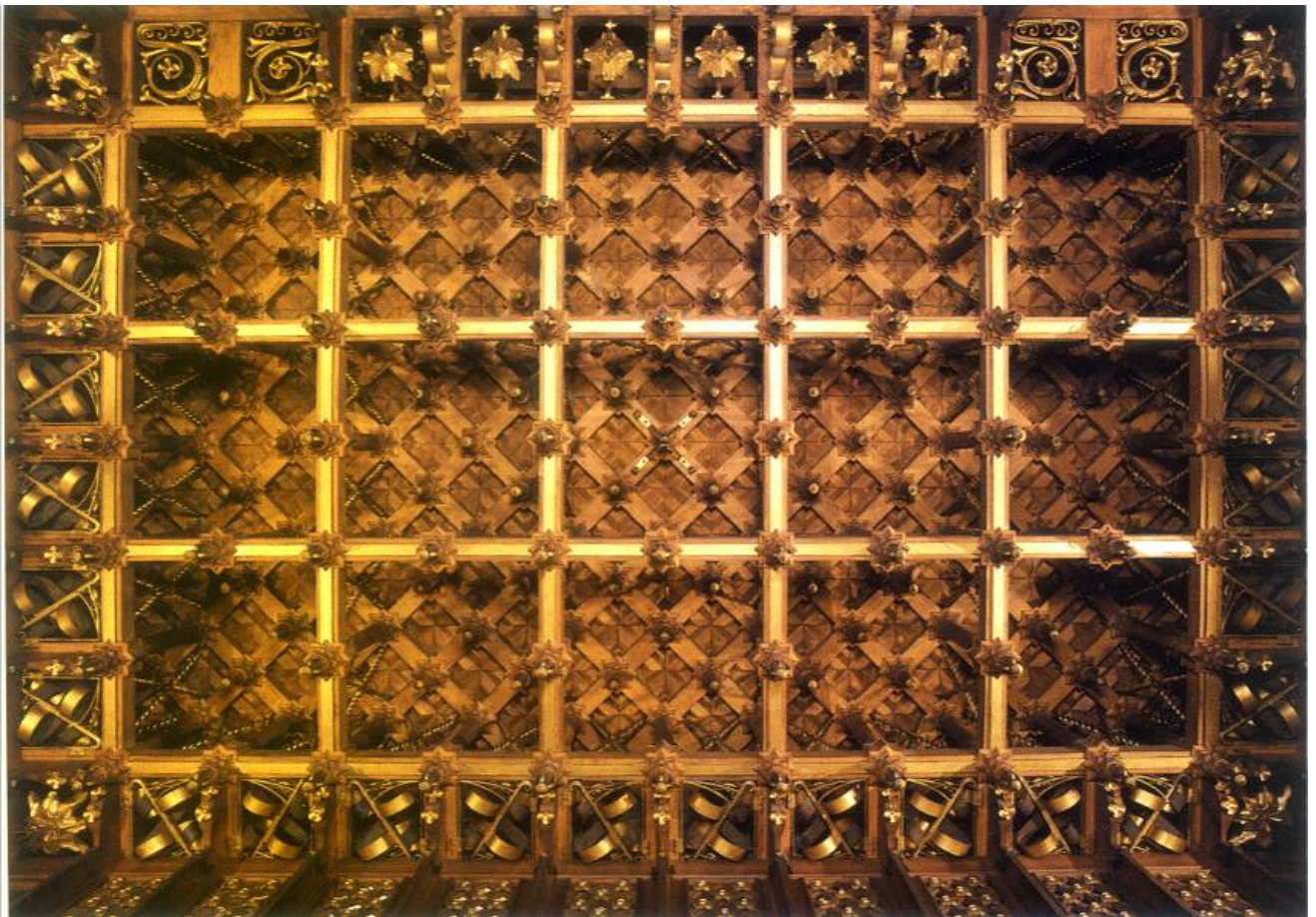
Apéndice 1. Algunos monumentos emblemáticos de la Geometría de Gaudí.

Formas poligonales de Gaudí

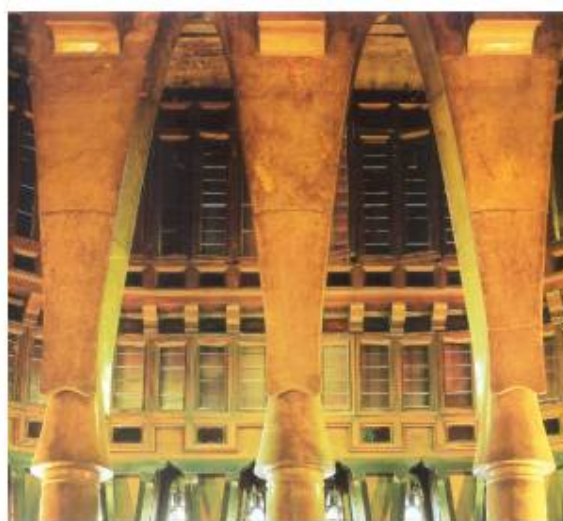


Formas poligonales de Gaudí:

1. Pentágonos regulares en un capitel del Palacio Episcopal de Astorga.
2. La estrella pitagórica ("*Pentagrama místico*") en un mosaico del Parque Güell.
3. Hexágono regular de "*trencadís*" en un mosaico del Parque Güell.
4. Formas cuadradas en el artesanado del Palacio Güell



Formas parabólico-catenarias en los arcos de Gaudí

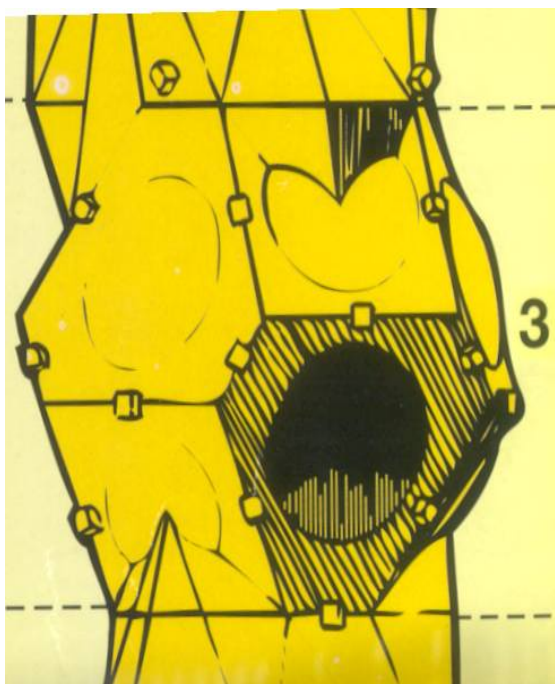


1,2,3: Colegio de Santa Teresa: (1. Corredor del primer piso. 2. Entrada. 3. Corredor planta baja).
4. Arco parabólico en una terraza de la Pedrera bajo el que se divisa las torres de la Sagrada Família.
5. Casa Batlló (fachada principal). 6. Celler de la Colonia Güell.
7,8: Palau Güell: (7. Sala de columnas con arcos parabólicos y capiteles hiperbólicos. 8. Entrada).

Formas poliédricas en la Sagrada Familia



1. Las torres de la Sagrada Familia, por su despliegue geométrico poliédrico, donde abunda las maclas de cuerpos geométricos, fue el anagrama del Año Mundial (2000) de las Matemáticas en Cataluña.
2. Lámpara con forma de dodecaedro de la cripta de la Sagrada Familia.
3. Pináculo de San Bernabé de la Sagrada Familia. Poliedro pseudoregular obtenido al truncar los vértices de un octaedro o de un cubo con una esfera interior, secante en todas sus caras, dos de ellas perforadas para dar paso a focos luminosos.



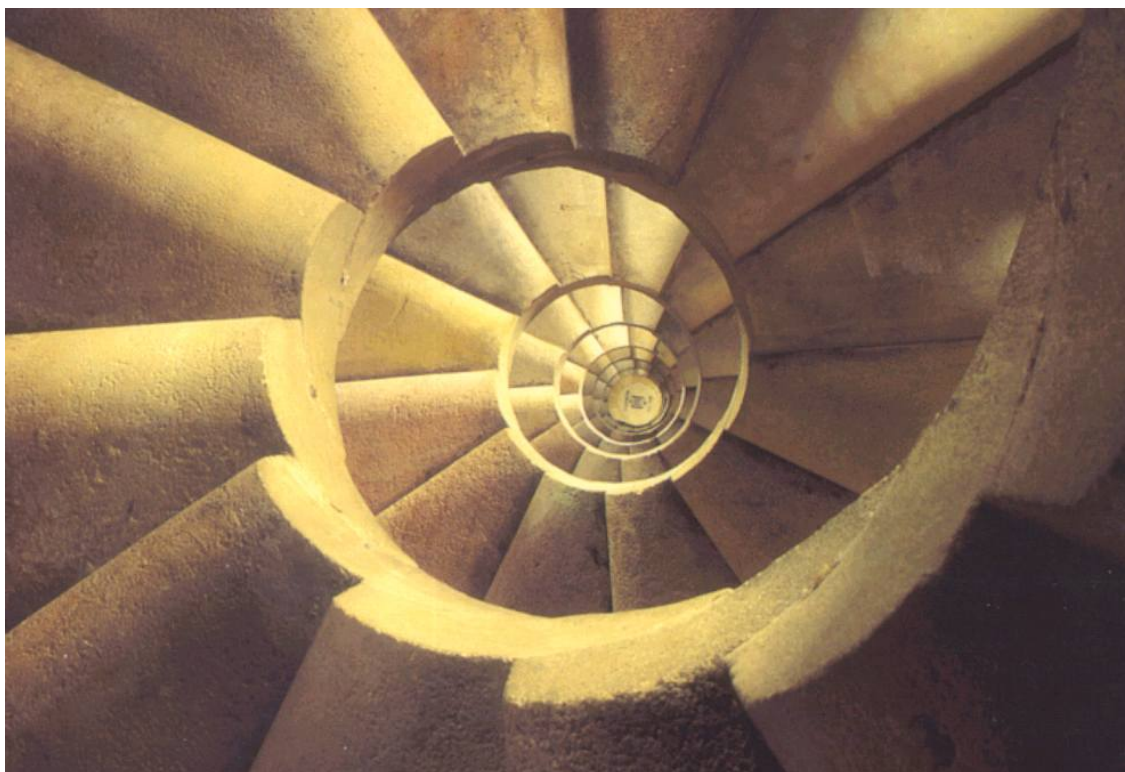
Formas helicoidales de Gaudí



**Colegio de Teresianas.
Columnas helicoidales.**

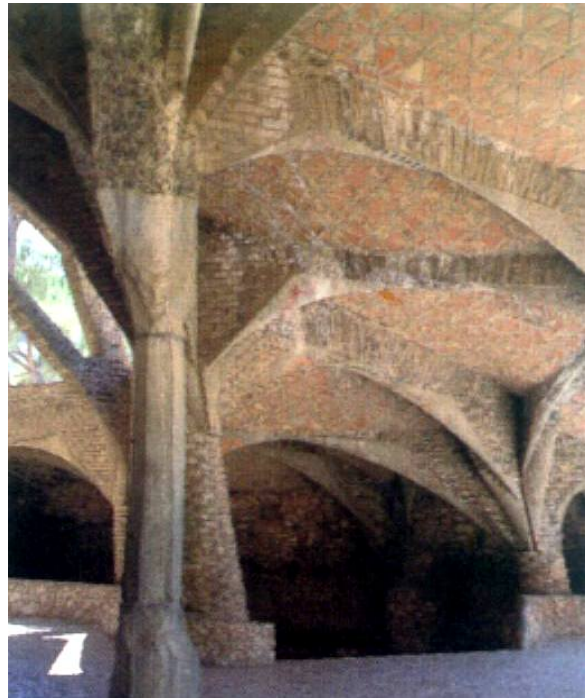
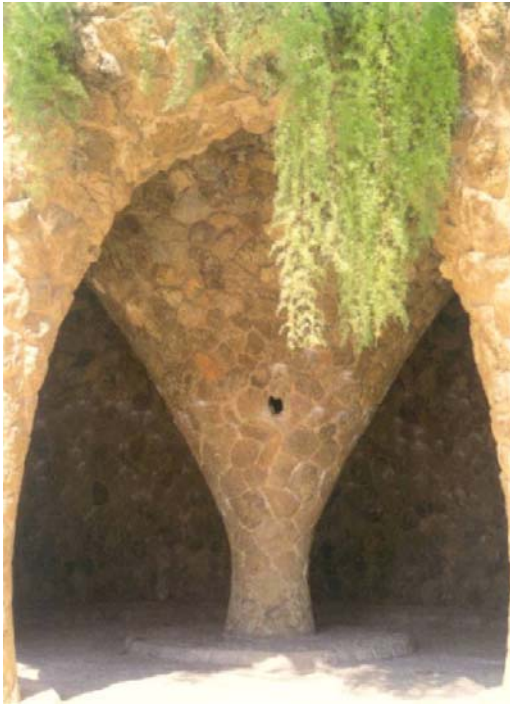


**Palacio Güell. Chimeneas
helicoidales tronco-cónicas.**



Escalera de caracol en la Sagrada Familia

Superficies regladas de Gaudí



1. Parque Güell: Hiperboloide de una hoja.
2. Iglesia de la Colonia Guell. Paraboloide hiperbólico en la bóveda del soportal.

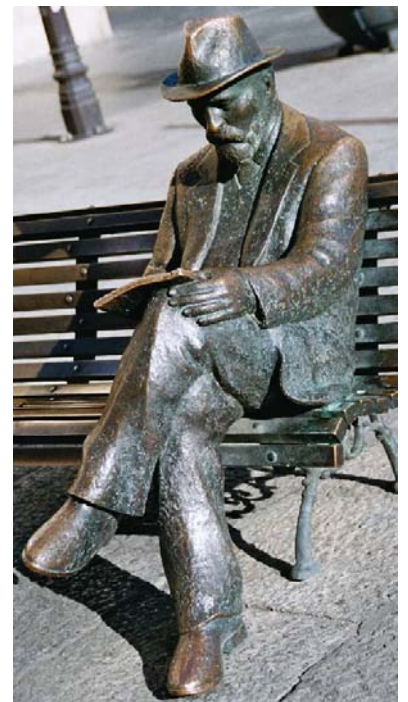


Hiperboloides de una hoja y paraboloides hiperbólicos en las naves de la Sagrada Familia que se sostienen sobre un bosque de columnas fractales donde las columnas tronco originan a partir de nudos elipsoidales las nuevas columnas ramas que transmiten la carga.

La Arquitectura de Gaudí en la provincia de León



La Casa de los Botines de León y el Palacio Episcopal de Astorga son dos de los más importantes y originales edificios de Gaudí, donde destacan como recursos geométricos la traslación, la simetrización, las superficies regladas de revolución (conos y cilindros) y sobre todo la técnica de vaciado en los arcos, que en el caso del Palacio Episcopal de Astorga es de una inteligencia espectacular: los arcos conoidales de acceso resultan de la intersección del cilindro que configura el porche con semiconos de eje perpendicular a este cilindro.



Gaudí enfrente de la Casa de los Botines

Apéndice 2. La Geometría de Gaudí en la clase de Matemáticas.

La Geometría de Gaudí es una fuente inagotable de experiencias y actividades didácticas en la clase de Matemáticas en relación con algunos de los recursos geométricos utilizados por el gran arquitecto, en especial los relativos a la traslación y la simetrización y a las múltiples formas poligonales y curvilíneas. La intervención palmaria de la Geometría en la creatividad del genio artístico de Gaudí, desplegado en multitud de monumentos, puede ser un pretexto para iniciar, continuar o en su caso profundizar en diversos temas geométricos del currículum de la Matemática secundaria.

A título de ejemplo, los profesores de mi centro de trabajo preparamos un *Crédito de Síntesis* para tercero de ESO, en el curso 2001/02, titulado «*La Matemàtica en la creativitat de Gaudí*», donde aprovechamos numerosos aspectos de la Geometría que da forma y conforma casi todas las obras arquitectónicas de Gaudí para ilustrar, con su genial y sabia autoridad artística, rasgos geométricos de diversos polígonos –cuadrados, pentágonos, hexágonos–, algunos poliedros y multitud de curvas –parábolas, catenarias, etc.– y también cuestiones aritméticas –*cuadrados mágicos* de Subirachs–, conjugando de forma interdisciplinar numerosas cuestiones de Arte y Matemáticas. Incluso la Geometría visual de los edificios de Gaudí permite explicar a los alumnos, de forma intuitiva, formas geométricas, como superficies regladas, que tardarán unos cuantos años en estudiar los que vayan a emprender carreras técnicas.

Los documentos elaborados son accesibles por Internet en las páginas:

<http://www.xtec.es/entitats/abeam/finestra/sjc/>

<http://anduril.eupvg.upc.es/semg/inici.html>



I.E.S. Sant Josep de Calassanç

Departament de Matemàtiques

**LA MATEMÀTICA
EN LA CREATIVITAT
DE GAUDÍ**

Cliqueu on us interressi



Cliqueu on us interressi Família



CRÈDIT DE SÍNTESI

3er de ESO

Curs 2001-02

Pedro M. González Urbaneja

Josep M^a Lamarca París

Alfredo Quintana Zamora

Portada de la página Web: <http://www.xtec.es/entitats/abeam/finestra/sjc/>
que contiene la documentación elaborada para los alumnos del *Crédito de Síntesis*
«*La Matemàtica en la creativitat de Gaudí*»,