



Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas



Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 4

“ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD. COMO IMPEDIR EL ODIO A LA ESTADÍSTICA”

PONENCIAS

D. José Luis Álvarez García

**“ESTADÍSTICA, ¿EL PATITO FEO DE LA PROGRAMACIÓN?
ALGUNOS CENTROS DE INTERÉS PARA DESARROLLAR LA
ESTADÍSTICA EN LA ESO”** _____ **225**

D. J.A. García Cruz

**“LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO EN LA ENSEÑANZA DE
LA INFERENCIA ESTADÍSTICA”** _____ **237**

Dña. Belén Cobo Merino

**“LA ESTADÍSTICA EN LOS CURRÍCULOS DE LA EDUCACIÓN
OBLIGATORIA. ¿QUÉ HAY Y QUÉ SE HACE?”** _____ **249**

**ESTADÍSTICA, ¿EL PATITO FEO DE LA PROGRAMACIÓN?
ALGUNOS CENTROS DE INTERÉS PARA DESARROLLAR
LA ESTADÍSTICA EN LA ESO**

*José Luis Álvarez García
IES nº5 de Avilés (Asturias)
SADEM Agustín de Pedrayes*

Año tras año, reforma tras reforma algo parece no tener remedio: los temas de Estadística son los primeros en caerse de la programación, especialmente cuando el tiempo aprieta y hay que hacer recortes. ¿Tendrá eso alguna solución? ¿O es que la Estadística ha de jugar siempre el papel del patito feo en la programación? Les propongo reflexionar un poco sobre esto y para ello comenzaremos con un poco de historia.

Hace algo más de 20 años, concretamente en 1984, un par de compañeros realizamos una convocatoria a todo el profesorado de matemáticas de secundaria de Asturias, proponiendo la constitución de un grupo de trabajo (eran los buenos tiempos de los grupos Cero y Zero, por ejemplo) con la finalidad de mejorar la enseñanza de las matemáticas. Finalmente ese grupo se constituyó con unas diez personas (fue el embrión de lo que más adelante sería la Sociedad Asturiana de Educación Matemática Agustín de Pedrayes). Pues bien, el tema que elegimos para empezar a trabajar fue precisamente la Estadística y el Azar, proyecto que dio lugar unos años más tarde a un libro que llevaba por título Estadística y Azar en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

La razón por la que elegimos este tema tiene que ver con el proceso experimental de reforma de las enseñanzas medias que precedió a la Logse. En efecto, por aquellos tiempos algunas personas estábamos en centros en los que se empezaba a experimentar lo que se denominó bachiller general, que equivalía a los actuales 3º y 4º de ESO. Los cambios curriculares eran muy profundos, tanto en la definición de objetivos y selección de contenidos como en la metodología que se proponía. Además, para la mayoría de los que estábamos inmersos en aquél proceso fueron años muy ilusionantes.

La Estadística y el Azar suponían aproximadamente un tercio de la programación en ambos cursos. Poco tenía que ver además la forma que se proponía para su enseñanza con lo que habíamos hecho hasta entonces. En el caso de la Estadística el título de un librito de la época refleja el sentido de lo que se trataba de conseguir: “*hacer estadística*”. Los cambios eran particularmente notables también en el caso de la probabilidad, destacando dos cosas: el acercamiento al azar a partir del análisis de datos recogidos en experiencias aleatorias y el uso de técnicas más elementales y descriptivas, para el tratamiento de los fenómenos de azar, como las tablas y los diagramas de árbol,

en detrimento de otras técnicas de recuento más formales, basadas en la combinatoria clásica.

Se abrían en definitiva nuevas expectativas para el tratamiento en el aula de este bloque temático, pero apenas se contaba con materiales y experiencias, por lo que era un campo en el que había mucho que trabajar. Por esa razón principalmente elegimos este tema para centrar el trabajo de nuestro grupo.

El proceso de reforma de las enseñanzas medias cambió de manera radical poco tiempo después. De aquella idea inicial que retrataba Pepe Segovia con la idea de *“la mancha de aceite que se va extendiendo”*, se pasó a un modelo de implantación más clásico. La diferencia en todos los aspectos es abismal, pero no me extenderé sobre ello, por no ser el propósito de esta ponencia, aunque habría mucho que decir ya que tal vez en ello estén algunas de las claves para explicar, entre otras cosas, el sentido del título que le he puesto a esta ponencia.

En 1990 se aprueba la LOGSE. A partir del curso 1992-93 comienza a implantarse gradualmente la etapa 12-16, más conocida por Enseñanza Secundaria Obligatoria o por sus iniciales ESO. En relación con los temas de Estadística y Azar el currículo establecido recogía básicamente lo que se estaba haciendo en el proceso experimental, incluyendo además orientaciones metodológicas y para la evaluación para su tratamiento en el aula que también suponían una continuidad con lo que se estaba haciendo en el proceso experimental preliminar.

A lo largo de todo este tiempo que estamos recordando fueron apareciendo muchas propuestas para el aula, en forma de libros, cuadernos para el aula, maletines de materiales, software, etc. Algunos libros de texto también se adaptaron al nuevo enfoque, aunque lamentablemente otros, tal vez la mayoría, siguieran obedeciendo al esquema clásico de tratamiento. En particular también sucedía esto con la Estadística y con la Probabilidad.

Sin embargo si analizamos los cambios que después de este proceso se han producido en la práctica real del aula el panorama es absolutamente frustrante. Como decíamos al inicio, la estadística sigue siendo el tema que más habitualmente se cae de las programaciones. Cuando se trata, salvo por la actualidad de los datos que se manejan, en el fondo se hace lo mismo de siempre. Y yo creo que ahora no se puede decir como 20 años atrás que es que nos faltan recursos para poder enseñar la estadística y la probabilidad de otra forma: en general hay un buen número de materiales y propuestas al alcance de todo el mundo.

La disculpa casi siempre para dejar de impartir la estadística es la falta de tiempo. Pero, ¿es realmente por falta de tiempo? Si es por eso, ¿por qué no se caen las ecuaciones o los polinomios o al menos un año una cosa y otro otra diferente? Parece que no, que lo que se cae es la estadística y si hubiera alguna duda quizás sería la geometría.

A propósito de esto me gustaría comentar un caso del que he tenido conocimiento hace poco, porque resulta muy significativo. Se trata de un centro privado concertado de mi ciudad, Avilés, y en concreto de 4º de la ESO. Lo primero que sorprende es lo espabilados que son en este centro, pues consiguen sacar 5 horas de clase semanales de matemáticas, cuando lo establecido en Asturias son 3. ¿Cómo lo consiguen? Muy fácil: a todos los alumnos se les hace optar por Taller de Matemáticas, que en realidad será una asignatura optativa de tapadera. En la práctica las dos horas de la optativa se unen a las tres de matemáticas y ¡ya está! Pardillos que somos algunos, pues parece ser que la idea no es demasiado original y se aplica en otros muchos centros. Cabe pensar por tanto que con tanto tiempo podrían desarrollar holgadamente toda la programación. pues no, ¡no se da absolutamente nada de Estadística, ni de Probabilidad! Eso sí, se da cálculo de límites y de derivadas, ..., y también, con toda la profundidad imaginable la

combinatoria clásica, incluyendo ecuaciones con números combinatorios, etc. Así que, ¿es realmente la falta de tiempo la que impide que se dé la Estadística? Me temo que no, que las razones son más profundas y tienen que ver con la poca apreciación que buena parte del profesorado en ejercicio tiene hacia este bloque de contenidos.

Así pues, pese a los buenos intentos de la LOGSE, en lo que se refiere a la estadística estamos como estábamos antes: poco o nada ha cambiado. La reforma del currículo del año 2000 tampoco sirvió para resolver el problema. Más bien al contrario, la única parte del currículo en la que se recortaron contenidos mínimos fue precisamente en la Estadística (basta ver la desaparición de las distribuciones bidimensionales de la opción B de 4º de ESO).

En definitiva parece claro que la presencia de la estadística en el currículo oficial no basta para garantizar que se desarrolle adecuadamente en el aula. Podríamos decir en términos más matemáticos que es una condición necesaria pero no suficiente.

Sin embargo sí que hay argumentos más contundentes para defender una amplia presencia de la estadística en el currículo y para ello no tenemos más que mirar a nuestro alrededor. En efecto: por simple que sea el análisis que hagamos de cuáles son los contenidos matemáticos que más presencia tienen en nuestra sociedad y, en consecuencia, cuáles deben ser los conocimientos matemáticos que nuestros alumnos deben poseer para ejercer una ciudadanía inteligente, es indudable que la estadística ocupa un lugar destacado. En un primer momento podemos tener esa percepción por la amplia presencia que la información de tipo estadístico tiene en los medios de comunicación, pero a mi entender no es esa la principal razón. Pienso que la enseñanza de la estadística y la probabilidad son imprescindibles en un mundo en el que el análisis de datos y la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre son situaciones con las que nos encontramos casi continuamente en nuestra vida cotidiana. En definitiva, las técnicas estadísticas y un sólido conocimiento de los fenómenos de azar son herramientas imprescindibles para cualquier ciudadano en esta sociedad en la que vivimos.

Ese mismo análisis también nos proporciona pautas para el tratamiento de estos temas en el aula. Basta comparar las tareas, ejercicios y problemas, que se proponen habitualmente en la mayoría de los libros de texto para la enseñanza de la Estadística con los problemas reales que un ciudadano se supone que ha de resolver con ayuda de esos conocimientos. En efecto, poca o nula presencia tienen entre las actividades escolares cuestiones como decidir qué datos son los que necesitamos para conocer algo, cómo podemos obtenerlos, cuál puede ser la mejor forma de organizarlos, es decir, cuáles pueden ser las tablas o las gráficas más adecuadas para presentarlos, qué parámetros utilizar en una situación determinada, qué interpretación conjunta cabe hacer a partir de los datos organizados y de los cálculos efectuados, ... Y menos frecuente aún es encontrarse con actividades que planteen la toma de alguna decisión a partir de los datos analizados, pidiendo además al hacerlo el margen de incertidumbre correspondiente.

Sin embargo esas son básicamente las cuestiones fundamentales que se nos pueden plantear en nuestra vida cotidiana y esos son, por tanto, los retos a los que ha de responder la enseñanza de la estadística y el azar.

Seguramente todos habréis leído y oído mucho acerca informe PISA, sobre todo hace unos meses al conocerse los resultados del segundo informe y hace tres años al publicarse el primero. En cualquier caso quien quiera saber más sobre estos informes seguro que encontrará estos días la forma de lograrlo, ya que en el programa de estas JAEM hay una presencia notable de ponencias y comunicaciones relacionadas con este proyecto.

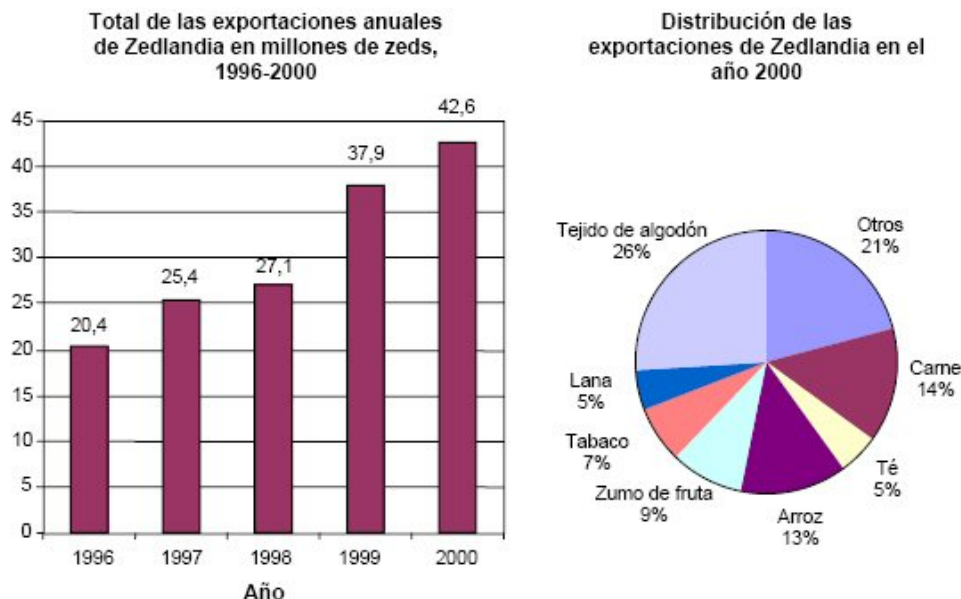
El Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos, más conocido por PISA (Programme for International Student Assessment), es un estudio de evaluación internacional del rendimiento de los alumnos de 15 años, realizado a iniciativa y bajo la coordinación de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE) y cuyo principal objetivo es conocer como están preparados los alumnos de esa edad para afrontar los retos de la vida adulta en un contexto de vida cotidiana. Las materias evaluadas son: Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de problemas. Los estudios PISA se repiten cada tres años. En cada uno de ellos se profundiza especialmente en una de las materias: en el segundo, en 2003, fueron las matemáticas .

Esta concepción de la estadística, en la que se destaca el aspecto más funcional de los conocimientos, también queda reflejado muy claramente en los Marcos Teóricos de PISA 2003, cuando se afirma que *“La estadística aporta a la formación matemática algo importante y único: el razonamiento a partir de datos empíricos inciertos. Este tipo de pensamiento estadístico debería ser parte del equipamiento mental de todo ciudadano inteligente”*

Asimismo, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática propuestos por el NCTM en el año 2000 y traducidos por la SAEM Thales, también se parte de una concepción similar de la estadística cuando se indica que *“Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para formular preguntas que puedan abordarse con datos y recoger, organizar y presentar datos relevantes para responderlas; seleccionar y utilizar los métodos estadísticos apropiados para analizar los datos; desarrollar y evaluar inferencias y predicciones basadas en datos; comprender y aplicar conceptos básicos de probabilidad”*.

Pero volvamos al proyecto PISA. No conocemos la totalidad de los problemas propuestos a los estudiantes en las dos ediciones realizadas de la encuesta, aunque sí algunos ejemplos. Ello es debido a que algunos de ellos se consideran “preguntas reservadas” y, tal como su nombre indica, se reservan para posteriores repeticiones de la encuesta, de modo que los resultados alcanzados en las mismas sean más fácilmente comparables. Por el contrario, otras preguntas se consideran liberadas y se hacen públicas. También se hacen públicos los resultados alcanzados en algunas de estas preguntas y los criterios utilizados para su calificación. Merece la pena analizar algunas de las preguntas relacionadas con la estadística. Una de ellas era la siguiente:

Los siguientes diagramas muestran información sobre las exportaciones de Zedlandia, un país cuya moneda es el zed.



¿Cuál fue el valor total (en millones de zeds) de las exportaciones de Zedlandia en 1998?

¿Cuál fue el valor de las exportaciones de zumo de fruta de Zedlandia en el año 2000?

- 1,8 millones de zeds.
- 2,3 millones de zeds.
- 2,4 millones de zeds.
- 3,4 millones de zeds.
- 3,8 millones de zeds.

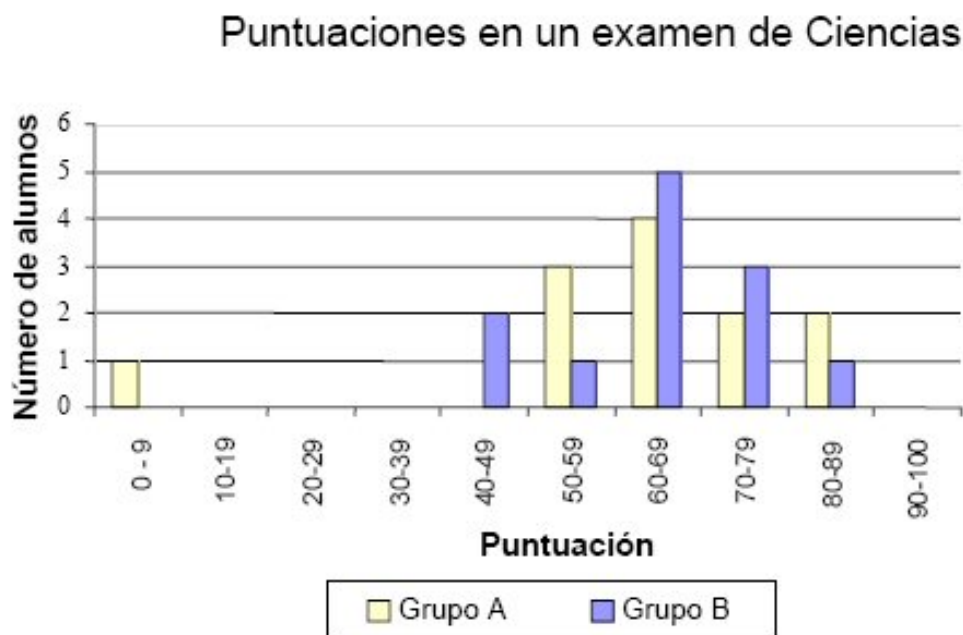
La respuesta a la primera pregunta exige únicamente la lectura directa en la gráfica. Responden acertadamente el 83 % de los estudiantes españoles, 4 puntos por encima de la media de la OCDE. Sin embargo, la respuesta a la segunda pregunta exige consultar ambas gráficas y realizar una operación con los datos encontrados. Ahora el nivel de aciertos baja al 42%, 7 puntos por debajo de la media de la OCDE.

Otra de las preguntas liberadas era la siguiente:

En el colegio de Irene, su profesora de ciencias les hace exámenes que se puntúan de 0 a 100. Irene tiene una media de 60 puntos de sus primeros cuatro exámenes de ciencias. En el quinto examen sacó 80 puntos. ¿Cuál es la media de las notas de Irene en ciencias tras los cinco exámenes?

En esta pregunta el porcentaje de aciertos del alumnado español fue solamente de un 30%. Pero más difícil aún resultó el siguiente problema, en el que solamente dio la respuesta acertada el 27,8% de los estudiantes españoles:

El diagrama siguiente muestra los resultados en un examen de Ciencias de dos grupos, denominados Grupo A y Grupo B. La puntuación media del Grupo A es 62,0 y la media del Grupo B es 64,5. Los alumnos aprueban este examen cuando su puntuación es 50 o más puntos.



Al observar el diagrama, el profesor afirma que, en este examen, el Grupo B fue mejor que el Grupo A. Los alumnos del Grupo A no están de acuerdo con su profesor. Intentan convencer al profesor de que el Grupo B no tiene porqué haber sido necesariamente el mejor en este examen.

Da un argumento matemático, utilizando la información del diagrama, que puedan utilizar los alumnos del Grupo A.

Los resultados obtenidos en mi opinión son un reflejo del modelo de enseñanza que han recibido esos estudiantes. Casi seguro que ninguno de ellos tendría problemas para construir las gráficas que se presentan, si fuera el caso, ni tampoco para hacer lecturas puntuales en las mismas o cálculos de medias, eso sí, a partir de todos los datos. Sin embargo, salvo la primera cuestión del primero de los problemas, el resto son preguntas que no tienen una respuesta directa en la lectura de la gráfica o en un cálculo.

Pero incluso si se tratara de construir gráficas, tal vez los resultados tampoco serían muy buenos si en vez de pedir la construcción de una gráfica en particular se planten preguntas más abiertas, del tipo: construye un gráfico que sea adecuado para ...

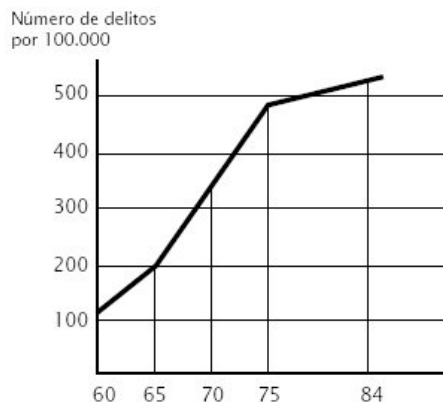
El siguiente ejemplo, que aparece también en los Marcos Teóricos de PISA 2003, puede ilustrar mejor esta idea:

El siguiente gráfico se ha extraído de la revista semanal de Zedlandia Las Noticias:



Muestra el número de delitos registrados por cada 100.000 habitantes comenzando por intervalos de cinco años y cambiando luego a intervalos de un año. ¿Cuántos delitos registrados por cada 100.000 habitantes hubo en 1960?

Los fabricantes de sistemas de seguridad utilizaron estos mismos datos para elaborar el siguiente gráfico:



¡El delito se triplica!
DETENGA
su crecimiento

•COMPRESISTEMAS DE ALARMA•

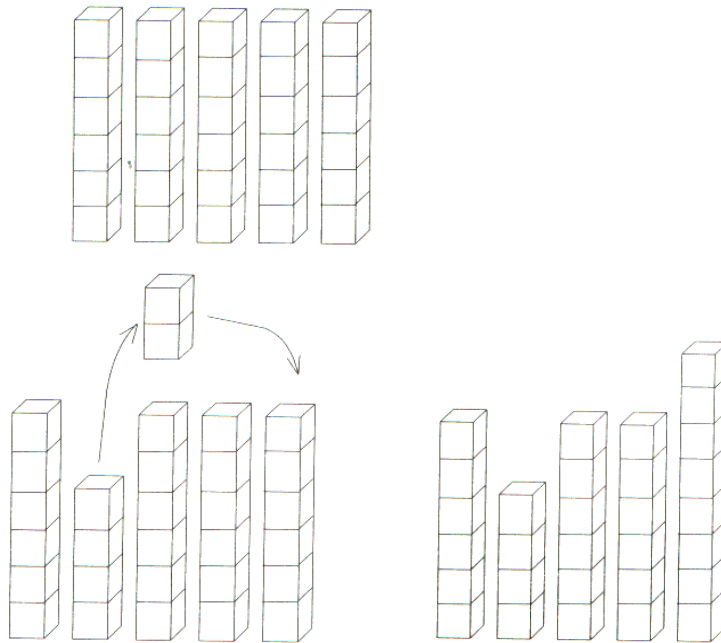
¿Cómo llegaron los diseñadores a elaborar este gráfico y por qué?

A la policía no le gustó el gráfico de los fabricantes de sistemas de seguridad porque la policía quería demostrar el éxito que había tenido en su lucha contra la delincuencia. Diseña un gráfico que pueda usar la policía para demostrar que la delincuencia se ha reducido en los últimos tiempos.

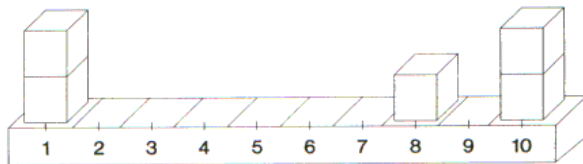
En el caso de las gráficas, no cabe duda que los aspectos técnicos tienen importancia, pero no se deben obviar los aspectos funcionales y los estéticos. En el ejemplo anterior, se utilizan los mismos datos para construir los dos gráficos, pero la interpretación de ambos es muy diferente. Tomando los datos de 1980 en adelante la policía puede construir un gráfico de cuya lectura se extraerían conclusiones absolutamente opuestas a

las de las compañías de seguridad. Trabajar estos aspectos en el aula es la mejor garantía para educar ciudadanos críticos ante la información que van a recibir. Han de percibir que en la mayoría de las ocasiones la estadística se “cocina”, como vulgarmente se dice. Han de apreciar que tanto los datos que les presentan como la forma en que se hace responden en general al interés de quien los presenta. El mundo de la publicidad y el de los sondeos de opinión proporcionan interesantes contextos para trabajar estos aspectos en el aula.

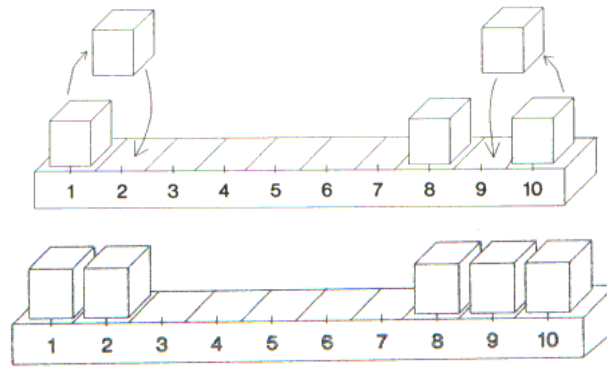
También es muy importante comprender bien el significado de los parámetros estadísticos y adquirir criterios para utilizar uno u otro en función de la situación de que se trate. La mayoría de las veces el concepto de media que adquieren los alumnos se queda en “la cuenta” que hacen para su cálculo: la suma de los datos dividido entre el número total. Con una idea tan simple es difícil que interioricen y apliquen consecuentemente las importantes propiedades de la media. El concepto de media, en tanto que situación de equilibrio, de reparto en partes iguales, ... es fácil de adquirir si hacemos uso de algún recurso manipulativo.



También puede utilizarse la manipulación para comprender que la media se corresponde con el punto de equilibrio del histograma o del diagrama de barras.

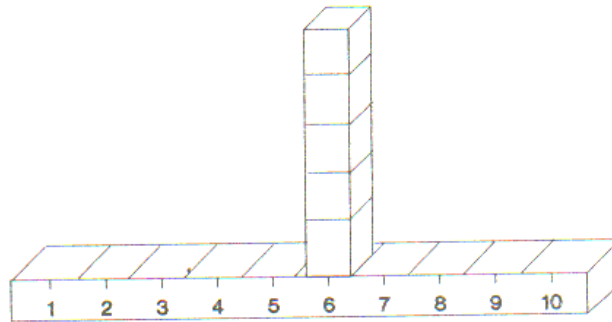


A partir de este diagrama, movemos uno de los cubitos manteniendo el equilibrio, hasta que logramos colocar todos los cubitos sobre un mismo valor:

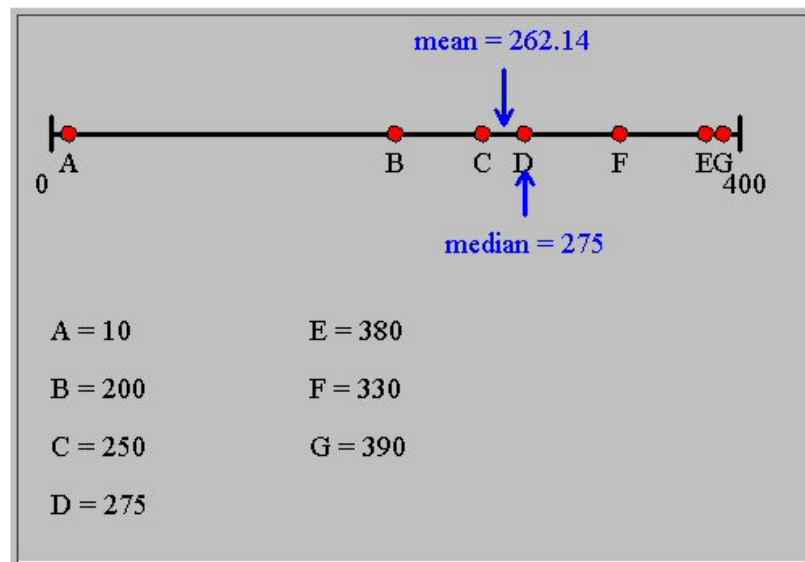


Con esta manipulación, el número de elementos de la colección y su suma total no varía: hemos sumado y restado, a la vez, una unidad, pero seguimos teniendo cinco elementos. Por tanto, la media aritmética no ha variado.

Repitiendo manipulaciones similares, podemos llegar a situar los cinco cubitos sobre un mismo valor. Finalmente obtenemos una colección de cinco elementos iguales: ese valor común es, precisamente, el valor de la media aritmética.



Existen también applets muy interesantes que permiten explorar las propiedades de la media y de la mediana haciendo uso de las nuevas tecnologías:



Para tener un conocimiento básico de la estadística es muy importante percibir globalmente todo el proceso, conocer las cuestiones que se han de resolver en cada etapa y las técnicas y conceptos necesarios, así como tener presentes las relaciones e implicaciones que se derivan de las decisiones que se van tomando. En otros campos de

las matemáticas esa percepción global es casi siempre aconsejable, pero en la estadística resulta imprescindible.

Coherentemente con este principio, en nuestra propuesta didáctica se considera fundamental la realización de estudios estadísticos completos, que conlleven desde las primeras decisiones acerca del tema objeto de estudio, la forma en que se va a llevar a cabo la recogida de información, la propia recogida de la misma, el vaciado de los cuestionarios o la tabulación de los datos recogidos, ... hasta el informe final en que se hace una interpretación general de los datos recogidos y se extraen las oportunas conclusiones, valorando asimismo, en su caso, la fiabilidad de las mismas.

Ese estudio estadístico que se va realizando constituye el hilo conductor que liga los diferentes contenidos de Estadística. Comenzamos a estudiar estadística cuando nos planteamos el problema que vamos a resolver y vamos estudiando las técnicas concretas para cada fase conforme nos resultan necesarias para avanzar en nuestro estudio.

Tiene una gran importancia la elección del tema para dicho estudio, dado que, como se ha dicho, ha de servir para poner en práctica las diferentes técnicas y conceptos que irán apareciendo, con el nivel de profundidad que en cada curso se requiere, y a la vez, tener la suficiente relevancia para mantener el interés de los estudiantes a lo largo de todo el proceso.

Cuando el alumnado se incorpora a la educación secundaria ya posee algunos conocimientos elementales de estadística. No suele tener problemas para hacer lecturas directas de una gráfica o de una tabla de doble entrada o para calcular la media a partir de unos pocos datos. Con esas técnicas elementales y un poco más que podamos avanzar en las mismas es suficiente para llevar a cabo ya un estudio estadístico en el primer curso de ESO.

Por eso el principal objetivo no va a ser tanto el aprendizaje de técnicas nuevas, sino proporcionar una visión global del proceso estadístico y dejar clara su finalidad: dar respuesta a un problema que exige la toma de datos, su procesamiento y, finalmente, la interpretación de los resultados que llevará a la solución del problema inicial.

La estadística, por otra parte, también puede contribuir al desarrollo psicológico y social del alumnado. En efecto, en los niveles educativos más elementales si se recogen datos del grupo la tendencia natural de los alumnos es observar su dato concreto, o el de sus amigos, etc., pero raramente se paran a considerar los datos en su conjunto. Por ello, dado que en el análisis de los datos estadísticos se pierde la identificación de cada individuo y se atiende únicamente a la caracterización del colectivo, es un buen momento para fomentar el interés por los aspectos que mejor describen al grupo como tal y no a individuos concretos del mismo. Además, dado que en este primer curso no se trabajará con muestras, es importante que el problema a plantear no lo exija. Por ambas cosas resulta muy aconsejable que el estudio se centre en alguna característica interesante de la propia clase. También podría hacerse alguna simulación probabilística, para la cual fuera necesaria la colaboración de todos los alumnos del grupo.

Así pues, el estudio estadístico podría proponerse para buscar respuestas a preguntas tales como:

¿Nos alimentamos bien? ¿Qué desayunamos para venir al instituto? ¿Cuántas calorías nos aporta lo que comemos? ¿Y cuántas necesitamos? ...

Para empezar a jugar al parchís hay que sacar un 5, ¿cuántas veces tenemos que tirar el dado, por término medio, para que nos salga? Si ya lo he tirado tres veces y no me ha salido, ¿tengo que pensar que estoy teniendo mala suerte o eso puede considerarse normal? ...

¿Hacemos deporte? ¿Cuánto tiempo dedicamos? ¿Cuál es nuestro deporte preferido? ...

¿Cuánto tiempo dedicamos al estudio? ¿Cómo lo organizamos? ...

¿A qué dedicamos nuestro tiempo libre? ¿Vemos mucho la tele? ¿Qué programas nos interesan más? ¿Qué música nos gusta? ¿Cuánto tiempo dedicamos a escucharla?
¿Qué tal se nos da calcular longitudes a ojo? ¿Cuánto mide la pizarra? ¿Qué diámetro tiene una moneda de 1 euro? ¿Y una de 1 céntimo? ¿Cuál es la altura de la torre de Pisa? ...

etc.

Si en el primer curso la referencia aconsejable era el grupo-clase, en el siguiente curso de ESO podemos tomar como referencia el centro. El primer año utilizamos la estadística para favorecer el paso del YO al NOSOTROS. Ahora se trata de pasar al NOSOTROS y VOSOTROS. De ahí que sea aconsejable proponer estudios que traten de resolver problemas que tengan como referente el centro, que permitan comparar nuestro grupo con otros, nuestro nivel con otros niveles, etc.

Algunos temas que se pueden proponer pueden ser:

El uso del papel en el centro: ¿cuánto gastamos? ¿En qué se gasta? ¿Qué hacemos con el papel usado? Papel para reciclar y papel para reutilizar.

La organización de los espacios: ¿qué opinión tenemos de cómo están organizados los distintos espacios del centro? ¿Aula grupo o aula materia? Queremos taquillas, pero, ¿dónde las ubicamos? ¿Cómo han de ser?

El horario escolar: ¿Cómo valoramos el horario actual? ¿Preferimos los dos recreos cortos actuales o uno solo más largo? ¿Descanso de cinco minutos entre clase y clase?

Hábitos saludables: consumo de alcohol, tabaco y otros estupefacientes.

El clima escolar en el centro.

En el segundo ciclo de ESO es aconsejable utilizar como referencia el barrio o la ciudad si, como es nuestro caso, no es muy grande.

Algunos temas sobre los que podemos plantear un estudio estadístico pueden ser:

La cesta de la compra: ¿sale igual de barato un supermercado que otro? ¿Ahorramos mucho si en vez de comprar productos con marca compramos en cada caso el artículo más barato que encontramos? ¿Qué pasa con las ofertas?

El gasto familiar: ¿en qué se nos va el sueldo? ¿Cuánto se nos va en la vivienda? Coste de alimentación, vestido y calzado. ¿Cuánto nos cuesta el ocio? ¿Ahorramos algo?

Sondeo de opinión sobre las necesidades del barrio: El Quirinal es un barrio en expansión, ¿qué equipamientos urbanos son precisos para las actuales dimensiones del barrio? ¿Dónde ubicar el nuevo colegio? ¿Y el centro socio-cultural?

Sondeo de opinión sobre un tema de actualidad: el debate del PGOU. La participación ciudadana en el debate. Los problemas generados en el área de Gaxín. La nueva fisonomía del polígono de Valgranda.

Téngase en cuenta que algunos de estos temas se refieren al caso concreto de mi centro escolar. Seguro que será fácil encontrar su adaptación al entorno de cualquier otro centro.

LA CONSTRUCCIÓN DEL SIGNIFICADO EN LA ENSEÑANZA DE LA INFERENCIA ESTADÍSTICA

Juan Antonio García Cruz
Universidad de La Laguna
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas

“Los tenues rayos solares de una tarde de abril penetran a través de las persianas levemente cerradas. La tiza y el borrador están preparados y la pizarra ha sido recientemente borrada. Los estudiantes esperan en clase, unos ojean distraídamente el libro de estadística y probabilidad, otros intercambian comentarios. Se abre la puerta y entra el profesor. La clase de hoy trata de intervalos de confianza.

Si se cumple que la $p(\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2) = 1 - \alpha$ para un valor dado de α , diremos que el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ es un intervalo de confianza, $100(1 - \alpha)\%$, para el parámetro θ .

Los alumnos están muy ocupados copiando la definición en sus cuadernos. Sin embargo, uno de ellos, aclara la voz mediante un garraspeo de la garganta y pregunta: Profesor,...por favor,¿ podría explicarme que es un intervalo de confianza?

Esta anécdota ilustra un hecho muy común en las clases de matemáticas y de estadística. El profesor expone la definición, abstracta del concepto, como punto de partida. La definición abstracta, formal, tiene una gran ventaja, no es ambigua. Pero al mismo tiempo, tiene un gran inconveniente: oculta el significado de los términos que la componen. Nosotros los profesores, si alguna vez estudiamos estadística inferencial en la universidad, fuimos con casi toda seguridad introducidos a los conceptos correspondientes de esta forma. Ese es el modelo en el que aprendimos. Todavía hoy es el modelo imperante en la universidad española. Los modelos en que nacemos y crecemos son los modelos que transmitimos, por lo general.

La inferencia estadística apareció por primera vez en la enseñanza preuniversitaria allá por la década de los sesenta. El cuestionario para la prueba de madurez de 8 de agosto de 1963 incluía, dentro del temario de clases prácticas, *el muestreo, el texto de una hipótesis estadística y la estimación*. Luego, con la sustitución del *preuniversitario* por el *curso de orientación universitaria*, desapareció hasta la década de los ochenta en que, vuelve a aparecer con el bachillerato experimental y se consolida, a nivel de programa, en el bachillerato LOGSE. Sin embargo, a pesar de los intentos oficiales de que tales contenidos se extiendan en las enseñanzas del bachillerato, y sobre todo en los cursos terminales, no parece que sea un contenido que haya recibido general aceptación por parte del profesorado y de las autoridades educativas *locales*. De hecho en muchos distritos universitarios sólo se contempla el intervalo de confianza en la prueba de acceso a la universidad. En otros, se incluye el

test de hipótesis contemplando sólo el error de tipo I. Otra visión se tiene si se observan los libros de texto de matemáticas aplicadas a las ciencias sociales para segundo de bachillerato. Allí se despliega toda la artillería sobre el muestreo, los intervalos de confianza y los test de hipótesis, aunque algunos, pocos, sólo rematan los test de hipótesis con los dos tipos de errores.

Mi objetivo en esta ponencia es reflexionar sobre los significados de los conceptos involucrados en la inferencia estadística, principalmente en el test de hipótesis. Empezaré por una situación que, a mi parecer, es muy adecuada para entender dos cuestiones. Una es la relación íntima entre un modelo teórico y los datos experimentales, la otra es el significado de la variable z en la distribución Normal $(0,1)$.

*La colmena (De Bijenkorf)*¹

Por encargo de los grandes almacenes “*De Bijenkorf*” de Amsterdam se llevó a cabo, en 1947, un estudio sobre determinadas medidas del cuerpo femenino. El propósito de tal estudio era mejorar el nivel de confección de la ropa : prendas con medidas más adecuadas y menos desperdicio de dinero en gastos de adaptación. La siguiente tabla recoge la distribución de estatura de las 5001 mujeres que participaron en el estudio.

Estatura(cm)	Frecuencia	Estatura(cm)	Frecuencia
139	1	163	290
140	1	164	294
141	4	165	291
142	3	166	261
143	2	167	222
144	8	168	184
145	4	169	157
146	17	170	167
147	18	171	109
148	32	172	86
149	51	173	65
150	54	174	62
151	71	175	29
152	78	176	49
153	115	177	28
154	149	178	17
155	170	179	5
156	208	180	10
157	208	181	6
158	231	182	3
159	301	183	1
160	302	184	2
161	321	185	0
162	313	186	1

¹ *De Normale Verdeling*. Martin Kindt y Jan de Lang. Educaboek b.v. Culemborg. The Netherlands, 1986. Proyecto Hewet.

Calculando media, moda y mediana, encontramos los valores 162'1, 161, 162'6 respectivamente (valores aproximados). Notamos que los tres valores están muy próximos. Construyamos el intervalo centrado en la media y cuyos extremos son la media más y la media menos una desviación típica ($s = 6'5$), tenemos (155'5 , 168'5). Un recuento simple nos indica que el número de mujeres cuya estatura cae en dicho intervalo es 3426 que equivale a 68'51% de la población. Importante: En el intervalo (155'6, 168'6) las estaturas **¡distan menos de una desviación típica** de la media o centro del intervalo! Quiero resaltar este aspecto de distancia al centro del intervalo y su relación con la desviación típica.

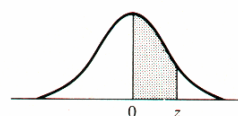
Si hago los cálculos para los intervalos con centro la media y extremos más, menos dos desviaciones típicas y más, menos tres desviaciones típicas obtenemos respectivamente: (149'1 , 175'1) y (142'6 , 181'6). Estos intervalos continen 4738 (94'74%) y 4985 (99'68%) de elementos de la población.

Los correspondientes datos para la Distribución Normal son, de forma aproximada, 68'27 %, 95'45% y 99'73% respectivamente. Además la Normal cumple la igualdad entre los tres parámetros centrales, media, moda y mediana. Luego tenemos una distribución, estatura de mujeres, discreta bastante próxima a la Norma. Los datos empíricos se aproximan bastante bien al modelo teórico.

Ahora preguntaremos a los alumnos a qué distancia se encuentra un valor determinado, p.e. 178, de la media. Claramente está a 15'9 cm. Pero le pedimos que nos exprese tal valor en desviaciones típicas, es decir 15'9/6'5, lo que es igual a 2'45. Repitamos la operación ahora con el valor 143, obteniendo 143-162'1=-19'1; y -2'93 desviaciones típicas. Se hacemos lo mismo con más valores obtendremos positivos (por encima) y negativos (por debajo) y en todos realizamos la misma operación: $\frac{x - \bar{x}}{s}$.

Ahora están los alumnos preparados para entender los valores z de la *tabla de la Normal*. Los z no son otra cosa que distancias en desviaciones típicas al centro de la distribución. Positivas a la derecha, negativas a la izquierda.

Áreas bajo la curva normal



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990



El Azar y la Divina Providencia

Utilizar la probabilidad para determinar si un efecto pudiera ser debido al azar es tan antiguo como la propia teoría del azar. Uno de los primeros ejemplos es la prueba de Arbuthnot. El primer tratado teórico impreso sobre el azar fue escrito por Christiaan Huygens y publicado por van Schooten en 1657. *De ratiociniis in ludo aleæ* utiliza *expectatio*, un antecesor de la esperanza matemática, y no la probabilidad como el concepto central:

Proposición 3: Sea p el número cualquiera de casos para a , sea q el número cualquiera de casos para b , tomando todos los casos igualmente posibles (*proclivi*), mi *expectatio* es $\frac{pa + qb}{p + q}$.

El tratado surge como solución al problema del reparto de la apuesta. La *expectatio* de Huygens es tanto el valor de la apuesta como el premio a recibir en un juego justo. Este pequeño tratado, pues solo consta de catorce páginas, es traducido al inglés por John Arbuthnot en 1692.

John Arbuthnot nació en 1667 en Inverbervie (Escocia) y murió el 27 de Febrero de 1735 en Londres. En 1696 se graduó como médico por la Universidad de St Andrews. Fue miembro de la Royal Society y del Real Colegio de Médicos. Fue también médico personal de la Reina Ana de Inglaterra. En la actualidad se le considera un escritor satírico, estimado por sus contemporáneos al mismo nivel que Jonathan Swift. Aparte de ser el traductor al inglés del primer tratado teórico sobre el azar, Arbuthnot es famoso por una memoria publicada en *Philosophical Transactions* de la Royal Society, volumen xxvii, correspondiente a los años 1710, 1711 y 1712 titulada *An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ'd in the Births of both Sexes*².

La memoria comienza así:

“Entre las innumerables huellas de la Divina Providencia que se encuentran en las obras de la Naturaleza, hay una sobresaliente entre todas que muestra el equilibrio exacto que se mantiene entre el número de hombres y mujeres; con ello se garantiza que las especies ni fallen ni perezcan, ya que cada macho tendrá su hembra, y de una edad proporcionada. Esta igualdad entre machos y hembras no es el efecto del azar sino de la Divina Providencia, que trabaja para un buen fin, lo cual paso a demostrar...”

Arbuthnot argumenta que la mano conductora del ser divino puede observarse en la razón casi constante de varones y hembras cristianizados en la ciudad de Londres, en el período de 82 años comprendido entre 1629 y 1710. Los datos presentados por Arbuthnot muestran que, durante tal período, el número anual de varones cristianizados fue consistentemente bastante más alto que el número de hembras cristianizadas, aunque nunca mucho más alto. La razón más alta de varones respecto de las hembras ($4748:4107=1'156$) ocurrió el año 1661, y equivale a una proporción de varones nacidos igual a 0'536; la proporción más baja (1'011) es la correspondiente al año 1703, que equivale a una proporción de varones nacidos igual a 0'503.

Tales observaciones llevaron a Arbuthnot a plantearse la siguiente cuestión:

¿Está el sexo gobernado por el Azar?

Veamos sus argumentos.

Arbuthnot imagina un dado con dos caras M y F (masculino y femenino respectivamente). Para determinar todas las *chances* de cualquier número determinado

² Un argumento en favor de la Divina Providencia, tomado de la constante regularidad observada en los nacimientos de ambos sexos.

de tal dado, eleva el binomio $M+F$ a la potencia igual al número dado de dados. Los coeficientes de los términos resultantes serán las *chances* buscadas. Por ejemplo, si disponemos de cuatro dados, tenemos: $M^4 + 4M^3F + 6M^2F^2 + 4MF^3 + F^4$. Luego las *chances* son 1:4:6:4:1.

Para n dados tenemos:

$$M^n + \frac{n}{1}M^{n-1}F + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2}M^{n-2}F^2 + \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3}M^{n-3}F^3 + \dots$$

Ahora señala que, si el número de dados es par, entonces el término medio del desarrollo anterior contempla las *chances* para igual número de M que de F . Todos los demás términos tiene o más M o más F .

Si ahora alguien se compromete a obtener, con cuatro dados, tantas M como F , entonces tiene todos los términos salvo el central en su contra; y su *suerte* (*lot*) es la suma de todas las *chances*, como el coeficiente en el término central es a la potencia de 2 elevada al exponente igual a número de dados utilizados. Así, en dos dados tenemos $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, en cuatro dados $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, etc...

Para hallar este término central cuando utilizamos cualquier número de dados, bastará con calcular el término $\frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \dots$ hasta que el número de términos sea igual a $\frac{1}{2}n$. Por ejemplo, el coeficiente del término central para la potencia décima es 252, la potencia décima de 2 es 1024, luego si A se compromete a, en una sola tirada con diez dados, obtener igual número de M que de F , tiene 252 chances en 1024, es decir su suerte es $\frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$, que es menor que $\frac{1}{2}$.

Una vez presentados los anteriores cálculos, Arbuthnot formula el siguiente problema: *A apuesta contra B a que cada año nacerán más varones (M) que hembras (F). Encontrar la suerte de A o el valor de su expectativa.*

Por todo lo dicho queda claro que para cada año su suerte es menor que $\frac{1}{2}$. Pero otorguemos el valor igual a $\frac{1}{2}$. Si se compromete con lo mismo para un período de 82 años consecutivos, entonces su suerte será $\left(\frac{1}{2}\right)^{82}$ cuyo cálculo mediante la tabla de logaritmos es $\frac{1}{483600000000000000000000}$. Luego sigue que es la divina providencia y no el azar la que regula el sexo.

El artículo finaliza con el siguiente escolio: *De aquí sigue que la poligamia es contraria a la Ley Natural y a la Justicia y a la Propagación de la Raza Humana; pues allí donde los varones igualan en número a las féminas, si un hombre toma veinte esposas, diecinueve hombres deben vivir en celibato, lo que es repugnante al Designio de la Naturaleza; tampoco es probable que veinte mujeres sean preñadas tan bien por un solo hombre como por veinte.*

Podemos sintetizar el argumento utilizado por Arbuthnot de la forma siguiente: Sea H la hipótesis el Azar gobierna el sexo. Sea E el suceso observar mayor proporción de varones que de hembras en los nacidos a lo largo de 82 años consecutivos. Ahora se evalúa $p(E/H)$, y se observa que es prácticamente cero. Luego se rechaza la hipótesis H . El suceso E es un suceso *extraño*, pues tiene poca probabilidad, bajo la hipótesis H . Este es un concepto clave para entender el test de hipótesis. Veamos una situación ideada para desarrollar en el aula en la que se pone en juego el significado anterior.

Un jugador de baloncesto tiene un promedio de acierto en tiros libres del 60%. Asegura haber mejorado su tasa y como prueba de ello lanza diez tiros libres y acierta en nueve ¿Podemos concluir que efectivamente ha mejorado?

Primera solución mediante simulación. Utilizando la tabla de números aleatorios obtenemos 20 resultados equivalentes a diez tiros libres. Previamente hemos realizado la siguiente asignación: números 0-1-2-3-4-5 equivalen a enceste, lo contrario a fallo. De esta forma simulamos un lanzador con promedio de 60% de acierto en tiros libres. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos:

3	8	8	6	9	7	7	0	6	4	30%
4	0	4	7	4	0	4	3	3	2	90%
1	0	8	1	9	6	2	1	8	5	60%
1	1	6	7	9	3	0	1	5	9	60%
6	9	7	2	3	4	8	4	9	2	50%
2	9	7	8	5	0	7	3	4	6	50%
2	2	8	7	9	8	4	8	2	0	50%
6	5	6	7	2	3	7	1	1	2	60%
3	7	3	4	0	4	3	9	3	2	80%
4	7	3	8	3	6	4	7	1	6	50%
7	8	7	1	8	7	4	7	1	5	40%
8	8	7	1	5	1	0	9	8	4	50%
7	4	2	2	9	6	5	6	7	9	40%
2	2	0	3	9	3	1	9	4	3	80%
5	8	3	4	3	9	8	9	7	8	40%
7	3	3	6	4	0	5	0	9	6	60%
8	6	9	3	5	6	9	8	3	2	40%
5	5	0	5	8	9	5	7	9	0	60%
1	3	7	2	2	8	9	6	4	1	60%
6	3	5	1	8	9	7	1	9	7	40%

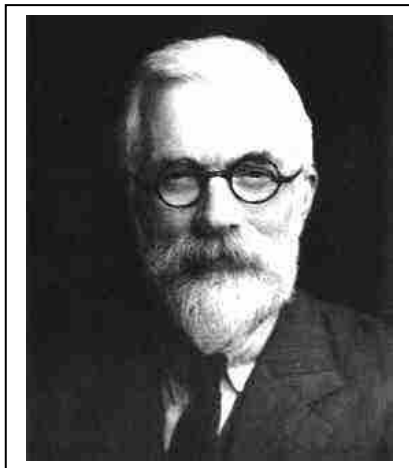
De los 20 resultados sólo en uno hemos obtenido un 90% de acierto, y dos veces un 80%. Así que podemos concluir que es *extraño*, por poco frecuente, obtener tales aciertos con tal promedio. Luego no parece que los nueve aciertos de diez lanzamientos sean debidos al azar y podríamos concluir que efectivamente ha mejorado su promedio de tiros libres.

Segunda solución utilizando la distribución binomial. La cuestión a plantear es, tenemos una $B(10, 0.6)$, ¿Cuál es la probabilidad de obtener $p(x=9)$? Observamos que $p(x=9)=0.04$. Luego como es muy pequeña, rechazamos la hipótesis de que $p(\text{acierto})=0.6$ y concluimos que sí ha mejorado su tasa de aciertos en tiros libres.

La simulación nos familiariza con el azar, mediante el proceso de muestreo y la observación y comparación de los porcentajes particulares de cada muestra de diez lanzamientos. La teoría nos refuerza la intuición generada por la simulación. Muchos ejemplos como este son necesarios hasta clarificar el significado de hipótesis, suceso y resultado *extraño*. Pero esto todo es necesario para comprender la esencia del test de hipótesis.

Las matemáticas de una catadora de té

En el desarrollo moderno de la estadística jugó un papel esencial Sir Ronald Aylmer Fisher (1890-1962), al punto de ser considerado uno de sus fundadores. Entre las importantes contribuciones de Fisher cabe destacar el diseño de experimentos y el test de hipótesis. Según Fisher, el razonamiento inductivo nunca puede confirmar una hipótesis. En todo caso, a lo más que se puede llegar es a rechazar la hipótesis por insostenible a la luz de los datos aportados por los experimentos.



La obra *The World of Mathematics* (Newman, 1956) contiene un artículo de R. A. Fisher paradigmático sobre la prueba de significación de una hipótesis estadística titulado *Las matemáticas de una catadora de té*. El artículo comienza con la siguiente afirmación, *Una dama afirma que al probar el té con leche puede distinguir qué fue lo primero que se echó en la taza, el té o la leche*.

Fisher considera el problema de plantear un experimento mediante el cuál se llegue a demostrar la afirmación de la catadora de té, y que constituye toda una metodología sobre la prueba de significación de una hipótesis estadística.

La cuestión de partida es ¿Cómo realizar el experimento y por qué?

Experimento

Se preparan 8 té con leche, cuatro de una forma y cuatro de la otra. Luego se llevan las tazas, escogidas al azar, a la catadora para que indique su opinión. Deberá separar las tazas en dos grupos según su modo de formación.

Interpretación de los resultados posibles

Es necesario que consideremos todos los resultados posibles y qué interpretación corresponde a cada uno de ellos. Al separar las tazas en dos grupos, caben los siguientes resultados y sus probabilidades:

Resultado	Probabilidad
<i>Cuatro aciertos</i>	1/70
<i>Tres aciertos y un fallo</i>	16/70
<i>Dos aciertos y dos fallos</i>	36/70
<i>Un acierto y tres fallos</i>	16/70
<i>Ningún acierto</i>	1/70

Una persona que no tuviese la habilidad de la catadora de té conseguiría acertar las cuatro tazas con una probabilidad de 1/70, es decir, un poco más de un 1%. La posibilidad de éxito es tan pequeña que habría que atribuir tal resultado al azar.

La tabla anterior proporciona los resultados del experimento bajo la hipótesis de que un sujeto no distingue entre dos objetos (Hipótesis nula). Bajo esa hipótesis se ha construido la tabla de probabilidades de los resultados posibles del experimento, es decir, la hipótesis nula proporciona la distribución de probabilidad para el contraste de la hipótesis.

Una objeción: ¿Por qué ocho tazas y no, por ejemplo, seis tazas con tres de cada tipo? Aclarar esta objeción no lleva al clarificar la prueba de significación.

Prueba de significación

¿Cuándo consideraremos que el resultado del experimento no es debido al azar y que, por lo tanto, es significativo estadísticamente? Esta cuestión nos lleva a fijar el nivel de significación de la prueba. Fisher fija el nivel base o tipo de significación en 1 sobre 20 (5%, *por corriente y conveniente*).

Si hubiéramos utilizado seis tazas, tres de cada tipo, entonces la probabilidad de dividir correctamente el conjunto de seis tazas es 1/20, es decir el sujeto obtendría un éxito en la prueba, por puro azar, en el 5% de las veces que la realizara. Esta es la razón por la que se descarta el experimento compuesto por seis y se opta por el de ocho tazas.

Al fijar tal nivel, también se descarta el resultado tres aciertos y un fallo, pues su probabilidad es algo superior al 20%.

Luego los posibles resultados del experimento se dividen en dos grupos cuyas interpretaciones son opuestas: los que no muestran una desviación significativa respecto de la hipótesis y aquellos que sí muestran diferencias significativas, regiones de aceptación y rechazo de la hipótesis, respectivamente.

El examen de los resultados posibles del experimento nos proporciona una prueba estadística significativa. Sin embargo, Fisher hace una observación importante: *El hecho de que 1 acontecimiento sobre 70 (cuatro aciertos) sea significativo estadísticamente no basta para demostrar experimentalmente cualquier fenómeno natural. Para afirmar que un fenómeno natural es experimentalmente demostrable se necesita un verdadero método de realización y no sólo una referencia aislada.*

Cuando sometemos una hipótesis a un test, nuestra intención es concluir que la misma es verdadera o falsa. Sin embargo, la lógica nos impide llegar a conclusiones tan categóricas.

Veamos desde el punto de vista lógico el significado de la observación anterior de Fisher.

Sea H la hipótesis “la catadora posee la habilidad que afirma”. Sea S el suceso “dadas 8 tazas, la catadora divide correctamente el conjunto en dos mitades”. Tenemos pues que si H es verdadera también lo es S. Ahora bien, S es verdadera (*ocurre* es el significado de *verdad* para nuestro caso), ¿qué podemos concluir respecto de H

$$\begin{array}{ccc} H \rightarrow S & & S \\ \hline & & \\ H & & \end{array}$$

Si concluimos que H es verdadera hemos incurrido en lo que se denomina la falacia del consecuente. Sabemos que tal conclusión no es lógicamente válida. El hecho de que ocurra S hace más creíble H, pero no se deduce de ello. Sin embargo, si disponemos del siguiente argumento lógico (*modus tollens*):

$$\begin{array}{ccc} H \rightarrow S & & \neg S \\ \hline & & \\ \neg H & & \end{array}$$

Es decir, si S es *falsa* (*no ocurre*), entonces también es falsa H. Esta es la base lógica del test de Fisher y su principal argumento contra el razonamiento inductivo. A lo sumo podemos rechazar una hipótesis, nunca confirmarla mediante tal razonamiento.

Lo visto suministra la base argumental del siguiente apartado.

La hipótesis nula

Para Fisher la hipótesis nula nunca puede demostrarse y sí refutarse. En este sentido cada experimento existe para darnos la oportunidad de refutar la hipótesis nula.

¿Qué ocurre entonces con la hipótesis contraria? (hipótesis alternativa).

En su argumentación Fisher explícita por primera vez cuál es la hipótesis nula: *El sujeto es incapaz de distinguir dos tipos de objetos*. Obsérvese que es lo contrario de lo que afirma la catadora de té. Entonces, se podría objetar que si un experimento excluye la hipótesis nula debe probar la hipótesis contraria. Contra esta objeción Fisher argumenta que aunque la hipótesis contraria sea razonable no interesa como hipótesis nula por inexacta. Pues si fuera posible asegurar que un individuo nunca se equivoca en sus juicios, deberíamos tener de nuevo una hipótesis exacta y esta se podría refutar por un simple fallo y en cambio nunca podría ser demostrable por una cantidad finita de experiencias. Tal hipótesis nula debe ser exacta porque suministra el estadístico de prueba y su distribución, a partir de la cuál se construye la prueba de significación.

Según esta argumentación, el test de significación de Fisher no es más que una forma de inferencia incierta. Disponemos de los datos suministrados por una muestra y de una hipótesis. La decisión se toma entre dos alternativas: o bien ha ocurrido un resultado extraño y sorprendente (la catadora acierta) o bien la hipótesis no es cierta. Lo que aquí cabe es cuantificar, probabilísticamente hablando, lo extraño y sorprendente del hecho de que la catadora presente una división exacta de las ocho tazas. Esta cuantificación se obtiene al fijar, como hemos visto, el nivel de significación.

Para Fisher la alternativa de rechazar una hipótesis nula no es aceptar la hipótesis alternativa, sino medir el riesgo de equivocarnos. Es decir, controlar la probabilidad de que rechacemos una hipótesis nula cierta, valor que es proporcionado por el nivel de significación o error de tipo I: $\alpha = p(\text{rechazar } H_0 / H_0 \text{ cierta})$.

El artículo de Fisher muestra las debilidades del razonamiento inductivo y, al mismo tiempo, clarifica el papel que en un test de hipótesis juega la hipótesis nula al suministrar el modelo de azar para el contraste y valorar el riesgo de rechazar la hipótesis nula mediante el nivel de significación.

Como conclusión me haré la siguiente pregunta:

¿En qué consiste y qué prueba un experimento estadístico?

El test de Arbuthnot muestra como históricamente se confunde azar con equiprobabilidad y como se utiliza una inferencia válida (no equiprobabilidad) para aceptar una hipótesis mediatizada por las creencias religiosas y sobre la cuál no es posible disponer de datos empíricos. Además, la historia muestra un ejemplo válido de razonamiento sobre la ley de Bernoulli que permite superar el obstáculo de equiprobabilidad-azar.

El Test de Fisher muestra algunas ideas básicas que conviene aclarar en el estudio y aplicación de la estadística a situaciones reales. En primer lugar, el papel de la hipótesis nula y la distribución de probabilidad que genera, utilizada como elemento de contraste para los datos empíricos proporcionados por el experimento. En segundo lugar, la alternativa que consiste en establecer una medida apropiada al riesgo que correríamos al rechazar la hipótesis nula en el supuesto de que sea cierta. Esto nos lleva al concepto de nivel de significación, cuyo profundo significado está en la respuesta a la cuestión tantas veces planteada en situaciones de incertidumbre: ¿Cuán raro es este hecho? El nivel de significación permite una cuantificación del mismo y es, no lo olvidemos, una decisión que debe tomar el diseñador del experimento.

En resumen, con la exposición de estos dos episodios he querido, por un lado mostrar cómo las ideas emergentes del cálculo de probabilidades sirvieron

históricamente para organizar el fenómeno del azar. Por otro, observar cómo suministran un ejemplo metodológico para presentar el tema en el aula de secundaria (o en la universidad).

Una forma vívida de iniciar el estudio de la inferencia estadística es partir de una situación realista en la que sea fácil involucrar a los alumnos en una controversia. En otro lugar (García Cruz, 2000) he presentado, en forma de diálogo entre varios personajes, un problema cuya discusión permite aflorar concepciones y creencias sobre la probabilidad y, mediante la guía del profesor, desembocar en la construcción de una distribución de probabilidad *ad hoc* que permite tomar una decisión sobre lo extraño de un resultado. El diálogo y la dramatización se ha sugerido como recurso útil para la presentación del nacimiento y desarrollo de los conceptos matemáticos (Hirchcock, 1996).

La propuesta metodológica

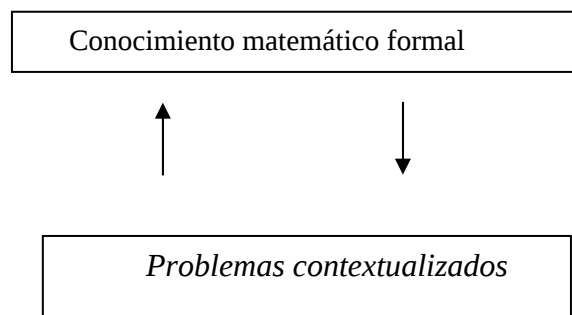
Simplificando, existen dos formas de mirar al conocimiento matemático, cada una corresponde a un estatus epistemológico diferente y con una concepción diferente también de la enseñanza.

Si consideramos que la matemática es primordialmente un sistema formal acabado con aplicación general, entonces la enseñanza consiste en descomponer el conocimiento matemático formal en procedimientos de aprendizaje que, el estudiante aprende a aplicar más tarde.

Si, por el contrario, concebimos la matemática como un proceso en el que prima la actividad de resolución de problemas, la enseñanza se concibe, en correspondencia, como la actividad de hacer matemáticas, donde resolver problemas cotidianos es parte del trabajo y esencia en la construcción del conocimiento.

Ambas concepciones se diferencian fundamentalmente en cómo se estructura el proceso de enseñanza.

Si contemplamos la matemática como un sistema formal entonces su aplicabilidad está garantizada por el carácter general de sus conceptos y procedimientos. Luego lo primero que hay que hacer es adaptar este conocimiento abstracto para resolver problemas planteados en la realidad.

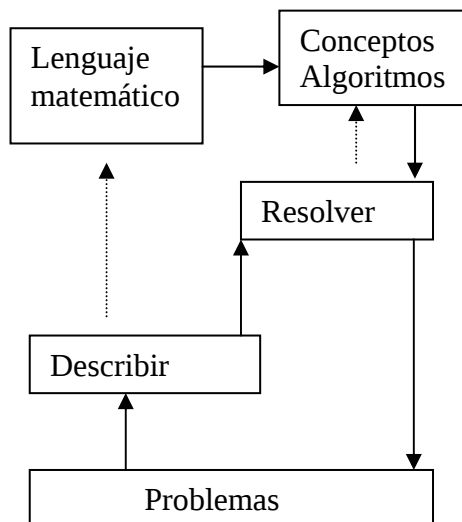


Primero se traduce el problema a términos matemáticos. Luego se resuelve el problema con ayuda de los medios matemáticos disponibles. Finalmente, la solución matemática se traduce al contexto original. En primer lugar se imparte el conocimiento abstracto que luego, si cabe, será utilizado para resolver ciertas situaciones de aplicación.

Por el contrario, si elegimos enseñar matemáticas como una actividad, la resolución de problemas cobra un significado diferente. La enseñanza se centra en los

problemas, lo que significa que la actividad desarrollada para resolver el problema se convierte en el objetivo central del aprendizaje, en vez de ser simplemente el lugar donde utilizar las herramientas matemáticas.

Resolver un problema en este nivel menos formal difiere grandemente de la aplicación de un procedimiento formal.



Se parte de un problema y se comienza con una descripción del mismo que incluye tanto la forma de entender el problema en sí, como el enfoque que se le dará a su solución. La descripción de los problemas desarrolla un lenguaje informal y pone en juego las concepciones y formas de entender la situación por los alumnos. Al mismo tiempo, el lenguaje informal evoluciona en un lenguaje cada vez más formal debido al proceso de simplificación y formalización guiado por el profesor. A largo plazo, la resolución de un tipo particular de problemas se convierte en una rutina, al condensarse y formalizarse el procedimiento en el curso del tiempo, dando lugar a la constitución de los objetos mentales involucrados que precederían, en el sentido señalado por Freudenthal en su fenomenología didáctica, a los conceptos matemáticos formales.

El tiempo que disponemos para trabajar con los alumnos en clase es muy limitado. No lo desperdiciemos dedicándolo solo a la enseñanza de rutinas. El alumnado aprenderá muy poco y nosotros seguiremos anclados en un proceso sin sentido.

Referencias

- Fisher, R.A. (1976). 'Las matemáticas de una catadora de té' en James R. Newman (editor) *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Tomo 3, pp 194-201. Ediciones Grijalbo. Barcelona.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company.
- García Cruz, J.A. (2000). El caso de los despedidos de la empresa Westvaco. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 23, 121-128.
- Hitchcock, G. (1996). 'Dramatizing the Birth and Adventures of Mathematical Concepts: Two Dialogues', en R. Calinger (editor), *Vita Matemática. Historical Research and Integration with Teaching*. MAA Notes. No. 40, pp 27-41.
- Kindt, M. y Jan de Lang (1986). *De Normale Verdeling*. Educaboek b.v. Culemborg. The Netherlands, 1986. Proyecto Hewet.
- Newman, J. R. (1976). *Sigma. El Mundo de las Matemáticas*. 5 volúmenes. Ediciones Grijalbo. Barcelona. (Traducción de la obra: *The World of Mathematics*. Simon and Schuster. New York. 1956).
- Shoesmith, E. (1987). The continental controversy over Arbuthnot's argument for divine providence. *Historia Mathematica*. 14 (2), pp 133-146.

LA ESTADÍSTICA EN LOS CURRÍCULOS DE LA EDUCACIÓN OBLIGATORIA. ¿QUÉ HAY Y QUÉ SE HACE?

Belén Cobo Merino

Introducción

El análisis de datos es un tema relativamente nuevo en educación matemática comparado con el álgebra o la geometría. El siglo XX ha sido el siglo de la estadística, pero no ha ocurrido lo mismo con la educación estadística. Aunque figura en los diseños curriculares, su enseñanza de deja para los finales de curso, llegan las prisas y estos temas se suelen hacer odiosos o simplemente se quedan sin tratar, al menos en la E.S.O. Hasta hace pocos años, el trabajo significativo sobre estadística en las clases de secundaria no ha sido posible, los datos reales eran demasiado complejos y su análisis con medios tradicionales demasiado lento. El rápido desarrollo de los ordenadores ha dado ímpetu a la estadística aplicada, incrementado el énfasis puesto en el análisis de datos en los currículos. La información cuantitativa es ahora más fácil de manejar y de difundir a través de los medios de comunicación. Además, los conocimientos básicos de este tema son imprescindibles para la comprensión de cuestiones más avanzadas, como es el caso de la inferencia, que difícilmente se pueda llegar a comprender si no se dominan otros conceptos más elementales. Pero no por ser más elementales podemos pensar que son lo suficientemente asequibles para los estudiantes como para no requerir de una detallada y concienzuda planificación.

Por otro lado, el interés por la formación estadística básica del ciudadano, independientemente de su profesión, clase social o nivel educativo ha aumentado en los últimos años, basta pensar en la influencia que tiene en la concepción del mundo actual, tan cambiante, de ahí la necesidad de no dejar de lado este tema en la Educación Obligatoria. Como resalta Ottaviani (1999), los estadísticos sienten la necesidad de difundir la estadística no sólo como un conjunto de técnicas cuantitativas, sino también como cultura que proporciona la capacidad de sintetizar información sobre conjuntos de datos y guiar la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Es lo que se conoce como “statistical literacy” (que hemos traducido por cultura estadística). La cultura estadística requiere una serie de habilidades que son, con frecuencia, complejas y no siempre se tienen en cuenta desde la educación. Su interpretación y uso requiere integrar conocimientos matemáticos, estadísticos y otros de tipo más general.

Según Gal (2002) es la “cultura que nos lleva a la imagen del subconjunto mínimo de habilidades básicas que esperamos de todos los ciudadanos en contraposición a un conjunto más avanzado de conocimientos y capacidades que sólo algunos pueden adquirir” (p. 2).

Para trabajar de acuerdo con esta nueva realidad sería necesario centrar más la enseñanza en tareas estadísticas de la vida real y habría que plantearse el desarrollo de actitudes favorables hacia la estadística, quizás modificando prácticas anteriores que dan excesiva importancia a los conceptos en detrimento de otras formas de razonar más centradas en los datos, a fin de despertar el interés de los estudiantes por un tema que les permite entender mejor el mundo en el que viven interpretando adecuadamente los datos y hacer inferencias para guiar la toma de decisiones a partir de los mismos.

A continuación presentamos un análisis curricular centrado en las medidas de posición central, que incluye un estudio del currículo, tanto en España como a nivel internacional, así como un análisis de libros de texto.

PANORAMA INTERNACIONAL DE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA.

En primer lugar analizamos la perspectiva de la enseñanza de la estadística en secundaria a nivel internacional. Starkings (1996) presenta algunos ejemplos de cómo ciertos proyectos de investigación en diversos países están contribuyendo a implantar este tema.

El proyecto Statistics en Canadá, citado por esta autora, ha producido un conjunto de materiales curriculares relacionados con el censo para informar a los estudiantes de los usos de los datos del censo y su importancia. Estos materiales se han preparado en los dos idiomas, francés e inglés y se han enviado a todas las escuelas, contribuyendo a aumentar el interés no sólo por la elaboración del censo, sino por la enseñanza de la estadística. Más recientemente, se han extendido estas experiencias en Inglaterra, Italia, U.S.A., Sudáfrica, Portugal y Reino Unido (Connor, 2002).

Vasco (1994) describe un proyecto de educación estadística en Colombia en el que participó, basado en el enfoque general de teoría de sistemas. El aprendizaje se inicia con el estudio de los sistemas de datos. En este contexto, la estadística en cualquier nivel se inicia a través del encuentro de los estudiantes con sistemas de datos de la vida real, en los cuales se deben investigar las relaciones existentes. Un sistema de datos tiene un autor y, por tanto, obedece a una intención y puede tener fallos. Los estudiantes deben indagar sobre la bondad de los datos, el uso que puede dárseles, la forma de resumirlos y las decisiones que pueden adoptarse a partir de ellos.

En Inglaterra y Gales, el Acta de Reforma Educativa estableció un currículo nacional por primera vez en 1988, que incluía un apartado especialmente dedicado al análisis de datos. En él no se considera aceptable el limitarse a enseñar a los alumnos a realizar cálculos sin que comprendan su finalidad, sino que la actividad debe ser para ellos significativa. Entre las habilidades que el estudiante debe adquirir, se encuentra la capacidad de comunicar e interpretar ideas estadísticas. Estas ideas fueron implementadas en proyectos como el Schools Council Project on Statistical Education, que desarrollaba un currículo basado en el trabajo sobre proyectos.

En el informe Cockroft (1985), también hay referencias expresas a la enseñanza de la estadística, tanto en la enseñanza primaria, como en la enseñanza secundaria. Para la enseñanza primaria la referencia en relación al apartado 239, sobre trabajo gráfico se dice que:

“ En los años de primaria ha de prestarse atención a los diversos métodos de representación gráfica de los datos matemáticos y de la interpretación de la información así presentada” (p.106).

Más adelante sugiere que además de dibujar gráficos, se ha de insistir en su interpretación. Además los niños deben representar relaciones matemáticas, y realizar juegos donde intervengan las representaciones.

En cuanto a la enseñanza secundaria, el Informe Cockroft hace referencia a la enseñanza de la estadística en varios apartados. Los contenidos los expresa bajo el epígrafe *Gráficas y Representación Pictórica*, incluyendo:

Recogida, organización y tabulación de datos.

Construir, leer e interpretar gráficos y cuadros sencillos y extraer de ellos información específica.

Extraer información presentada de forma tabular, por ejemplo, el coste de una llamada telefónica.

Poder interpretar un diagrama de flujo sencillo. (p.170)

Asimismo, bajo el título: *ideas estadísticas*, incluye los siguientes objetivos:

Fomentar una actitud crítica ante las estadísticas presentadas por los medios de comunicación.

Apreciar las ideas básicas de aleatoriedad y variabilidad; conocer el significado de la probabilidad y las apuestas en casos sencillos.

Hacer hincapié en la importancia de la probabilidad en los hechos de la vida diaria y en los juegos de azar sencillos. En el caso de muchos alumnos, no será adecuado que emprendan ejercicios en que intervenga la probabilidad compuesta.

Comprender la diferencia entre las diversas medidas de centralización y el fin para el que se usa cada una.

Prestar atención a los diferentes usos de la palabra "promedio" que se hacen en los periódicos. No se pretende que todos los alumnos utilicen necesariamente las palabras media, mediana y moda (p.172).

Estándares del NCTM

En 1989, el National Council of Teachers of Mathematics, publicó los Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, que fueron seguidos por los Professional Teaching Standards en 1991 y los Assesment Standards en 1995. Por primera vez se definió con claridad el contenido de la estadística y probabilidad en los niveles K-12 (Burrill, 1996). Los Estándares Curriculares del N.C.T.M. proponen, para la Estadística, un tratamiento basado en el análisis de datos y en la experimentación por parte del propio alumno, especialmente en los niveles obligatorios de enseñanza.

Para los distintos niveles, el Estándar dedicado a la Estadística, propone los siguientes objetivos a conseguir en esta etapa:

Nivel P-4 (< 9 años)	Nivel 5-8 (10 a 13 años)	Nivel 9-12 (14 a 18 años)
<i>Recoger, organizar y describir datos.</i> <i>Construir, leer e interpretar datos presentados de manera organizada.</i> <i>Formular y resolver problemas que impliquen recogida y análisis de datos.</i>	<i>Recoger, organizar y analizar datos de forma sistemática.</i> <i>Elaborar, leer e interpretar tablas y diversas representaciones gráficas.</i> <i>Formular inferencias y argumentos convincentes que se basen en el análisis de datos.</i> <i>Evaluar argumentos que estén basados en el análisis de datos.</i>	<i>Asimilar y extraer inferencias a partir de diagramas, tablas y gráficas que recogen datos de situaciones de mundo real.</i> <i>Entender y aplicar medidas de centralización, dispersión y correlación.</i> <i>Analizar el efecto que producen las transformaciones en la variable estadística sobre las medidas de centralización y dispersión.</i> <i>(y para futuros universitarios)</i>

	<i>Llegar a apreciar los métodos estadísticos como medios potentes en la toma de decisiones.</i>	<i>Transformar datos como ayuda para la interpretación de datos y predicción. Comprobar hipótesis utilizando la estadística.</i>
--	--	--

Se da mucha importancia a que los estudiantes entiendan los conceptos y procesos usados para el análisis de datos, dado que su uso en la sociedad actual es cada vez más extenso tanto para realizar predicciones como para tomar decisiones. Así, pues, el trabajo de la estadística en las clases debe centrarse en la participación activa de los estudiantes en el proceso completo, desde la formulación de preguntas clave, pasando por la recogida, organización y representación de datos, análisis de los mismos y elaboración de conjeturas, hasta la comunicación de la información obtenida de una manera clara y precisa.

El uso de programas informáticos puede ayudar notablemente a la organización y representación de los datos. La tecnología hace que se pueda dedicar más tiempo a explorar la esencia de la estadística: El análisis de datos desde diversos puntos de vista, la formulación de inferencias y la construcción y evaluación de argumentos.

Se propone la utilización de gráficos de la caja como un buen medio de describir conjuntos de datos y mostrar, tanto valores medios y de posición, como variación entre ellos.

A partir de aquí se han desarrollado diferentes proyectos curriculares, como el Quantitative Literary Project, o el desarrollado por el TERC con el nombre de "Used Numbers", que delinearón aún más los conceptos estadísticos que debían ser enseñados. En estos proyectos, la exploración de los datos y la integración de las técnicas de análisis de datos para proporcionar diferentes modos de aproximar conceptos estadísticos es una tendencia común. Incluso en los primeros niveles se sugiere que los alumnos recojan sus propios datos. Hasta el grado 9 (14 años) hay poco uso de la tecnología. Para algunos cálculos se sugiere el uso de calculadoras científicas y sólo aparecen referencias ocasionales a los ordenadores. El análisis de datos se usa también para que los alumnos adquieran práctica en el cálculo numérico, por ejemplo, con fracciones o decimales.

Hay discrepancia respecto al nivel apropiado en el que debiera enseñarse la media. Su cálculo no suele iniciarse hasta el 6º nivel (11 años). Tareas más complejas, como calcular o estimar la media a partir de la representación gráfica de una distribución no se incluye hasta el nivel 9 (14 años). Aunque se hace bastante énfasis en la representación gráfica y el uso de sistemas múltiples de representación no se propicia, en general, la creatividad de los estudiantes para que produzcan sus propios datos.

A pesar de que la estadística puede considerarse a la vez un arte y una ciencia, ya que existen diferentes modos de expresar y reducir los datos, hay también un cuerpo acumulado de conocimiento sistematizado. Las técnicas de análisis de datos se basan en una ciencia que guía los procedimientos y en leyes generales que modelan el proceso de razonamiento. En los currículos se observa, sin embargo, casos de procedimientos incorrectos o incompletos y uso desmedido de la terminología, ignorando la ciencia soporte.

No se ha pensado bien, en general, el lugar del currículo donde introducir los conceptos. Por ejemplo, para el caso de la mediana se usa informalmente en el nivel 1 y se enseña en el nivel 2, en Everyday Mathematics; en grado 4 en Investigations; en grado 6 en Mathematics in Context y en grado 9 en Cove Plus.

El concepto de variabilidad, por otro lado, es prácticamente ignorado hasta el grado 9 (14 años), con un énfasis particular en el rango y los cuartiles. Rara vez se consideran, a la vez, las medidas de posición central y dispersión como pares de estadísticos resumen que, conjuntamente, ayudan a comprender la distribución y se hace poca referencia al concepto de valor atípico.

Principios y Estándares para la Matemática Escolar (NCTM 2000)

En este nuevo documento la estadística y probabilidad se ven reforzadas y aparecen a lo largo del currículo en los diferentes niveles educativos. Los nuevos objetivos que se plantean tras la revisión, partiendo de experiencias con análisis de datos, son los siguientes:

Nivel K-2 (< 7 años)	Grados 3-5 (8 a 10 años)
<i>Clasificar objetos de acuerdo a sus atributos y organizar datos sobre los objetos.</i> <i>Representar datos usando objetos concretos, dibujos y gráficos.</i>	<i>Diseñar investigaciones para contestar una pregunta y considerar cómo los métodos de recogida de datos afectan al conjunto de datos.</i> <i>Recoger datos de observación, encuestas y experimentos.</i> <i>Representar datos en tablas, gráficos de línea, puntos y barras.</i> <i>Reconocer las diferencias al representar datos numéricos y categóricos.</i> <i>Usar las medidas de posición central, particularmente la mediana y comprender qué es lo que cada una indica sobre el conjunto de datos.</i> <i>Comparar distintas representaciones de los mismos datos y evaluar qué aspectos importantes del conjunto de datos se muestra mejor con cada una de ellas.</i> <i>Proporcionar y justificar conclusiones y predicciones basadas en los datos y diseñar estudios para estudiar mejor las conclusiones y predicciones.</i>
Grados 6-8 (11 a 13 años)	Grados 9-12 (14 a 18 años)
<i>Formular preguntas, diseñar estudios y recoger datos sobre una característica compartida por dos poblaciones o de diferentes características en una población.</i> <i>Seleccionar, crear y usar representaciones gráficas apropiadas, incluyendo histogramas, gráficos de caja y diagramas de dispersión.</i> <i>Encontrar, usar e interpretar medidas de posición central, incluyendo la media y el rango intercuartílico.</i> <i>Discutir y comprender la correspondencia entre conjuntos de datos y sus representaciones gráficas, especialmente</i>	<i>Comprender las diferencias entre varios tipos de estudios y qué inferencias pueden legítimamente deducirse de ellos.</i> <i>Conocer las características de los estudios bien diseñados, incluyendo el papel de la aleatorización en encuestas y experimentos.</i> <i>Comprender el significado de los datos cuantitativos y categóricos, de los datos univariantes y bivariantes y del término variable.</i> <i>Comprender los histogramas, gráficos de cajas paralelos y gráficos de dispersión y usarlos para representar datos.</i> <i>Calcular estadísticos básicos y</i>

<i>los histogramas, tallos y hojas, gráficos de cajas y diagramas de dispersión.</i> <i>Usar observaciones sobre las diferencias en dos o más muestras para hacer conjeturas sobre las poblaciones de donde se tomaron las muestras.</i> <i>Hacer conjeturas sobre la posible relación entre dos características de una muestra a partir del diagrama de dispersión, aproximando una línea de ajuste.</i> <i>Usar conjeturas para formular nuevas cuestiones y planificar nuevos estudios para responderlas.</i>	<i>comprender la diferencia entre estadístico y parámetro.</i> <i>Ser capaz de representar la distribución de datos continuos univariantes, describir su forma, seleccionar y calcular los estadísticos resumen.</i> <i>Ser capaz de representar datos continuos bivariantes, describir su forma y determinar los coeficientes de regresión, las ecuaciones de regresión y los coeficientes de correlación, con ayuda de la tecnología.</i> <i>Representar y discutir datos bivariantes cuando uno al menos es categórico.</i> <i>Reconocer cómo afectan las transformaciones lineales de los datos univariantes a su forma, posición central y dispersión.</i> <i>Identificar la tendencia en los datos bivariantes y hallar la función que modeliza los datos transformar los datos para que puedan ser modelizados.</i> <i>Usar las simulaciones para explorar la variabilidad de los estadísticos muestrales de una población conocida y para construir las distribuciones en el muestreo.</i> <i>Comprender cómo los estadísticos muestrales reflejan el valor de los parámetros poblacionales y usar las distribuciones en el muestreo como base para inferencias informales.</i> <i>Evaluar informes publicados que se basan en datos para examinar el diseño del estudio, la adecuación del análisis de datos y la validez de las conclusiones.</i> <i>Comprender cómo las técnicas básicas de estadística se usan para monitorizar procesos característicos en lugares de trabajo.</i>
--	---

Se indica que las actividades informales de clasificación y recuento pueden proporcionar un inicio de la comprensión y análisis de los datos por parte de los niños. Se les animará a plantearse preguntas, organizar las respuestas y crear representaciones para sus datos, así como a razonar y comprobar sus ideas comparándolas con los datos.

En estos niveles se pretende que progresivamente los niños sean capaces de ver el conjunto de datos como un todo, describir su forma y usar las características estadísticas, como el rango y las medidas de tendencia central para comparar conjuntos de datos. Deben considerar que los datos son muestras recogidas de poblaciones mayores y llevar a cabo

investigaciones y proyectos, considerando el ciclo: formular preguntas, recoger datos y representarlos.

Analizarán si sus datos proporcionan la información necesaria para responder sus preguntas. Podrían recoger sus datos o usar otros disponibles en la escuela o en la ciudad, por ejemplo, datos del censo o sobre el tiempo o datos disponibles en Internet. La experiencia con una variedad de gráficos les permitirá comprender los valores en los ejes horizontal y vertical, la utilidad de las escalas y cómo representar el cero en una gráfica. Deberían también usar software y ordenadores que les ayuden a representar un gráfico, por ejemplo, la hoja electrónica.

Como veremos, este currículo no sólo es más completo que el español, sino que presenta una metodología más activa en línea con las investigaciones recientes en didáctica de la estadística. Creemos que en España debieran tenerse en cuenta las directrices de países como Estados Unidos o Inglaterra que favorecen la enseñanza de la estocástica.

El currículo en España.

En España, la situación de la estadística en la enseñanza obligatoria es la que se presenta a continuación. Las últimas reformas de la enseñanza no universitaria conceden una valoración altamente positiva a la estadística, dedicando un peso mayor a su estudio, bajo la influencia de otros currículos en países vecinos, así como de la sugerencia de diversos autores nacionales y extranjeros.

Respecto a la Educación Primaria encontramos los siguientes documentos:

	Real Decreto de enseñanzas mínimas para la Educación Primaria (BOE. 26-Junio-91)	Andalucía: Decreto de Educación Primaria (BOJA. 20- junio-92)
OBJETIVOS	6. <i>Utilizar técnicas elementales de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones de su entorno; representarla de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.</i>	No aporta nada nuevo con respecto al correspondiente Decreto del M.E.C. Únicamente presenta ciertas recomendaciones en cuanto a la importancia y la orientación de este tema:

CONTENIDOS	<i>Conceptos:</i> Representación gráfica. Tablas de datos. Tipos de gráficos estadísticos. <i>Procedimientos:</i> Exploración sistemática, descripción verbal e interpretación de gráficos sencillos. Recogida y registro de datos. Elaboración de gráficos con pocos datos. <i>Actitudes:</i> Actitud crítica ante informaciones y mensajes gráficos y tendencia a explorar todos los elementos significativos. Valoración de la expresividad del lenguaje gráfico como forma de representar muchos datos. Sensibilidad y gusto por las cualidades estéticas de los gráficos.	<i>“La recogida, organización y presentación de datos así como la interpretación y las posibles predicciones basadas en los mismos, son conocimientos que tienen cada vez más importancia en nuestro medio lo que hace deseable su aprendizaje y utilización.</i> <i>Ha de considerarse que las sencillas actividades estadísticas pueden representar para los alumnos de estas edades aplicaciones de las matemáticas al medio real, prestando significado al mismo, haciéndolo más inteligible. Al mismo tiempo representan ocasiones para la exploración matemática ya que implican la formulación de preguntas, conjeturas, la búsqueda de relaciones, la toma de decisiones sobre qué información hace falta y cómo obtenerla, etc.”</i>
EVALUACIÓN	<i>Realizar, leer e interpretar representaciones gráficas de un conjunto de datos del entorno.</i> <i>Hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado de juegos de azar sencillos y comprobar el resultado.</i>	

En cuanto a la Secundaria Obligatoria tenemos los documentos que se presentan:

	Real Decreto 1007/91 de 14 de junio (BOE. 26-junio-91) que establece los aspectos básicos del currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria	Decreto 106/92 de junio (BOJA. 20/6/92) establece las enseñanzas de Enseñanza Secundaria Obligatoria en Andalucía.
--	--	--

OBJETIVOS GENERALES	1. Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (numérica, gráfica, geométrica, lógica, algebraica, probabilística) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa. 3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor, utilizando técnicas de recogida de datos, procedimientos de medida, las distintas clases de números y mediante la realización de los cálculos apropiados a cada situación. 5. Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma. 8. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, gráficos, planos, cálculos, etc.) presentes en las noticias, opiniones, publicidad, etc., analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.	Debido a la creciente importancia que vienen mostrando los medios de comunicación, se hace necesario que los alumnos y alumnas, a lo largo de esta etapa, se capaciten para interpretar la información emitida por ellos. Establece, pues, entre otros objetivos, el siguiente: <i>Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de "la realidad".</i>
-----------------------------------	--	---

CONTENIDOS	<i>"Interpretación, representación y tratamiento de la información":</i> tratamiento de datos estadísticos, parámetros centrales y de dispersión; como procedimientos, la utilización e interpretación del lenguaje gráfico, la elección adecuada de parámetros, la detección de errores y la interpretación de datos relativos a una muestra estadística.	Resulta imprescindible para desenvolverse en la sociedad actual, dominar procedimientos básicos como técnicas de recogida de datos y representaciones gráficas y numéricas de los mismos. Bloque 1 de números y medidas: <i>Profundización en la proporcionalidad de magnitudes empleando distintos tipos de notación: decimal, fracción y porcentaje.</i> Bloque 2 de funciones y representación gráfica: <i>Lectura e interpretación de un fenómeno dado mediante una gráfica. Obtención de conclusiones cualitativas y cuantitativas sobre el fenómeno descrito.</i> Bloque 5 de tratamiento de la información estadística y del azar: <i>Representaciones gráficas de las distribuciones de frecuencias a través de polígonos de frecuencia, histogramas, ..</i> <i>Obtención de parámetros de centralización y dispersión.</i> Se indica como necesaria la consideración de los problemas derivados de elegir, para representar un conjunto de datos, una de las medidas de centralización, y decidir cuál de ellas es la más adecuada a cada caso. Esta decisión debe ir apoyada en la interpretación exploratoria de datos además de en los parámetros de dispersión.
EVALUACIÓN	Valorar la presentación e interpretación adecuadas de informaciones estadísticas.	

	Real Decreto 1345/91 de 6 de septiembre (BOE. 13 de septiembre 91) que establece definitivamente el currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria	Orden de 28 de Octubre de 1993 , por la que se establecen criterios y orientaciones para la elaboración de Proyectos Curriculares de Centro, secuenciación de contenidos y distribución horaria de materias optativas en la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía
OBJETIVOS GENERALES DE ETAPA	<i>b) Interpretar y producir con propiedad, autonomía y creatividad mensajes que utilicen códigos artísticos, científicos y técnicos, con el fin de enriquecer sus posibilidades de comunicación y reflexionar sobre los procesos implicados en su uso.</i> <i>c) Obtener y seleccionar información, utilizando las fuentes en las que habitualmente se encuentra disponible, tratarla de forma autónoma y crítica, con una finalidad previamente establecida y transmitirla a los demás de manera organizada e inteligible.</i>	El manejo de datos, su organización, presentación, representaciones gráficas e interpretación, son actividades de gran importancia en nuestra época, fuertemente marcada por la información y la tecnologías. Por ello, los alumnos deben conseguir una cierta destreza en estas técnicas. Los alumnos ser capaces de: <i>Interpretar informaciones que aparezcan en medios de comunicación. Comenzar a reconocer la dificultad de una toma de datos para propósitos estadísticos.</i>
CONTENIDOS	"Interpretación, representación y tratamiento de la información, especifica los siguientes contenidos sobre lo previsto con anterioridad: <i>Gráficas estadísticas usuales.</i> <i>Parámetros centrales y de dispersión como resumen de un conjunto de datos estadísticos.</i> <i>Algoritmos para calcular parámetros centrales y de dispersión sencillos.</i>	Como recomendaciones de tipo metodológico, no se debe trabajar únicamente en el dominio de técnicas, sino que en todo momento el alumno debe saber qué se está haciendo. Se deben proponer análisis de datos basados en diferentes medidas de centralización: media, mediana y moda. Además, la especial motivación que supone para estos alumnos los temas relacionados con el entorno, deportes, modas, etc, favorece la propuesta de investigaciones y estudios de tipo estadístico.
	Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre (B.O.E. de 16/01/2001) que modifica el 1007/91, relativo al establecimiento de las enseñanzas mínimas correspondientes a la E.S.O.	Decreto 148/2002 de 14 de mayo , que modifica el anterior (Decreto 106/1992) y establece las enseñanzas correspondientes a la E.S.O. en Andalucía

OBJETIVOS	Se introduce uno nuevo que hace mención explícita a la Estadística: 7. <i>Emplear los métodos y procedimientos estadísticos y probabilísticos para obtener conclusiones a partir de datos recogidos en el mundo de la información.</i>	Se insiste en la necesidad de la adaptación de los ciudadanos y ciudadanas a nuevas situaciones derivadas de la sociedad actual tan cambiante y su capacitación para recibir, procesar y emitir información cada vez más tecnificada. Desde esta perspectiva, indica, hay que cuestionarse qué conceptos y procedimientos matemáticos son potencialmente útiles para la formación integral de las personas y las demandas que la sociedad les plantea. <i>Utilizar el conocimiento matemático para organizar, interpretar e intervenir en diversas situaciones de la realidad.</i> <i>Comprender e interpretar distintas formas de expresión matemática e incorporarlas al lenguaje y a los modos de argumentación habituales.</i> <i>Reconocer y plantear situaciones en las que existan problemas susceptibles de ser formulados en términos matemáticos, utilizar diferentes estrategias para resolverlos y analizar los resultados utilizando los recursos apropiados.</i>
-----------	--	--

CONTENIDOS	El tema de las medidas de tendencia central lo encontramos por primera vez en el curso segundo, haciendo referencia únicamente a la media aritmética y moda. En Tercer curso los contenidos aparecen agrupados en bloques temáticos entre los que encontramos uno de Estadística y Probabilidad. Aquí sí se habla de parámetros de centralización, sin especificar ni descartar ninguno, mientras que en los criterios de evaluación se perfila más esta cuestión, mencionando explícitamente “los parámetros estadísticos más usuales: moda, mediana y media aritmética”. En Cuarto curso se incluye como contenidos no sólo lo relativo al cálculo, sino que se especifica también la interpretación de los parámetros de centralización en distribuciones discretas y continuas, incorporando el uso de la calculadora.	<i>Se propondrán análisis de datos basados en las diferentes medidas de centralización: media, mediana y moda.</i> Para el curso segundo, donde aparece por primera vez en la etapa, contenidos concretos sobre las medias de centralización, señala: <i>Las medidas de centralización: media, moda y mediana. Se orientarán las intervenciones, más que a realizar cálculos reiterados, a reconocer la necesidad de este tipo de medidas y a indicar en qué sentido hay dependencia entre una descripción de los datos y el uso de una u otra medida. Al comparar tablas de datos con ayuda de las medidas de centralización se propicia la elaboración de conjeturas y la necesidad de establecer otros tipos de medidas que describan más adecuadamente la colección de informaciones disponibles. La posibilidad o no de calcular las diferentes medidas de centralización, a partir de tablas de datos, permitirá establecer distinciones entre los datos (cuantitativos y cualitativos, agrupados o no) y un acercamiento intuitivo a la noción de dispersión.</i> En el curso de Tercero no se proponen contenidos de estadística, que se retoman en Cuarto, en las dos opciones A y B, comenzando con una revisión de lo anterior para continuar con las medidas de dispersión.
EVALUACIÓN	Los alumnos deben ser capaces de “obtener e interpretar la tabla de frecuencias y el diagrama de barras así como la moda y la media aritmética de una distribución discreta sencilla, con pocos datos y utilizando, si es preciso, una calculadora de operaciones básicas”.	

En todos estos Decretos, salvo quizás en el último, se puede apreciar que queda sin precisar con demasiada exactitud qué enfoque dar al tratamiento de estos temas. No obstante, analizando los objetivos que se persiguen, el énfasis puesto en la interpretación de datos y gráficos y ciertas aclaraciones en cuanto a la utilización del

análisis exploratorio de datos, se observa cómo este enfoque aparece por primera vez en las orientaciones curriculares de la Estadística en España.

En cuanto a los contenidos, es en esta etapa educativa, de 12 a 16 años, en la que está previsto que se trabajen los parámetros de centralización y las medidas de posición, que es el tema que nos ocupa, así como el análisis de conjuntos de datos, utilizando representaciones gráficas e interpretaciones de las mismas, cálculos de parámetros, obtención de conclusiones a partir de ellos, detección de errores en los datos, etc.

Respecto al Análisis de Datos, en nuestros currículos se hace una muy breve mención al tema, y no de manera demasiado explícita. Únicamente, en el Real Decreto 106/92 (BOJA de 20 junio 92) se indica, al tratar el tema de los parámetros de centralización: *"La valoración crítica del grado de representatividad del parámetro de centralización elegido, debe llevarse a cabo mediante la interpretación exploratoria de los datos y utilizando la información aportada por los parámetros de dispersión"*. No obstante esta ausencia, en los libros de texto sí están empezando a aparecer contenidos relativos al Análisis de Datos: gráfico del tronco, gráfico de la caja, algunas de sus posibilidades en el estudio de conjuntos de datos, ...

ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO

Aunque la enseñanza de la estadística se contemplaba en los anteriores planes de estudio, el mayor énfasis que ahora se hace sobre las actividades de análisis exploratorio de datos nos lleva a replantearnos la forma en que estos contenidos son introducidos. Nos centramos en las medidas de posición central, que, aunque aparentemente simples, al preguntarnos por su *significado* observamos que éste tiene un carácter complejo. Siguiendo a Batanero y Godino (2001), consideramos las siguientes entidades primarias como constituyentes del significado de un concepto:

Problemas y situaciones que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge el objeto. Un ejemplo, en el caso de la media, sería encontrar la mejor estimación de una cantidad desconocida.

Procedimientos, algoritmos, operaciones. Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de *prácticas*, que llega a convertir en rutinas con el tiempo. Prácticas características en la solución de problemas de promedios serían sumar una serie de valores y dividir por el número de sumandos.

Representaciones materiales utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos).

Abstracciones (conceptos, proposiciones). Las definiciones y propiedades características y sus relaciones con otros conceptos.

Argumentos que empleamos para probar las propiedades del concepto y que llegan a formar parte de su significado.

Además, el significado de un concepto matemático varía según la institución considerada y los instrumentos semióticos disponibles en la misma. Al considerar la institución escolar, donde se fijan unos significados determinados para los conceptos a enseñar, el significado construido por un alumno en particular, en un momento de su proceso de aprendizaje, puede no corresponderse con el asignado por dicha institución. Por otro lado, tampoco el significado en una institución escolar, como por ejemplo, la enseñanza secundaria, se tiene que corresponder exactamente con el atribuido por la de los matemáticos profesionales.

Objetivos del análisis y su interés

El objetivo principal de este análisis es determinar qué dificultades encuentran los estudiantes de secundaria en su proceso de construcción de ciertos contenidos. En concreto nos vamos a centrar como ejemplo en de las medidas de posición central, media, mediana y moda. Está claro que estas dificultades están relacionadas con la enseñanza recibida y con el significado institucional de los conceptos que se ha mostrado al alumno. Por ello, las dificultades que queremos evaluar deben referirse a los problemas y tareas concretas que se proponen a estos alumnos, los algoritmos de cálculo y otras prácticas en la resolución de problemas, las representaciones, propiedades, definiciones y las validaciones presentadas.

Un objetivo importante es, por tanto, determinar el significado institucional que de las medidas de posición central se presenta en la enseñanza secundaria, que será luego comparado con los significados personales, determinados a través de los sistemas de prácticas empleados, lo que podría servir para orientar los contenidos concretos que sobre los promedios deberían incluirse en este nivel de enseñanza.

A continuación pretendemos caracterizar este último, mediante un análisis de los libros de texto, puesto que éstos constituyen uno de los recursos más utilizados en el aula y, por tanto, que más influyen en qué, cómo y durante cuánto tiempo se trabaja un determinado contenido con los estudiantes.

Diversos autores señalan la importancia de este recurso didáctico: Por ejemplo, el informe Cockroft (1985) afirma que *los libros de texto constituyen una ayuda inestimable para el profesor en el trabajo diario del aula*, opinión que compartimos, desde nuestra experiencia docente.

Rico (1990) señala que el libro de texto es una herramienta mediante la cual el profesorado mantiene y transmite el saber institucionalizado, haciendo de puente entre éste y el estudiante, hasta el punto de que la carencia del mismo puede ser uno de los factores que hagan fracasar un intento de cambio de currículo. No obstante, apunta que, a veces, el esfuerzo para que los estudiantes se adapten al libro de texto llega a ser excesivo y que la imagen que presenta del conocimiento es algo estática. Coincidimos que el profesor en el aula utiliza otros recursos y suprime o añade contenidos a los presentados en los libros de texto. No obstante, el análisis de una muestra amplia y representativa de los libros nos da una idea bastante clara de lo que los alumnos reciben en la enseñanza.

Chevallard (1991) sugiere que los libros de texto presentan dos características importantes: ofrecer una concepción legitimada del saber a enseñar e institucionalizar una forma de progresión del conocimiento de los estudiantes. Por otro lado, como afirman Robert y Robinet (1989), pensamos que el estudio de los libros de texto nos permite conocer, de manera indirecta, la concepción del profesorado sobre un contenido específico, puesto que al tomar la decisión de utilizar uno u otro texto, se está posicionando y compartiendo lo que éste propone.

Según Ortiz (1996, 1999), un libro de texto se considera como un segundo nivel de transposición didáctica, después del primer nivel que lo constituirán los currículos y programas oficiales. Si en un texto aparece un significado sesgado, éste puede llegar a transmitirse a los alumnos, debiendo el profesor que los usa mantener una permanente vigilancia epistemológica sobre el contenido de los libros de texto. En Ortiz y cols. (2000, 2002) se muestran ejemplos de estos problemas en relación a la enseñanza de la probabilidad.

Con la nueva Educación Secundaria Obligatoria se ha producido una publicación de muchos nuevos libros de texto, que tratan de incorporar las recomendaciones didácticas de estos y otros autores. Es por ello importante analizar el significado de los conceptos

estadísticos que estos libros transmiten, si queremos asegurar que cumplen la función para la que han sido diseñados.

Muestra empleada

Para llevar a cabo el análisis, hemos tomado 22 libros de texto seleccionados, que incluyen entre sus temas contenidos relativos a estadísticos de posición central, media, mediana y moda, del segundo ciclo de la E.S.O. En concreto hemos tomado 14 libros de texto de 3º curso de E.S.O. y 8 libros de 4º curso de E.S.O. Los libros analizados se presentan en la tabla.

La selección de los libros se ha hecho teniendo en cuenta los cursos en los que se incluyen temas específicos que traten de las medidas de centralización en la Enseñanza Secundaria Obligatoria que son tercero y cuarto curso.

Aunque el currículo que se propone en Andalucía los contenidos relativos a los estadísticos que nos ocupan, media, mediana y moda, se deben trabajar en el primer ciclo de la E.S.O., y hacer una revisión en 4º, la mayor parte de las editoriales proponen estos temas en los libros de 3º y 4º de ESO, y más frecuentemente, en 3º, por lo que hemos incluido una muestra mayor de libros de este nivel. Debido a esto, nosotros nos hemos centrado en estos dos cursos, intentando incluir un abanico de editoriales que abarque las más conocidas y utilizadas entre los docentes, y también algunas obras recientes con un ámbito de difusión menor, pero que presentan un enfoque novedoso. Los libros han sido publicados entre 1994 y 1999 y corresponden a 17 editoriales diferentes, lo que creemos representa bien los libros de texto de este nivel escolar.

Libros de textos incluidos en el análisis

	Título	Autores	Editorial	Año
1	Matemáticas 3º ESO. Serie nuestro mundo	J. Colera, J.E. García, I. Gaztelu y M. J. Oliveira	Anaya	1998
2	Matemáticas 3º ESO	J. R. Vizmanos y M. Anzola	Sm	1996
3	Sigma. Matemáticas 3º ESO	J. R. Vizmanos y M. Anzola	Sm	1999
4	Matemáticas 3º ESO	V. Frías y otros	Edelvives	1995
5	Matemáticas 3º ESO. Proyecto Adara	I. Lazcano y J.F. Sanz	Edelvives	1998
6	Fractal. Matemáticas 3º ESO	F. Álvarez y A. Ruíz	Vicens Vives	1996
7	Educación Secundaria. Matemáticas 3º ESO	F. Alvarez y otros	Vicens Vives	1994
8	Matemáticas 3º ESO	A.J. Ramírez y otros	Ecir	1995
9	Matemáticas 3º ESO	Grupo Edebé	Guadiel	1998
10	Matemáticas 3º ESO	A. Miñano y J.A. ródénas	Bruño	1998
11	Matemáticas 3º ESO	J. M. Arias y J.A. Pérez	Casals	1995
12	Matemáticas 3º ESO	C. González y otros	Editex	1998
13	Matemáticas 3º ESO	J.L. Sánchez y J. Vera	Oxford Ed.	1998
14	Matemáticas 3º ESO	J.F. Gutiérrez	Donostiarra	1996
15	Matemáticas 4º ESO. Opción Proyecto 2000	A. L. Rico y otros	Algaida	1994
16	Matemáticas 4º ESO. Opción Proyecto 2000	B. L. Rico y otros	Algaida	1994
17	Matemáticas 4º ESO. Opción A	C. Amigo y otros	McGraw-Hill	1997
18	Matemáticas 4º ESO. Opción A	J. L. Sánchez y J. Vera	Oxford	1998
19	Matemáticas A 4º ESO	J.M. Arias y otros	Casals	1996

20	Secundaria 2000. Matemáticas A 4º ESO	J.A. Almodóvar, J. Gil y A. Nortes Santillana	1998
21	Miríada XXI. Opción Matemáticas 4º ESO.	B. M. J. Ovejero y otros	McGraw-Hill 1999
22	Construir las Matemáticas 4º ESO	R. Pérez y otros.	Proyecto Sur 1999

Metodología del análisis

Para el análisis de los libros de texto, se han seleccionado aquellos capítulos en los que se tratan las medidas de centralización que nos ocupan y algunos otros conceptos relacionados con nuestro estudio, como son representaciones gráficas de conjuntos de datos, estadísticos de orden, como cuartiles, percentiles, etc., y medidas de dispersión.

Una vez hecha la selección de capítulos, se ha realizado un análisis de contenido de los mismos, en el que se han llevado a cabo los siguientes pasos:

En primer lugar, se ha realizado una lectura minuciosa de los capítulos que tratan el tema, clasificando y agrupando las diferentes definiciones, propiedades, representaciones y justificaciones prototípicas e intentando determinar los elementos de significado que contienen: campos de problemas, contextos, definiciones, algoritmos de cálculo, propiedades, etc. Todo ello como guía para establecer el significado que, desde la institución escolar, se da a estos conceptos.

Para determinar los elementos de significado hemos utilizado las entidades primarias citadas antes (problemas y situaciones, procedimientos y algoritmos, representaciones, definiciones y propiedades, argumentos y contextos), que constituyen nuestro significado institucional de referencia y hemos ido determinando cuáles de ellos aparecen en los distintos libros de texto. (ver Anexo)

Posteriormente, se han elaborado tablas comparativas que recogen los elementos de significado presentes en los diferentes textos en relación con cada contenido, lo que nos ha facilitado el análisis y la extracción de conclusiones al respecto, que se presentan a continuación.

El proceso de análisis ha sido inductivo y cíclico, como se recomienda en el análisis de datos cualitativo (Gil Flores, 1994; Huberman y Miles, 1994). Han sido necesarias varias lecturas para la elaboración progresiva de las categorías, la comparación de casos incluidos y excluidos en las mismas y la revisión sucesiva hasta llegar a los resultados que presentamos.

Campos de problemas presentados en los libros

Hay algunos campos de problemas que apenas aparecen en los libros de texto, a pesar de su importancia y de que podrían ser fácilmente comprensibles por los alumnos.

En el caso de la media, es curioso observar cómo el problema del que surge la primera idea de media, estimar una medida a partir de diversas mediciones realizadas, en presencia de errores, no aparece más que en uno de los libros analizados, punto que nos ha llamado la atención porque no creemos que pueda presentar una dificultad especial en los estudiantes de estas edades.

No ocurre así con otro campo de problemas relativo a la media, aquél en el que hay que estimar un valor de máxima probabilidad en un conjunto, que presenta una doble dificultad, por un lado los estudiantes no están habituados a efectuar estimaciones y por otro, la probabilidad también es un concepto que les resulta difícil. No obstante, aunque no se presentasen como problemas, creemos que sería adecuado presentar algunos ejemplos de aplicación de la media en este tipo de problema, por ejemplo, al hablar de la esperanza de vida o de la duración estimada de un examen o de una lámpara.

En cuánto a la mediana, hay que destacar el poco uso que se hace de ella en los libros de texto para efectuar comparaciones de conjuntos de datos, siendo como es éste un aspecto de la mediana que, creemos, sería positivo explotar al realizar análisis exploratorios de datos. Por otro lado, encontramos que se presenta con mayor frecuencia la mediana como estadístico útil para variables ordinales que cuando la media del conjunto no es demasiado representativa. Creemos que se está desaprovechando un aspecto de la mediana que puede ayudar a los estudiantes a entender la oportunidad de usar una u otra medida de centralización para representar un conjunto de datos.

Para la moda, los dos campos de problemas, aparecen prácticamente con la misma frecuencia, sin que haya diferencias significativas entre uno y otro.

Contextos presentados

Las situaciones de tipo aleatorio tienen una fuerte presencia en nuestro entorno. Puesto que la estadística es un tema en el que es fácil conectar con el entorno y la vida cotidiana de los estudiantes, pensamos debiera aprovecharse esta oportunidad, siguiendo las recomendaciones actuales sobre la enseñanza de la estadística.

Si queremos que los alumnos aprecien la utilidad de este tema, sería necesario presentar una variedad de contextos de aplicación y situaciones en las que los parámetros de centralización pueden resultar muy útiles a la hora de obtener información acerca de un tema concreto. Para valorar hasta qué punto se tiene esto en cuenta, se ha realizado un análisis de los contextos en los que se presentan los problemas y ejercicios en los libros de texto, así como las aplicaciones de los estadísticos que nos ocupan.

En nuestra opinión los autores de los libros analizados son conscientes de este punto, puesto que los contextos que hemos encontrado en los libros son muy variados y, además, todos ellos presentan un porcentaje alto de aparición. Estos libros no se limitan a los juegos de azar o a situaciones escolares y familiares, sino que también se incluyen aplicaciones al mundo físico (fabricación industrial, meteorología), biológico (características escolares, salud), social (encuestas de opinión, deporte) y político (economía, consumo). Es decir, se tienen en cuenta los cuatro grandes grupos de aplicaciones de la estadística citados por Tanur (1992).

Algoritmos y procedimientos para la resolución de los problemas.

La mayoría de las situaciones problema anteriores se presentan en los textos mediante ejemplos resueltos en los que se utilizan diversas técnicas específicas para el cálculo de los promedios o para la representación gráfica de los datos, que el alumno debe aprender.

Los libros de texto analizados presentan las técnicas concretas para resolver las situaciones planteadas, bien de forma explícita incluyendo ejemplos resueltos, o bien dando únicamente indicaciones para que sean los propios estudiantes quienes realicen las tareas en problemas propuestos.

El cálculo de los estadísticos estudiados depende de la forma de presentación de los datos y del tipo de variable que se maneje. Este aspecto se tiene en cuenta en la mayoría de los textos analizados, que diferencian, explícitamente, unos casos de otros.

Lenguaje y representaciones

Otro punto que hemos analizado son los términos, símbolos y representaciones tabulares o gráficas empleadas en el tema.

Este tipo de elementos de significado de un objeto matemático sirve para representar las definiciones y propiedades de dicho objeto, así como los problemas y datos. En la terminología que Vergnaud (1982) utiliza para describir un concepto, serían el conjunto

de representaciones simbólicas usadas para representar un concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere. Desde el marco teórico de nuestro estudio su importancia se debe a que en el trabajo matemático usamos normalmente unos objetos concretos (las representaciones) en función o representación de los objetos abstractos o de las situaciones en las que intervienen, existiendo una correspondencia semiótica entre el objeto representante y el objeto representado.

La forma de presentar los datos no es un tema trivial y que haya que pasar por alto.

Al analizar los datos recogidos apreciamos que, en algunos textos, faltan ciertos elementos, concretamente gráficos y representaciones simbólicas. Una de las dificultades que encuentran los estudiantes a la hora de analizar un conjunto de datos es, precisamente, la presentación de los mismos, especialmente en el caso en que vengan dados en forma gráfica.

Definiciones y propiedades.

Para cada uno los conceptos media, mediana y moda, hemos analizado las definiciones y propiedades presentadas explícitamente al alumno, así como el uso implícito que se hace de ellas en los libros analizados.

Mientras que, tanto los campos de problemas como los procedimientos y representaciones los encontramos presentes, en mayor o menor medida en todos los libros de texto analizados, de estos elementos lo que sí aparece como constante en todos ellos son las definiciones. Sin embargo, sólo algunas de las propiedades aparecen y, generalmente, no de forma explícita sino como resultados o conclusiones de problemas resueltos o como propuestas a los alumnos para que ellos mismos las obtengan.

Tanto en el caso de la media, como en la mediana y la moda, hay una definición que predomina bastante sobre las demás, lo que nos indica gran homogeneidad en los libros a la hora de presentar estos conceptos.

Se trata de la definición a partir del algoritmo, para el caso de la media, enfatizando la idea de media como operación, en lugar de centrarse en la idea de media como representante, que sería a nuestro juicio más adecuada.

En el caso de la mediana la definición preferente es como valor que divide a la muestra en dos grupos con igual número de efectivos. En este caso se enfatiza bien la idea de valor central.

Para la moda lo predominante es definirla como el valor de máxima frecuencia. En ninguno de estos dos casos se introduce a partir de gráficos.

Una vez analizadas las definiciones hemos estudiado las propiedades introducidas explícita o implícitamente, clasificándolas en numéricas, algebraicas y estadísticas.

Aunque con una baja frecuencia de aparición, hemos encontrado presentadas las propiedades numéricas en algunos de los libros de texto como tales, es decir, explícitamente y no tanto como resultados obtenidos a partir de ejercicios o problemas.

Si las propiedades numéricas y algebraicas aparecen poco tratadas en los textos estudiados, tampoco las propiedades estadísticas aparecen suficientemente estudiadas.

En definitiva hay un escaso tratamiento de las propiedades estadísticas de los promedios en los libros de texto, con excepción de su cualidad de representantes del conjunto de datos, y esto no en todos los libros.

Argumentos y demostraciones.

Los libros usan diversas formas de justificar los resultados o propiedades. No todos los tipos de argumentos posibles se utilizan, de manera significativa, en los libros

de texto del nivel educativo que hemos analizado. La comprobación de casos particulares, y eventualmente, el uso de algún contraejemplo, sí que es de uso frecuente, posiblemente debido a que se trata de razonamientos sobre casos concretos, lo que resulta más fácil a los estudiantes de estas edades, que si se argumenta con un nivel mayor de abstracción. No obstante, encontramos el problema de que se generalizan propiedades con demasiada rapidez a partir de uno o varios casos particulares que las verifiquen, lo que puede dar lugar a pensar que esta forma de razonar es correcta, lo cual, como sabemos no es cierto y, sin embargo, se da con demasiada frecuencia, especialmente entre los estudiantes más jóvenes.

CONCLUSIONES

Una primera conclusión que se puede obtener de este análisis curricular es que no se presta a la estadística tanto interés como el que hemos encontrado en otros países, y en particular en el último documento de Estándares Curriculares de los Estados Unidos, en que la estadística aparece como una constante desde el jardín de infancia hasta la universidad y los contenidos son mucho más amplios y detallados que los españoles. En dicho currículo se enfatiza la necesidad de un cambio en la metodología y se propone centrar la estadística alrededor del trabajo con datos reales. Los alumnos deben trabajar con proyectos, recogiendo sus propios datos a partir de encuestas, experimentos y observaciones. Los conceptos estadísticos deben presentarse sólo como respuesta a problemas de análisis de datos, para dotarlos de significado.

Creemos que sería importante reforzar los contenidos estadísticos en el currículo español en la línea sugerida por los estándares (NCTM, 2000), no tanto por seguir las tendencias de otros países, sino para adaptar la enseñanza a las necesidades de la sociedad de la información y preparar a los ciudadanos para los retos a que deberán enfrentarse en su trabajo futuro.

Una segunda parte del análisis se dedica a los textos. En correspondencia con el objetivo planteado y después de realizar un análisis exhaustivo de una amplia muestra de libros de texto, hemos podido identificar los elementos de significado más comunes presentados en ellos sobre las medidas de posición central. Esto nos permite presentar una panorámica del contenido que los autores de los libros consideran más adecuado para este nivel educativo.

Tras realizar una clasificación de los elementos encontrados, el análisis revela que en los libros de texto de esta etapa educativa, se da mucha más importancia a las definiciones y al cálculo de las medidas de posición central que al estudio de sus propiedades, puesto que el porcentaje de texto, ejemplos y ejercicios dedicados a ambos es notablemente mayor que el dedicado a éstas.

Una de las primeras consecuencias que este hecho puede tener es que, aunque los estudiantes consigan manejar perfectamente los procedimientos de cálculo, pueden no alcanzar una comprensión completa de estas medidas, sus posibilidades de uso, las ventajas de una sobre las otras y la conveniencia, por tanto, de elegir unas u otras según la situación, ya que hay elementos de significado que no se adquieren de manera espontánea y que no se tratan explícitamente.

Hay que destacar también la importancia que tiene el lenguaje en este proceso de enseñanza aprendizaje y que se pone de manifiesto en este análisis con la gran variedad de elementos empleados por los distintos libros de texto. Es necesario, pues, tratar de manera consciente este tema que, en muchas ocasiones, parece trivial y, sin embargo, entraña dificultades para los estudiantes.

En cuanto a los campos de problemas, hemos constatado que hay situaciones de las que emergen los estadísticos de tendencia central que no hemos encontrado aquí, por lo que debemos llamar la atención sobre este punto, ya que su tratamiento explícito podría contribuir a enriquecer la significatividad del aprendizaje de estos conceptos. Tampoco se trabaja con proyectos, sino que los problemas propuestos son puntuales y no se relacionan entre sí.

Referencias

- Batanero, C. y Godino, J. D. (2001). *Análisis de datos y su didáctica*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Cobo, B. (2001). Problemas y algoritmos relacionados con la media en los libros de texto de secundaria. En M. Beltrán (Ed.), *Jornadas Europeas de Enseñanza y Difusión de la Estadística* (pp. 241-252). Palma de Mallorca: Instituto Balear de Estadística.
- Cobo, B y Batanero, C. (2000). La mediana en la educación secundaria ¿Un concepto sencillo? *UNO*, 23, 85-94.
- Cobo, B. y Batanero, C. (2002). Elementos de significado implícitos en la resolución de un problema de promedios. En J. M. Cardeñoso y otros (Eds.), *Investigación en el Aula de Matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 155-160). Granada: Sociedad Thales.
- Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada
- Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Connor, D. (2002). Census at School. Creation to Collation to Classroom. En B. Phillips (Eds.) *Proceedings of ICOTS-6*, Ciudad del Cabo: IASE. CD-Rom
- Chevallard (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grénoble: La Pensée sauvage.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gil Flores, J. (1994). *Análisis de datos cualitativos*. Barcelona. P.P.U.
- Huberman, A. M. y Miles, M. (1994). Data management and analysis methods. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444). Londres: Sage Publications.
- N.C.T.M. (1991a). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: S.A.E.M. Thales.
- N.C.T.M. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada. S.A.E.M. Thales.
- Ortíz, J. J. (1996). *Significado del los conceptos probabilísticos en los textos de Bachillerato*. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J. (1999). *Significado del los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. J., Batanero, C., Serrano, L. y Cañizares, M. J. (2000) Variables de tarea en los ejercicios de probabilidad en los libros de texto. En C. Loureiro, F. Oliveira y L. Brunheira (Eds.), *Ensino e Aprendizagem da Estatística* (pp. 138-146). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Estatística.
- Ortiz, J. J., Serrano, L. y Batanero, C. (2002). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *SUMA*, 36.
- Ottaviani, G. (1999). Promover la enseñanza de la estadística: La contribución del IASE y su cooperación con los países en vías de desarrollo. *Actas de la Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística*. Florianópolis.

- Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemáticas: Una perspectiva cultural. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 17-62). Sevilla: Alfar.
- Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Enoncés d'exercices de manuels de seconde et representations des auteurs de manuels*. (IREM). Universidad de París.
- Starkings, S. (1996). An international overview of data analysis within the mathematics curriculum. En B. Phillips (Ed.), *Papers on statistical education presented at ICME-8*, (pp. 7-14). Universidad tecnológica de Swinburne.
- Tanur, J. M. (1992). *La estadística una guía de lo desconocido*. Alianza Editorial. Madrid.
- Vasco, C. E. (1994). Handling data systems in the curriculum for general basic education. *Proceedings of the IV International Conference on Teaching Statistics* (pp. 8-15). Marrakech: INSEA.
- Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *Learning of Mathematics*, 3(2), 31-41.

ANEXO

Campos de problemas
Media como mejor estimación
Media como reparto equitativo
Media como valor probable
Mediana como representante
Representante de datos ordinales
Mediana para comparar conjuntos
Moda como valor más frecuente
Representaciones
Verbales
Simbólicas
Gráfica
Númericas
Algoritmos y procedimientos
Cálculo media datos aislados
Cálculo media ponderada
Cálculo gráfico media
Invertir algoritmo media
Buscar distribución dada media
Calculo mediana datos aislados impar
Calculo mediana datos aislados par
Cálculo gráfico mediana
Calculo moda datos aislados
Cálculo gráfico moda
Definiciones y propiedades
Definición de media como algoritmo
Definición de media como promedio
Definición mediana (central)
Definición mediana (dos partes)
Definición moda (más frecuente)
Valor en el rango
Intervienen todos los valores
Cambia valor al cambiar el dato
Operación interna
Elemento neutro
No asociativa
Cambios origen y escala
Media suma
Moda no siempre única
Moda siempre definida
Representante
Centro de gravedad
Posición datos Simétricas
Media poco resistente
Suma desviaciones
Representante para datos bimodal
Argumentos
Casos particulares y contraejemplos
Deductivos

