



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 9

“EL QUIJOTE Y LAS MATEMÁTICAS”

PONENCIAS

- D. Juan Antonio García Cruz***
“MATEMÁTICAS Y NAVEGACIÓN EN LA ÉPOCA DE CERVANTES” _____ **425**
- D. Rafael Ángel Martínez Casado***
“CURIOSIDADES Y CASUALIDADES MATEMÁTICAS EN EL QUIJOTE” _____ **427**
- D. Luis Balbuena Castellano y D. Juan Emilio García Jiménez***
“EL QUIJOTE Y LAS MATEMÁTICAS” _____ **443**
- D. Ángel Requena Fraile***
“PRESENCIA MATEMÁTICA EN EL QUIJOTE, UNA REBUSCA” _____ **451**
- Dña María J. Ríos, D. Javier Montero y D. Francisco Parra***
“ENCONTRANDO EL LUGAR DE LA MANCHA CON LAS MATEMÁTICAS” _____ **461**

MATEMÁTICAS Y NAVEGACIÓN EN LA ÉPOCA DE CERVANTES

D. Juan Antonio García Cruz

Miguel de Cervantes vivió en una época de descubrimientos geográficos y de desarrollo de la navegación oceánica. Aunque no fue una época muy importante en el desarrollo de la Matemática si lo fue en la aplicación de matemáticos ilustres a resolver problemas planteados por la navegación.

Fue además una época de gran auge de la publicación cartográfica y de propuestas interesantes a la representación plana de la esfera terrestre mediante el uso de proyecciones, cuya más importante aportación es la Weltkarte de Mercator de uso en la navegación.

La navegación oceánica plantea dos problemas importantes y no fáciles de resolver: la determinación de la latitud y la longitud en el mar.

Mostraremos algunas soluciones propuestas a lo largo del siglo XVI y principios del XVII por matemáticos, cartógrafos y cosmógrafos que incluyen a Martín Cortés, Pedro de Medina, Gerard Mercator, Edward Wright, Tycho Brahe y Galileo Galilei.

CURIOSIDADES Y CASUALIDADES MATEMÁTICAS EN EL QUIJOTE

Rafael Ángel Martínez Casado

Una de las cosas que ha provocado el Centenario del Quijote no ha sido que la gente lo lea más, o simplemente lo lea, sino que muchas y muy variadas personas se han puesto a estudiarlo, analizarlo y sacarle parte de todo lo de provecho que hay en él. Aunque suene a petulancia no me encuentro entre ellos, pues el estudio de las matemáticas en el Quijote lo llevo haciendo desde hace varios años.

De todas formas puede parecer (y seguramente lo es) una osadía por mi parte el intentar profundizar en este apasionante tema pues dicho Centenario ha provocada que se haya publicado mucho y bueno ya sobre dicho tema.

A la hora de ponerme a escribir esta ponencia me encontré con una seria duda: ¿Qué podía aportar a todo lo escrito hasta entonces? ¿A todo lo que ya se ha escrito? ¿A lo que otros compañeros han expuesto o van a exponer aquí? Es cierto que mi base documental, es decir mis notas, reflejan muchas cosas que todavía no se han escrito ni dicho, pero no es menos cierto que la mayoría, sobre todo las más significativas e importantes estaban todas escritas y dichas. No era cuestión de repetirse, pues eso podía dar la impresión que me aprovechaba del trabajo de otros.

Por eso he decidido fijarme en esas pequeñas anécdotas, curiosidades, casualidades que muchas veces pasan desapercibidas, pero que nos pueden reflejar como el magistral autor de la obra utilizaba las matemáticas cotidianas para crear su obra de arte.

CURIOSIDADES

1. Lección matemática en el Quijote

¿Alguien ha pensado alguna vez que la monumental obra del Quijote puede contener alguna lección de Matemáticas? Aunque parezca mentira si, en la segunda parte, en el capítulo 41, Sancho habla de su viaje en Clavileño y de lo que vio:

por allí miré hacia la tierra, y parecióme que toda ella no era mayor que un grano de mostaza, y los hombres que andaban sobre ella, poco mayores que avellanas; porque se vea cuán altos debíamos de ir entonces. (II, 41)

Aquí algo falla, las proporciones no son el fuerte de Sancho, y se lo intentan explicar:

A esto dijo la duquesa: “Sancho amigo, mirad lo que decís, que, a lo que parece, vos no visteis la tierra, sino los hombres que andaban sobre ella; y está claro que si la tierra os pareció como un grano de mostaza, y cada hombre como una avellana, un hombre solo había de cubrir toda la tierra”. (II, 41)

En otras palabras la duquesa intenta explicar, de forma clara algo sobre proporciones... que no debió entender muy bien Sancho

-Así es verdad -respondió Sancho-, pero, con todo eso, la descubrí por un ladito, y la vi toda.

-Mirad, Sancho -dijo la duquesa-, que por un ladito no se ve el todo de lo que se mira.

-Yo no sé esas miradas -replicó Sancho-: sólo sé que será bien que vuestra señoría entienda que, pues volábamos por encantamento, por encantamento podía yo ver toda la tierra y todos los hombres por doquiera que los mirara;(II, 41)

Claro que por proporciones, Don Quijote no andaba muy a la zaga con sus exageraciones y complicaciones cuando de gigantes se trataba:

-¿Qué gigantes? -dijo Sancho Panza. Aquellos que allí ves -respondió su amo- de los brazos largos, que los suelen tener algunos de casi dos leguas. (I, 8)

(unos 25 km de alto los gigantitos)

el buen caballero andante, aunque vea diez gigantes que con las cabezas no sólo tocan, sino pasan las nubes, y que a cada uno le sirven de piernas dos grandísimas torres, y que los brazos semejan árboles de gruesos y poderosos navíos, y cada ojo como una gran rueda de molino (II, 6)

(Con estas proporciones quedaba un poco “desproporcionado” el gigante, sobre todo si tiene que sobrepasar a las nubes)

2. Curiosidades lingüísticas

a) La propia palabra MATEMÁTICAS. Aparece cuatro veces y ya las conocéis. Es curioso ver la importancia que daba Cervantes a las mismas, a pesar que en aquella época España no estaba volcada precisamente en las mismas. Además para él la demostración matemática era del todo irrefutable, no como otras demostraciones o explicaciones.

Pero no deja de ser curioso que sólo aparece otras dos veces la palabra matemáticas en toda su obra. Una hablando de las demostraciones, como no, y la otra como algo de gran importancia que ha estudiado el protagonista del capítulo, mezclándolo con la astronomía.

*De los diestros dijo una vez que eran maestros de una ciencia o arte que cuando la habían menester no la sabían, y que tocaban algo en presuntuosos, pues querían reducir a **demostraciones matemáticas**, que son infalibles, los movimientos y pensamientos coléricos de sus contrarios. Con los que se teñían las barbas tenía particular enemistad; y, riñendo una vez delante dél dos hombres, que el uno era portugués, éste dijo al castellano, asiéndose de las barbas, que tenía muy teñidas (Licenciado vidriera)*

*Señores, esto no es encantamento, y esta cueva por donde aquí hemos venido, no sirve sino de atajo para llegar desde allá arriba a este valle que veis, que una legua de aquí tiene más fácil, más llana y más apacible entrada. Yo levanté aquella ermita, y con mis brazos y con mi continuo trabajo cavé la cueva, y hice mío este valle, cuyas aguas y cuyos frutos con prodigalidad me sustentan. Aquí, huyendo de la guerra, hallé la paz; la hambre que en ese mundo de allá arriba, si así se puede decir, tenía, halló aquí a la hartura; aquí, en lugar de los príncipes y monarcas que mandan el mundo, a quien yo servía, he hallado a estos árboles mudos, que, aunque altos y pomposos, son humildes; aquí no suena en mis oídos el desdén de los emperadores, el enfado de sus ministros; aquí no veo dama que me desdeñe, ni criado que mal me sirva; aquí soy yo señor de mí mismo; aquí tengo mi alma en mi palma, y aquí por vía recta encamino mis pensamientos y mis deseos al cielo; aquí he dado fin al **estudio de las matemáticas**, he contemplado el curso de las estrellas y el movimiento del sol y de la luna; aquí he hallado causas para alegrarme y causas para entristecerme que aún están por venir, que serán tan ciertas, según yo pienso, que corren parejas con la misma verdad. Ahora, ahora, como presente, veo quitar la cabeza a un valiente pirata un valeroso mancebo de la casa de Austria nacido. (Los trabajos de Persiles y Segismunda, capítulo 18, libro tercero)*

b) Metros y algebristas perdidos por el Quijote. No deja de resultar curioso la forma que aparecen unos términos que los asociamos a las matemáticas pero que en la obra tienen otro completamente diferente:

Por una parte nos encontramos con la palabra **metro**, pero no como medida de cantidad (tendrían que pasar muchos años hasta que apareciera dicha unidad de medida) sino con el significado de verso:

*que decían que no eran sino **tres y medio**, que no dejaría de componer los tales **metros**, (II, 4)*

*no hay mujer que crea que para ella se hicieron los **metros**. (II, 4)*

Más curioso, por lo menos para nosotros los matemáticos, es la aparición de la palabra algebrista, que no es un experto en álgebra sino un “arreglador de huesos”:

*fue ventura hallar un **algebrista**, con quien se curó el Sansón desgraciado. (II, 15)*

3. Curiosidades con los números

En otras ponencias, en el cuadernillo de la Federación, en otros artículos (destaco el de Luis Balbuena) se han visto la gran utilización que se hace de los números y han surgido algunas curiosidades. De todas las que hay y que todavía no se han enumerado podemos destacar unos cuantos más:

a) ¿Dónde está el cero? Nunca aparece el número CERO. A pesar de la gran cantidad y variedad en que aparecen los diversos números, nunca aparece la palabra cero, no así su concepto en palabras como ninguno, sin,...

b) El sistema duodecimal gana al sistema decimal. Resulta curioso que aparezca el término doce (41 veces) con mucha mayor frecuencia que el diez (34 veces). Lo mismo pasa con el número seis (66 veces) y el cinco (45 veces). Pero no sólo eso además aparecen los términos:

Media docena aparece 9 veces.

Una docena aparece 3 veces

Docenas aparece 9 veces (2 veces 1 – 2; 5 veces 2, 1 vez 4 y otra vez 6)

En cambio las palabras decena – decenas no aparecen nunca.

Es decir Cervantes, y por lo que es de suponer la sociedad en donde se movía y para quien escribía, seguía viendo la mayor utilidad del sistema duodecimal, con todos sus divisores, al sistema decimal.

c) A vueltas con el trece. El número 13 es un número muy curioso en el Quijote (y en otros muchos sitios) Sólo aparece 3 veces (y siempre en la segunda parte), en cambio los números cercanos a él aparecen bastantes más veces: el once aparece 7 veces, el doce (ya lo hemos visto) 41 veces, el catorce 10 veces y el quince 16 veces. Además de las tres veces que aparece en dos lo hace como sinónimo de cabezonería y la otra vez significando suerte – azar. Pero Cervantes no nos deja de maravillar y en una de las veces juega con los números (el 14) consiguiendo que el trece tenga un doble significado:

*como la infanta se estaba siempre en sus **trece**, sin salir ni variar de su primera declaración (II, 39)*

*el señor don Quijote está en sus **trece** y vuestra merced el de la Blanca Luna en sus **catorce** (II, 64)*

*Dejenme; si no, por dios que lo arroje y lo eche todo a **trece**, aunque no se venda. (II, 69)*

d) Aproximaciones y acotaciones que suenan a broma. Para dar más realidad a su narración utiliza con cierta profusión cantidades aproximadas, acotando cantidades entre dos números (sobre todo en lo relativo a las edades); pero a veces parece que utiliza dichas acotaciones y aproximaciones ridiculizando algunas medidas y números.

Aproximaciones normales (ejemplos):

*En esto, descubrieron **treinta** o **cuarenta** molinos de viento que hay en aquel campo y, así como don Quijote los vio, dijo a su escudero:*

*-La ventura va guiando nuestras cosas mejor de lo que acertáramos a desear, porque ves allí, amigo Sancho Panza, donde se descubren **treinta**, o*

pocos más, desaforados gigantes, con quien pienso hacer batalla y quitarles a todos las vidas (I, 8)

Quince años, *dos más a menos* (II, 13)

ninguna bajaba de catorce ni llegaba a *diez y ocho* años (II, 20)

que aún se está todavía en el diez y... de los años, pues tengo diez y nueve y no llego a veinte (II, 35)

La edad, al parecer, ni bajaba de los quince ni pasaba de los diez y ocho. (II, 58)

mi edad de quince no pasa: catorce tengo y tres meses, (II, 44)

Aproximaciones no tan normales:

para vender treinta o diez mil vasallos en dácame esas pajas (I, 29)

debe de haber más de veinte años, tres días más a menos. (II, 28)

desde aquí al reino de Candaya, si se va por tierra, hay cinco mil leguas, dos más a menos; pero si se va por el aire y por la línea recta, hay tres mil y docientas y veinte y siete. (II, 40)

diez y seis años, cinco meses y tres días, uno más a menos (II, 48)

e) Sucesiones literarias. Es sólo una opinión mía, pero creo que Cervantes utiliza las matemáticas, en especial las progresiones aritméticas y geométricas para darle cierto ritmo a su narración. En algunas ocasiones crea sucesiones crecientes o decrecientes, cortas, para crear ciertos “climas” en su narración

Y, despidiendo treinta ayes, y *sesenta* suspiros, y *ciento y veinte* pésetes y reniegos de quien allí le había traído, se levantó, (I, 15)

hallasen cuatro perales de Segovia, *tres* agujeros del Potro de Córdoba y *dos* vecinos de la Heria de Sevilla (I, 17)

que te comieras una docena de sapos, *dos* de lagartos y *tres* de culebras (II, 35)

sellad el rostro de Sancho con veinte y cuatro mamonas, y *doce* pellizcos y *seis* alfilerazos en brazos y lomos, (II, 69)

habla más que seis y bebe más que *doce* (II, 25)

¡Que forma más brillante de llamar a uno borracho de forma elegante!

f) ¿No aparecen dígitos? Sólo dos veces Cervantes utiliza los números arábigos escritos en toda su obra. Recordad que los números romanos los utiliza en todos los

capítulos (costumbre en aquella época y en otras muchas). Lo hace con las fechas de las cartas: una carta de Sancho a su mujer (así sabemos claramente en que año quiere fijar Cervantes su obra) y otra del Duque a Sancho:

Deste castillo, a veinte de julio de 1614. (II, 36)

Deste lugar, a 16 de agosto, a las cuatro de la mañana (II, 47)

4. Curiosidades con las operaciones

No es fácil encontrar grandes libros de literatura en los que sus protagonistas (u otros personajes) tengan que hacer operaciones matemáticas. En el Quijote no son pocas las referencias a operaciones que aparecen en la misma, y algunas de ellas no dejan de ser curiosas:

- a) **Multiplicación “mal hecha”.** En un momento dado Don Quijote tiene que hacer una multiplicación bien sencilla (aunque sea de la tabla del siete, tan difícil para nuestros alumnos) pero la hace mal ¿Lo hizo Cervantes aposta? ¿Cuál sería entonces su intención? ¿Fue un fallo de impresión? Curiosamente en muchas de las versiones actuales está “corregido” el “error” pero en las primeras ediciones se mantuvo así.

El labrador bajó la cabeza y, sin responder palabra, desató a su criado, al cual preguntó don Quijote que cuánto le debía su amo. El dijo que nueve meses, a siete reales cada mes. Hizo la cuenta don Quijote y halló que montaban setenta y tres reales, y díjole al labrador que al momento los desembolsase, si no quería morir por ello. (I, 4)

- b) **Cálculo mental.** De sobra es conocido (y aquí mencionado por otros autores) la forma que tiene de multiplicar Sancho un número por 0,25. El cálculo mental no se le daba tan mal a nuestro amigo:

Ellos -respondió Sancho- son tres mil y trescientos y tantos; de ellos me he dado hasta cinco: quedan los demás; entren entre los tantos estos cinco, y vengamos a los tres mil y trescientos, que a cuartillo cada uno, que no llevaré menos si todo el mundo me lo mandase, montan tres mil y trescientos cuartillos, que son los tres mil, mil y quinientos medios reales, que hacen setecientos y cincuenta reales; y los trescientos hacen ciento y cincuenta medios reales, que vienen a hacer setenta y cinco reales, que, juntándose a los setecientos y cincuenta, son por todos ochocientos y veinte y cinco reales. (II, 71)

- c) **A vueltas con los números primos y sus divisores.** Otra oportunidad que aprovecha Cervantes para dar una pequeña explicación matemática... y es que los números primos no tienen divisores y presenta “algún que otro problema”. Es complicadillo descomponer el número 17:

que las letras que contenían el nombre eran diez y siete; y que si hacía cuatro castellanas de a cuatro versos, sobrara una letra; y si de a cinco, a quien llaman décimas o redondillas, faltaban tres letras; pero, con todo eso,

*procuraría embeber una letra lo mejor que pudiese, de manera que en las **cuatro** castellanas se incluyese el nombre de Dulcinea del Toboso. (II, 4)*

- d) ¿Sabía dividir Roque Guinart?** La respuesta no es fácil ya que este “simpático” bandolero catalán reconoce que no se le da bien realizar una división, que es exacta, pero luego realiza perfectamente otra que no es exacta:

*tenemos aquí **novecientos escudos y sesenta reales**; mis soldados deben de ser hasta **sesenta**; mírese a cómo le cabe a cada uno, porque yo soy mal contador. (II, 60)*

*sean servidos de prestarme **sesenta escudos**, y la señora regenta **ochenta**, para contentar esta escuadra que me acompaña ... a un criado suyo diese luego los **ochenta** escudos que le habían repartido, y ya los capitanes habían desembolsado los **sesenta** ... Destos escudos **dos** tocan a cada uno, y **sobran veinte**: los **diez** se den a estos peregrinos, y los otros **diez** a este buen escudero, (II, 60)*

- e) Si hasta hay operaciones combinadas.** Es tal el manejo de las opresiones básicas que poseía Cervantes que incluso se atreve a introducir una división dentro de otra división, para luego sumar cocientes. ¿Era necesario tanta complicación para crear una obra de arte? Parece que Cervantes opinaba que la matemática corriente, la de uso cotidiano y efectivo, era incluso importante:

*y, dando a cada uno su parte, que, a lo que se me acuerda, fueron cada **tres mil ducados**, en dineros (porque un nuestro tío compró toda la hacienda y la pagó de contado, porque no saliese del tronco de la casa), en un mismo día nos despedimos todos **tres** de nuestro buen padre; y, en aquel mismo, pareciéndome a mí ser inhumanidad que mi padre quedase viejo y con tan poca hacienda, hice con él que de mis **tres mil** tomase los **dos mil** ducados, porque a mí me bastaba el resto para acomodarme de lo que había menester un soldado. Mis **dos** hermanos, movidos de mi ejemplo, cada uno le dio **mil ducados**: de modo que a mi padre le quedaron **cuatro mil** en dineros, y más **tres mil**, que, a lo que parece, valía la hacienda que le cupo, que no quiso vender, sino quedarse con ella en raíces. (I, 39)*

5. Curiosidades geométricas

La geometría no es la parte de las matemáticas que más destaca en la obra. Se puede afirmar, sin temor a equivocarse que Cervantes manejaba muy bien las matemáticas en la parte más utilitaria de la misma, es decir, la aritmética, pero la geometría no la utilizaba tanto. Sólo aparecen las palabras: compás, línea recta, curvas y transversales, círculo, ángulo, ángulos acutos, rombos, redonda, cuadrada, pirámide, esferas.

De todas formas no dejan de ser curiosas algunas de sus sentencias en la obra:

¿No es más fácil decir rectangular?

*Llegada, pues, la hora, sentáronse todos a una larga mesa, como de tinelo, porque no la había **redonda** ni **cuadrada** en la venta, (I, 37)*

Bonita forma de explicar lo que es el vértice de una pirámide.

*acabaron en punta, como **pirámide**, habiendo disminuido y aniquilado su principio hasta parar en nonada, como lo es la punta de la **pirámide**, que respeto de su basa o asiento no es nada (II, 6)*

Forma matemática de decir a uno que vaya al grano

*seguid vuestra historia **línea recta**, y no os metáis en las **curvas** o **transversales** (II, 26)*

6. Curiosidades con la medida

Que afortunados hemos sido de que en la época de Cervantes no existiese el Sistema Métrico Decimal, sino una gran variedad de medidas diferentes y distintas. Este hecho le permitió al autor el jugar con las distintas unidades de medida, utilizando en cada momento la más adecuada a la situación concreta.

Pero no sólo eso, incluso en el manejo de las distintas unidades encontramos una serie de curiosidades muy interesantes:

- a) **Un país demasiado grande.** No esta mal el contorno de este imaginario país, casi 3 veces la longitud del Ecuador. España, por ejemplo no llega a los 4 000 km de contorno (720 leguas) Y Rusia (mayor país existente) no llega a los 40 000 km es decir ni la mitad de este legendario país, pero se aproxima bastante al del continente americano. ¿Se refería a él Cervantes?

*¿piensa vuestra merced caminar este camino en balde, y dejar pasar y perder un tan rico y tan principal casamiento como éste, donde le dan en dote un reino, que a buena verdad que he oído decir que tiene más de **veinte mil leguas** de contorno, y que es abundantísimo de todas las cosas que son necesarias para el sustento de la vida humana, y que es mayor que Portugal y que Castilla juntos? (I, 31)*

- b) **Medir en línea recta.** Don Quijote tiene muy claro que medir una línea recta es muy fácil y se puede hacer de forma exacta, en cambio cuando hay curvas, la cuestión no es tan elemental y hay que redondear.

*desde aquí al reino de Candaya, si se va por tierra, hay **cinco mil leguas, dos más a menos**; pero si se va por el aire y por la **línea recta**, hay **tres mil y docientas y veinte y siete**. (II, 40)*

- c) **¿Viajaban deprisa?** Menos mal que Clavileño no les falló, pues según Sancho, hubiesen tenido que recorrer 2996,8 km al año (candada “estaba a 17980 km), 8 km al día. No iban muy deprisa, andando (que no cabalgando) dos horas al día llegaban, eso sí andando todos los días, que si hubiesen descansado sábados y domingos hubieran tenido que andar 11,5 km diarios.

que habiendo **tres mil y tantas leguas** de aquí a Candaya, si el caballo se cansa o el gigante se enoja, tardaremos en dar la vuelta **media docena** de años (II, 41)

d) Azumbre, ¿litros o Kg? El azumbre es considerado como una unidad de capacidad (unos 2 litros actuales). Pero el gran conocimiento que tenía Cervantes de las unidades, algo lógico pues eran de uso normal, le permite dar otro enfoque y de paso, enriquecer su texto:

*Me dé la receta de ese estremado licor; que para mí tengo que valdrá la **onza** adondequiera más de a **dos reales**, y no he menester yo más para pasar esta vida honrada y descansadamente. Pero es de saber agora si tiene mucha costa el hacelle.*

*-Con menos de **tres reales** se pueden hacer **tres azumbres** -respondió don Quijote.*

Inicialmente, para un lector del siglo XXI, parece que Cervantes, por boca de Don Quijote y Sancho, mezcla unidades de peso (onza) y de capacidad (azumbre), pero hasta aquí juega con el lenguaje nuestro genial autor: el azumbre es una unidad de peso (2750,558 g), que sólo se utiliza en los medicamentos. Con este juego maravilloso de unidades, la burla del bálsamo de fierabrás adquiere una nueva dimensión... es una medicina.

7. Curiosidades con el tiempo

El tiempo juega en esta historia, al contar hechos que se suceden uno a otro, un papel importante. Para Cervantes el poco tiempo “no existe”: no hay ninguna expresión con segundos o minutos, en cambio horas, días años y siglos si que aparecen y en gran cantidad.

a) Rezando más de la cuenta. Ya es un “clásico” todo el tiempo que estuvo Cervantes en Sierra Morena rezando, tal vez más de la cuenta:

*y diole **once** ñudos, el uno más gordo que los demás, y esto le sirvió de rosario el tiempo que allí estuvo, donde rezó **un millón** de avemarías. (I, 26)*

¿Mucho tiempo no? Si se tarda 10 segundos en rezar un avemaría, hubiese tardado 2777 horas, 46 minutos, 40 segundos.

O dicho de otra forma estuvo tres días en Sierra Morena, tuvo que rezar 4 avemarías cada segundo. Mucha piedad no tenía para ir a esas velocidades.

b) Sancho también exagera. Sancho no pierde ocasión para intentar sacar ganancia de su amistad y ayuda a Don Quijote y no le importa “exagerar un poquito” barriendo para casa. Así a la vuelta de su primera salida con Don Quijote comenta:

*pues por solos **ocho** meses de servicio me tenías dada la mejor ínsula (I, 52)*

En realidad sólo estuvieron en esta salida 17 días.

- c) **El problema de la “semana”.** Pero lo más curioso del tiempo es el concepto que de “semana” tiene el propio Cervantes. Para él la semana suele ser de 6 días, pero las dos semanas son quince días. Así tenemos que el tiempo lo cuenta de la siguiente manera: seis días (13 veces), quince días (7 veces). El término semana sólo aparece 5 veces y semanas una vez (tres semanas), en cambio 7 o 14 días no aparece nunca.

*que, si como tardó **tres** días, tardara **tres semanas**, (I, 26)*
*porque en más de una **semana** no soplaron sino vientos nortes (II, 14)*
*no lo hay, porque se ha acabado; pero la **semana** que viene lo habrá de*
sobra. (II, 59)

*pero, si tú vives y yo vivo, bien podría ser que antes de **seis** días ganase yo tal*
reino (I, 7)
*que no aciertan a salir della en **seis** días (I, 50)*
*y a cabo de **seis** días llegaron a la aldea de don Quijote (I, 52)*
*de allí a **seis** días le llevaron a caza de montería (II, 34)*
***Seis** días estuvo sin salir en público (II, 48)*
*en más de **seis** días no le sucedió cosa digna (II, 60)*

*Es, pues, el caso que él estuvo **quince** días en casa muy sosegado, (I, 7)*
*No se pasaron **quince** días, cuando ya nuestro renegado tenía comprada*
una muy buena barca (I, 41)
*podría ser que a **quince** días de gobernador me comiese las manos (II, 24)*
*dilatemos el casamiento **quince** días (II, 56)*

8. Curiosidades con las monedas

Si ya era complicado el panorama a la hora de trabajar con unidades en aquella época, la dificultad que da multiplicada enormemente (por infinito diría Cervantes) si hablamos de monedas. Era tan complejo el sistema de aquella época que no sólo no había una única moneda (como ahora el euro) sino que había regiones que emitían sus propias monedas. Con todas ellas juega y utiliza Cervantes, sabiendo en cada momento cual utilizar y como hacerlo, mostrando una vez más que era un hombre del pueblo que escribía para el pueblo, para sus lectores.

Así encontramos una gran variedad de monedas que aparecen en la obra: Doblón o dobla, Escudo, Ducado, Peso, Sueldo, Real, Cuartillo, Cuartos, Ochoavo, Maravedí, Blanca, Meaja, Ardite, Cornados

Pero no sólo eso, Cervantes muestra la pluralidad de España, de sus gentes, y su dominio de este campo (no hay que olvidar que fue recaudador) sino que también utiliza monedas de otros países: Peso ensayado (Hispanoamérica), Cruzados (Portugal); Cianiis (Países árabes, Turquía y Argelia); Zoltanis (Turquía), Cuatrín (Italia), Güelte (Alemania).

Propiedad asociativa utilizando monedas. No perdona ni una oportunidad Cervantes para dar a sus lectores pequeñas lecciones, esta en particular es muy sencilla:

$$1+1+1+1+1+1+1 = 8$$

-Como haya muchas truchuelas -respondió don Quijote-, podrán servir de una trucha, porque eso se me da que me den **ocho reales** en sencillos que en una pieza de a **ocho**. (I, 2)

¿Cuál era el cambio por un ducado? Incluso Cervantes, dando por enésima vez muestras su dominio y uso de la matemática, hace que Sancho, mediante una simple operación, ponga en equivalencia alguna de dichas monedas:

dos ducados ganaba cada mes ... con **dos reales** más que vuestra merced añadiese cada mes me tendría por bien pagado ... que se me añadiesen otros **seis reales**, que por todos serían **treinta**. (II, 28)

El precio de la obra. No se conforma con jugar con las monedas, incluso manda “mensajes” de lo buena que es su obra y lo valiosa que es. Así en una parte de su obra dice una frase inocente, hablando del precio que un editor debe pagar por una obra:

*¿Quiere vuesa merced que se lo dé a un librero, que me dé por el privilegio **tres maravedís**, y aún piensa que me hace merced en dármelos? Yo no imprimo mis libros para alcanzar fama en el mundo, que ya en él soy conocido por mis obras: provecho quiero, que sin él no vale **un cuatrín** la buena fama.* (II, 62)

Curiosamente Cervantes recibió 3,5 maravedíes (por pliego) por la primera parte del Quijote y 4 maravedíes por la segunda parte.

CASUALIDADES

De las muchas curiosidades que podemos encontrar en las dos partes del Quijote, quiero destacar algunas casualidades que me han hecho que pensar bastante. ¿Son casualidades o Cervantes sabía lo que estaba escribiendo?

Es cierto que como matemáticos sabemos que justificar casualidades después de haberse producido las mismas no tiene sentido, que casualidades siempre las hay, pero ¿son todas casualidades? Si hubiese una o dos es posible que simplemente fuesen casualidades, pero habiendo a parecido tantas, a mi me hacen pensar

Algunas casualidades me las han proporcionado otras personas y a ellas quiero agradeceré, en particular a Juan Emilio y su trabajo con Luis:

Quijote y Sancho igualados. ¿Es coincidencia, casualidad? ¿O Cervantes lo hizo aposta?: La palabra Quijote aparece el mismo número de veces $816 + 1328 = 2144$ que la palabra Sancho $654 + 1490 = 2144$.

Si no es casualidad, una vez más Cervantes hace un esfuerzo para remarcar la dualidad de su obra.

Un millón seiscientos mil. Ya se ha comentado en otros sitios la curiosa coincidencia con el ejército (enorme) de 1 600 000 hombres:

Y otra vez arremetió con un grandísimo y poderosísimo ejército, donde llevó más de un millón y seiscientos mil soldados, todos armados desde el pie hasta la cabeza, y los desbarató a todos, como si fueran manadas de ovejas. (I, 32)

Curiosamente su obra (las dos partes) consta de $777\,526 + 826\,685 = 1\,604\,211$ letras (sin contar signos de puntuación) Desde luego no es lógico pensar que su “ejército” se refiriese al número de letras de la obra (la referencia está en la primera parte), pero no deja de ser curioso.

Viaje de ida y vuelta. Cervantes cuando habla de números grandes redondea (o exagera de forma considerable). En todos menos es un número: 3227.

desde aquí al reino de Candaya, si se va por tierra, hay cinco mil leguas, dos más a menos; pero si se va por el aire y por la línea recta, hay tres mil y docientas y veinte y siete. (II, 40)

También tenemos información de donde se encuentra la famosa Candaya:

-«Del famoso reino de Candaya, que cae entre la gran Trapobana y el mar del Sur, dos leguas más allá del cabo Comorín, (II, 38)

Teniendo en cuenta que Trapobana era el nombre que antiguamente se le daba a la isla de Ceilán, no es difícil calcular la distancia “en línea recta” (un poco curva por la redondez de la tierra) a dicha isla. Y aquí resulta lo curioso: la distancia a Ceilán desde Zaragoza (por donde andaba Don Quijote) es de 1606 leguas, y teniendo en cuenta que Candaya debe de estar un poco más lejos de Ceilán resulta que la distancia que aparece en el libro es justo el doble de la real. ¿Casualidad o Cervantes sabía, o había leído, la distancia real?

Exageración exacta. En sus muchas exageraciones sobre los Gigantes, Don Quijote apela a la autoridad máxima en aquella época: la Iglesia y su libro sagrado la Biblia:

-En esto de gigantes -respondió don Quijote- hay diferentes opiniones, si los ha habido o no en el mundo; pero la Santa Escritura, que no puede faltar un átomo en la verdad, nos muestra que los hubo, contándonos la historia de aquel filisteazo de Golías, que tenía siete codos y medio de altura, que es una desmesurada grandeza. (II, 1)

La cosa no tendría que pasar de aquí, pero es raro que con lo cuidadoso que era Cervantes en todo lo relacionado con la Iglesia (no hay que olvidar que estaba “acusado” de no tener “sangre limpia”) cometiese un fallo ya que en la Biblia encontramos:

Salió de las filas de los filisteos un hombre de la tropa de choque, llamado Goliat de Gat, de seis codos y un palmo de estatura (1Sam 17, 4)

¿Por qué Cervantes con su exageración se atrevía a “enfrentarse” a la Biblia y por tanto a la Iglesia? No tiene sentido y es que seguramente Cervantes sabía lo que decía:

Don Quijote: 7,5 codos, como cada codo es 41,85 cm hace un total de 313,875 cm

Biblia: 6 codos y un palmo, como el codo egipcio (el usado cuando se escribió la Biblia) mide 52,3 cm y el palmo 7,47 cm hace un total de 321, 2 cm.

Como se ve son cantidades muy iguales.

Una braza un poco corta. En el episodio de la cueva de Montesinos, leyéndola despacio y con reposo podemos observar un aparente fallo en las medidas que utiliza Cervantes.

*Iba don Quijote dando voces que le diesen sogas y más sogas, y ellos se la daban poco a poco; y cuando las voces, que acanaladas por la cueva salían, dejaron de oírse, ya ellos tenían descolgadas las **cient brazas** de sogas, y fueron de parecer de volver a subir a don Quijote, pues no le podían dar más cuerda. Con todo eso, se detuvieron como media hora, al cabo del cual espacio volvieron a recoger la soga con mucha facilidad y sin peso alguno, señal que les hizo imaginar que don Quijote se quedaba dentro; y, creyéndolo así, Sancho lloraba amargamente y tiraba con mucha priesa por desengañarse, pero, llegando, a su parecer, a poco más de las **ochenta brazas**, sintieron peso, de que en extremo se alegraron. (II, 22)*

*-A obra de **doce o catorce estados** de la profundidad desta mazmorra, a la derecha mano, se hace una concavidad y espacio capaz de poder caber en ella un gran carro con sus mulas. (II, 23)*

Es de todos conocidos que un estado es aproximadamente lo que mide un hombre, y una braza la distancia que separan las manos cuando los brazos están extendidos. Según las proporciones clásicas ambas tienen que coincidir y de hecho así se considera siempre:

1 braza = 1 estado = 1,67 m

Es aquí donde surge la contradicción, si el relato dice que hasta las 80 brazas no sintieron peso y por otra parte que había una concavidad a 12 – 14 estados, es de suponer que no sentían peso porque Don Quijote estaba en la concavidad. Resumiendo Cervantes iguala 20 brazas (100 – 80) con 12 – 14 estados. ¿Fallo, error? ¿Quería decir con esto que la aventura era ensueño y por eso no coincidían las medidas?...

No nos quedemos aquí, pasemos las unidades a centímetros:

12 estados * 1,67 m = 20,04 m. Si dividimos por 20 brazas: 1 braza = 1,002 m.

14 estados * 1,67 m = 23,38 m. Si dividimos por 20 brazas: 1 braza = 1,169 m.

En otras palabras si Cervantes no se equivocó la braza medía entre 1 metro y 1,17 metros.

Y aquí llegas nuestra última casualidad: según la Encarta (y otras enciclopedias) existía, en aquella época, una medida de longitud para cuerdas y telas: una braza que era una medida entre 1 y 1,2 metros.

MAGISTRAL, COMO SIEMPRE, CERVANTES.

APLICACIÓN DIDÁCTICA

Todo esto está muy bien, pero nuestra misión es educar. Ante este hecho surge inmediatamente, como gritando desde el interior del docente, la pregunta: Y todo esto, ¿para que sirve? ¿se puede utilizar en clase? ¿puede ser de ayuda para nuestra tarea docente? ¿es útil para nuestros alumnos?

Si todas estas preguntas eran pocas, hay más cuestiones que resolver si queremos utilizar el Quijote en nuestras clases de Matemáticas: a los alumnos que les cuesta leer, consideran el Quijote un libro “viejo”, “anticuado” y, lo que para ellos es peor, muy “gordo”. Y la historia no acaba en estas consideraciones al surgir un problema añadido, por lo menos donde vivo y ejerzo: la saturación de Quijote en Alcalá, alumnos, padres y profesores empezamos a estar hartos de que todo, literalmente, todo lo que se haga este año tiene que estar presidido por la figura del Quijote. ¿Qué hacer?...

Con todos estos inconvenientes y con la meta puesta en superarlos y en conseguir aunar Quijote y matemáticas y, para complicar más las cosas, que los alumnos no sólo aprendieran, sino que también disfrutaran surgió la idea que llevé a cabo en mi Instituto.

La idea base era muy elemental, intentar unir el Quijote – Matemáticas, con algo que a los alumnos de verdad les atrae y mucho: Internet. Esto último intentaba ser el banderín de enganche, y al principio lo fue, pero a medida que se iba desarrollando la actividad, Internet empezaba a ser lo de menos y adquiría cada vez más importancia el libro en sí.

La actividad consistía, básicamente, en lo siguiente:

Los alumnos estaban distribuidos por parejas de forma que por lo menos uno de ellos tuviera conexión a Internet y correo electrónico.

Se les hace una pregunta sacada del Quijote (sin periodicidad fija)

Para ayudarles se les daba alguna pista.

Tenían que dar la contestación al profesor, en su correo electrónico, la velocidad y rapidez eran premiadas.

Si fallaban el profesor (vía correo electrónico) les indicaba el fallo y les daba alguna sugerencia.

El tipo de preguntas tenía que ir encaminado a cuestiones muy concretas y fueron del tipo:

¿Cuántos centímetros medía la cuerda que utilizó Don Quijote para bajar a la cueva de Montesinos?

¿Cuántos metros se ahorraron Don Quijote y Sancho en el supuesto viaje a Candaya en Clavileño?

¿Cuántos centímetros medía Goliath, según Don Quijote?

¿Coincide esta medida con la que aparece en la Biblia? ¿Por qué?

¿Qué cantidad (y de qué) pidió el “traductor” a Cervantes por traducirle el manuscrito de las aventuras de Don Quijote, que estaban en morisco?

La respuesta hay que darla en unidades del Sistema Métrico Decimal.

¿Cuántos reales, en total, le dio Zoraida a Ruy Pérez de Viedma durante su cautiverio?

¿Cuántos reales hubiese repartido Roque Guinart a sus bandoleros si se hubiese quedado con todo el dinero de sus prisioneros?

¿Cuántos reales podrían ganar por cada kilogramo del bálsamo de Fierabras que elaborasen Don Quijote y Sancho?

El éxito en las clases que se han realizado ha sido rotundo:

Todas las preguntas han sido contestadas bien por los menos por dos parejas (en cada clase)

El interés ha sido grande. Como ejemplo basta poner que en la primera pregunta las primeras respuestas las recibí en casa a las 14:30 horas (en mi instituto se sale de clase a las 14:15 horas). Es decir ha habido gente que se ha dedicado a las matemáticas (3º ESO) antes que a comer.

Han investigado a través de la red.

Han aprendido bastante de aquella época, de sus medidas, monedas,...

Han descubierto la importancia del Sistema Métrico Decimal, del Euro,...

También han aprendido a no fiarse de Internet ya que muchas informaciones que aparecen en distintas páginas Web no son exactas

A todos estos objetivos conseguidos hay que unirles el hecho que varios de los alumnos se han “picado” con el libro y han descubierto a nuestros geniales Don Quijote y Sancho y se están leyendo el libro y, según me han confesado, disfrutando... ¿Qué más se puede pedir?

Alcalá de Henares, 23 de Abril de 2005

EL QUIJOTE Y LAS MATEMÁTICAS

Luis Balbuena Castellano

Juan Emilio García Jiménez

El año 1605 se publicó por primera vez la novela de Miguel de Cervantes titulada *El Ingenioso Hidalgo don Quijote de la Mancha*. Su éxito fue tal que el propio autor, en la segunda parte aparecida en 1615, vaticinó la edición de treinta millones de ejemplares, cifra que se ha superado con mucho.

En la ponencia se hace un breve recorrido por el estado de las matemáticas en la época del autor para analizar después lo que de matemáticas podemos encontrar en la novela. Una parte ha sido plasmada en un cuadernillo que ha editado la FESPM, y posteriormente un fascículo editado por la Consejería de Educación y Ciencia de C-LM como una forma de contribuir a celebrar, desde nuestra disciplina, la efemérides del cuarto centenario de la primera edición de *El Quijote*.

Las matemáticas forman parte de la cultura de todos los tiempos y su presencia puede encontrarse fácilmente en la pintura, la arquitectura, la astronomía,... y también en la literatura. *El Quijote*, considerado la obra más universal de la literatura española contiene enseñanzas de muy diversa naturaleza, entre otras de matemáticas. Por sorprendente que pueda parecer a algunos, en *El Quijote* también hay Matemáticas. *El Quijote* no es ciertamente un libro de matemáticas. Cervantes era un hombre curioso y preparado en muchas parcelas pero no en matemáticas. Por eso no debe esperarse encontrar profundas reflexiones matemáticas. Pero Cervantes había sido secretario del cardenal Aquaviva y tuvo la oportunidad de leer muchos y buenos libros de su época. Navegó y participó en batallas navales, por lo cual conoció de las matemáticas aplicadas a la navegación y a la guerra. Fue recaudador y por tanto conocedor de las matemáticas necesarias para tal menester y además viajó por Andalucía, por La Mancha y otros lugares y por ello pudo apreciar los usos dados por el pueblo a números, operaciones, medidas, geometría, etc. en situaciones de la vida cotidiana. Una obra en la

que se entremezclan la fantasía y la realidad ha de tener aspectos más o menos cotidianos en los que sea necesario recurrir a las matemáticas para entablar diálogos, para expresar cantidades, para referirse a unidades monetarias u otros tipos de medidas, para imaginar cantidades y tamaños fantásticos.

Matemáticas en la época de Cervantes;

Cervantes escribe su novela en un tiempo y un país que no se distinguía por su alto aprecio de las matemáticas. Seguía manteniéndose en el imaginario colectivo de la sociedad de la época aquella idea sobre las matemáticas que expresara S. Agustín: “Muchos son los santos que las ignoran, y los que las saben no son ciertamente santos”. España apenas participó en la aventura del desarrollo de las matemáticas que se llevó a cabo a partir de finales del siglo XVI y prueba de ello es que no existe ni un solo resultado importante sobre el desarrollo de las matemáticas atribuible a un español. Feijoo, en su discurso *Glorias de España* afirma: “Así como es deuda vindicar nuestra nación en los puntos en que nos agravian los extranjeros, es también justo condescender con ellos en lo que tuvieren razón. En esta consideración, es preciso confesar que la Física y las Matemáticas son casi exclusivamente extranjeras en España”.

La palabra “matemáticas”, utilizada para referirse a esta ciencia, es mencionada el Quijote en cuatro ocasiones, a saber:

1. En el capítulo XXXIII de la primera parte, dedicado a la novela del curioso impertinente, dice Lotario a Anselmo que tiene su ingenio como el que tienen los moros a los cuales no se les puede dar a entenderle error de su secta con las acotaciones de la Santa Escritura, ni con razones que consistan en especulación del entendimiento, ni que vayan fundadas en artículos de fe, sino que les han de traer ejemplos palpables, fáciles, inteligibles, demostrativos, indubitables, con demostraciones matemáticas que no se pueden negar, como cuando dicen: “Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan también son iguales”. Esto en el lenguaje matemático se expresa así:

$$a = b \Rightarrow a - c = b - c$$

Se observa que concede a las matemáticas la característica de contener verdades irrefutables.

2. En la segunda parte (cap. XVIII), Don Quijote explica a Don Lorenzo cuáles son las partes de las que se compone la ciencia de la caballería andante:

Es una ciencia -replicó don Quijote- que encierra en sí todas o las más ciencias del mundo, a causa que el que la profesa ha de ser jurisperito, y saber las leyes de la justicia distributiva y comutativa, para dar a cada uno lo que es suyo y lo que le conviene; ha de ser teólogo, para saber dar razón de la cristiana ley que profesa, clara y distintamente, adondequiera que le fuere pedido; ha de ser médico y principalmente herbolario, para conocer en mitad de los despoblados y desiertos las yerbas que tienen virtud de sanar las heridas, que no ha de andar el caballero andante a cada triquete buscando quien se las cure; ha de ser astrólogo, para conocer por las estrellas cuántas horas son pasadas de la noche, y en qué parte y en qué clima del mundo se halla; ha de saber las matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad dellas;

Cuando señala que ha de ser astrólogo, indica que es para conocer por las estrellas cuántas horas son pasadas de la noche, y en qué parte y en qué clima del mundo se

halla, que son cometidos más de un astrónomo que de los adjudicados a los astrólogos.

3. En el siguiente capítulo, camino de la aldea de Quiteria, el bachiller Corchuelo fue contando las excelencias de la espada, con tantas razones demostrativas y con tantas figuras y demostraciones matemáticas, que todos quedaron enterados de la bondad de la ciencia.
4. En el cap. XXXVIII de la s.p. titulado Donde se cuenta la que dio de su mala andanza la dueña Dolorida, habla de una matemática figura en los siguientes términos: La cola, o falda, o como llamarla quisieren, era de tres puntas, las cuales se sustentaban en las manos de tres pajes, asimesmo vestidos de luto, haciendo una vistosa y matemática figura con aquellos tres ángulos acutos que las tres puntas formaban, por lo cual cayeron todos los que la falda puntiaguda miraron que por ella se debía llamar la condesa Trifaldi, como si dijésemos la condesa de las Tres Faldas

De estas citas puede deducirse que Cervantes concede a las matemáticas la fuerza de las deducciones incuestionables (demostraciones matemáticas que no se pueden negar), lo que significa dotarlas de carácter instrumental, útil para otras actividades y oficios. En la segunda cita las presenta como algo necesario incluso para ser caballero andante, lo que, para don Quijote es lo máximo, de ahí que les conceda tan alta consideración hasta ponerlas al mismo nivel que otras especialidades, entre ellas la teología que gozaba, en aquellos tiempos, de un gran prestigio.

Las Matemáticas de El Quijote.

Ataviados con las gafas de un matemático, como señalaba al principio, aparecen ante nuestros ojos matemáticas de todo tipo presentes en El Quijote: números, medidas, sistemas monetarios, geometría, problemas, paradojas....

LOS NÚMEROS.

En lo referido a los números, podemos encontrar grandes cantidades, de tamaño intermedio y cifras cotidianas. En el Quijote se utiliza un vocabulario de siete mil doscientas cincuenta y seis palabras, que aparecen directamente en la obra o son nombrados doscientos cincuenta y siete personajes. Todo esto se desarrolla en un total de ciento veintiséis capítulos siendo el más largo el XLI de la p.p. y el más corto el XV de la s.p.

2 (650)	3 (195)	4 (146)	5 (45)
6 (66)	7 (21)	8 (26)	9 (4)
10 (34)	11 (7)	12 (41)	13 (3)
14 (10)	15 (16)	16 (6)	17 (3)
18 (6)	19 (2)	20 (28)	21
22 (5)	23	24 (5)	25 (2)
30 (21)	34 (2)	36	40 (8)
50 (11)	60 (8)	69	72
73	74	75	80 (5)
99	100 (45)	120	150
200 (15)	300 (10)	360	400 (7)
500 (4)	600 (6)	700	703
750 (2)	800 (2)	825	900
1.000 (90)	1.500 (2)	2.000 (17)	3.000 (14)

3.029	3.227	3.300 (9)	4.000 (4)
5.000	6.600	7.000	10.000 (2)
12.000	20.000	25.000	30.000 (2)
60.000 (3)	75.000	100.000 (3)	200.000 (2)
400.000	1.000.000 (2)	1.600.000	30.000.000
1.000.000.000			

Entre paréntesis, se expresa el número de veces que aparece en la obra cada una de las cantidades.

La cantidad mayor que se cita en el Quijote es mil millones. Teniendo en cuenta lo que representaban esos grandes números en aquella época, no es de extrañar que Don Quijote la utilice para adornar a su sin par Dulcinea cuando, al describírsela Sancho, le dice que no es demasiado alta y él le contesta: Pues ¡es verdad que no acompaña esa grandeza y la adorna con mil millones de gracias del alma! (cap. XXXI, p.p.).

En la s.p. utiliza dos veces en el mismo párrafo la cantidad de treinta mil. Es cuando, refiriéndose a esta inmortal obra, vaticina: Treinta mil volúmenes se han impreso de mi historia, y lleva camino de imprimirse treinta mil veces de millares, si el cielo no lo remedia. Bien es verdad que en la segunda ocasión debemos interpretar que se trata de treinta mil veces mil lo que significa treinta millones. Y, en efecto, el cielo no lo remedió y esa predicción de don Quijote se ha cumplido ampliamente porque a estas alturas la cifra de ejemplares editados supera con mucho esa cantidad.

El mayor número que sigue al anterior es un millón seiscientos mil. En el cap. XXXII de la p.p. habla de las hazañas de Felixmarte de Hircania y después de referir que partió cinco gigantes por la cintura, añade: Y otra vez arremetió con un grandísimo y poderosísimo ejército, donde llevó más de un millón y seiscientos mil soldados, todos armados desde el pie hasta la cabeza, y los desbarató a todos, como si fueran manadas de ovejas. Cervantes expresa a través de don Quijote la dialéctica entablada en la época entre armas y letras. (En el cap. XXXVIII de la p.p. razona así don Quijote: ... es más fácil premiar a dos mil letrados que a treinta mil soldados). Parece que las letras siempre han estado en una inútil y estéril “greña”, ayer con las armas y hoy con las ciencias. Pues bien, Cervantes que quiso primero destacar con las armas y que a pesar de quedar malherido y manco en la batalla de Lepanto, de ser apresado y cautivo en Argel, no consiguiera ser considerado ni siquiera inválido de guerra y acreedor a una pensión. Por no destacar con las armas, nunca pudo llegar a mandar un disparatado ejército de un millón seiscientos mil soldados. Sus soldados, los que le dieron la gloria que buscaba fueron las palabras, ... y ese es el número (1.600.000) aproximado de palabras que hay en la obra.

PROPORCIONES

Las proporciones se ven recorridas en El Quijote especialmente a través de distintos pasajes de gigantes que están presentes en casi toda la obra. Los nombra con frecuencia don Quijote en medio de sus diálogos y, por supuesto, los imagina en un buen número de diferentes objetos como veremos en lo que sigue.

Cuando hizo su primera salida, solo, para armarse caballero, estuvo fuera de casa tres días lo que produjo la consecuente preocupación en su sobrina y en su ama de llaves. He aquí lo que decía la primera al barbero:

- Sepa, señor maese Nicolás -que éste era el nombre del barbero-, que muchas veces le aconteció a mi señor tío estarse leyendo en estos desalmados libros de desventuras dos días con sus noches, al cabo de los cuales, arrojaba el libro de las manos, y ponía mano a la espada y andaba a cuchilladas con las paredes; y cuando estaba muy cansado, decía que había muerto a cuatro gigantes como cuatro torres, y el sudor que sudaba del cansancio decía que era sangre de las heridas que había recibido en la batalla; y bebíase luego un gran jarro de agua fría, y quedaba sano y sosegado, diciendo que aquella agua era una preciosísima bebida que le había traído el sabio Esquife, un grande encantador y amigo suyo.

La primera referencia a gigantes aparece ya en el mismo capítulo primero, que por cierto es el único número ordinal que está escrito con letras pues los demás los escribió Cervantes con números romanos. Dice así la cita:

Decía mucho bien del gigante Morgante, porque, con ser de aquella generación gigantea, que todos son soberbios y descomedidos, él solo era afable y bien criado.

Y por eso no es de extrañar, pues, lo que vas a leer a continuación que es cómo crea en su mente y para qué a la figura de Dulcinea del Toboso. Son los dos párrafos finales del capítulo primero

- Si yo, por malos de mis pecados, o por mi buena suerte, me encuentro por ahí con algún gigante, como de ordinario les acontece a los caballeros andantes, y le derribo de un encuentro, o le parto por mitad del cuerpo, o, finalmente, le venzo y le rindo, ¿no será bien tener a quien enviarle presentado y que entre y se hinque de rodillas ante mi dulce señora, y diga con voz humilde y rendido: "Yo, señora, soy el gigante Caraculiambro, señor de la ínsula Malindrania, a quien venció en singular batalla el jamás como se debe alabado caballero don Quijote de la Mancha, el cual me mandó que me presentase ante vuestra merced.

Pero sin lugar a dudas, los más famosos gigantes de la obra y posiblemente de la literatura universal son los que él imaginó en tierras del campo de Montiel cuando vio más de treinta molinos de viento. Capítulo VIII. Del buen suceso que el valeroso don Quijote tuvo en la espantable y jamás imaginada aventura de los molinos de viento, con otros sucesos dignos de felice recordación

En esto, descubrieron treinta o cuarenta molinos de viento que hay en aquel campo; y, así como don Quijote los vio, dijo a su escudero:

- La ventura va guiando nuestras cosas mejor de lo que acertáramos a desear, porque ves allí, amigo Sancho Panza, donde se descubren treinta, o pocos más, desaforados gigantes, con quien pienso hacer batalla y quitarles a todos las vidas, con cuyos despojos comenzaremos a enriquecer; que ésta es buena guerra, y es gran servicio de Dios quitar tan mala simiente de sobre la faz de la tierra.

- ¿Qué gigantes? -dijo Sancho Panza.

- Aquellos que allí ves -respondió su amo- de los brazos largos, que los suelen tener algunos de casi dos leguas.

En el cap. VI de la segunda parte, nombra otra clase de gigantes:

... aunque vea diez gigantes ... cada ojo como una gran rueda de molino.



Y más adelante cita el Goliath de la Biblia que queda como un fenómeno considerado humano pero un enano al lado de los gigantes “como torres” de otras descripciones. La siguiente lectura corresponde al capítulo primero de la segunda parte. - En esto de gigantes -respondió don Quijote- hay diferentes opiniones, si los ha habido o no en el mundo; pero la Santa Escritura, que no puede faltar un átomo en la verdad, nos muestra que los hubo, contándonos la historia de aquel filisteazo de Golías, que tenía siete codos y medio de altura, que es una desmesurada grandeza.

NUEVO ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS GIGANTES		
Gigantes. Versión A. Aventura de los molinos.	Gigantes. Versión B. <u>Ojos como ruedas de molino.</u>	Gigantes. Versión C. Goliath.
- Brazos de 2 leguas. 1 cuadrante (90°) 17'5 leguas..... 106 metros - Todo el cuadrante en leguas: $90 \times 17'5 = 1.575$ - Una legua = 6.349 metros - Brazo del gigante (2 leguas)..... 12.698 metros - Para persona de 180 el brazo es de unos 82 cm - Aplicando la proporcionalidad, su altura sería de 27.873 m - El pie tendría 4.336 m	- Rueda de molino: 1'5 m - Diámetro de un ojo: 3 cm - Para una persona de 1'90 - Su altura sería = 94 metros - Brazo = 43 m. Pie = 14'62 m	7 codos y medio de altura. Codo: 0'417 m - Su altura sería = 3'12 metros - Brazo = 1'42 m

GEOMETRÍA

A la Geometría, una de las partes de la matemática, también se hace referencia en El Quijote. Además de los conceptos geométricos expresados en el pasaje de la condesa Trifaldi, en el cap. I de la s.p., hace una alusión a la geometría cuando el barbero preguntó a Don Quijote: ¿Qué tan grande le parece a vuestra merced debía ser el gigante Morgante?.. En su respuesta, Don Quijote asegura que han existido los gigantes pues en la Santa Escritura, que no puede faltar un átomo en la verdad, se cuenta la historia de Golías (Goliath), que tenía siete codos y medio de altura. A continuación dice que en la isla de Sicilia se han hallado canillas y espaldas tan grandes, que su grandeza manifiesta que fueron gigantes sus dueños, y tan grandes como grandes torres; que la geometría saca esta verdad de duda. Trata de decir que conociendo el tamaño de los huesos, la geometría ayuda a saber cuál debe ser el tamaño del ser al que pertenecen. En efecto, los seres humanos son proporcionados, con las reglas de proporcionalidad puede deducirse el tamaño de una persona a partir de la medida de alguna de sus partes.

MONEDAS

Las monedas aparecen en numerosas citas a lo largo de El Quijote, cosa normal dado el carácter viajero de la obra. El sistema monetario de la época era un auténtico lío, pues había muchas monedas distintas y con diferente valor según los lugares. Las que más aparecen son los ducados y escudos. También encontraremos maravedíes, doblones, reales, reales de a ocho, cuartos y la blanca, que era la moneda de menor valor. Preguntóle si traía dineros; respondió don Quijote que no traía blanca, porque él nunca había leído en las historias de los caballeros andantes que ninguno las hubiese traído. Quedarse “sin blanca” es una expresión que todavía utilizamos hoy para decir que nos hemos quedado sin dinero.

Las unidades de medida de longitudes, superficies, pesos y capacidades se encuentran citadas muchas veces a lo largo de El Quijote. Una novela que cuenta las aventuras de unos viajeros como Don Quijote y Sancho Panza, que tuvieron necesariamente que comprar alimentos, medir jornadas de camino, tenía que recoger las unidades de medida que se usaban en la época. Así encontramos millas (ocho veces), leguas (unas 60 veces). Veamos una expresión de esta unidad de medida en el capítulo XXXI de la p.p., y como hace dos usos de la legua que sorprenden porque las 30 leguas (unos 165 km) recorridas por Sancho en tres días le parece a don Quijote una gran velocidad y poco después habla, sin mostrar asombro, de un reino de 20.000 leguas de contorno, cuando la España actual tiene unas 710 leguas...:

1. ¿Sabes de qué estoy maravillado, Sancho? De que me parece que fuiste y veniste por los aires, pues poco más de tres días has tardado en ir y venir desde aquí al Toboso, habiendo de aquí allá más de treinta leguas.
2. Pues dígame, señor: ¿piensa vuestra merced caminar este camino en balde, y dejar pasar y perder un tan rico y tan principal casamiento como éste, donde le dan en dote un reino, que a buena verdad que he oído decir que tiene más de veinte mil leguas de contorno, y que es abundantísimo de todas las cosas que son necesarias para el sustento de la vida humana, y que es mayor que Portugal y que Castilla juntos?.

Otras unidades de medida que podemos encontrar en la obra son: fanegas, arroba (recuperado ahora su símbolo @), varas, paso, estado, adarme, azumbre, libra, quilate, celemín, codo, pie, dedo, ...

MONEDAS DE CASTILLA

MONEDA	FECHA EMISIÓN	METAL	EQUIVALENCIA EN (mrv)
▪ Ducado	1497	Oro	375
▪ Escudo o corona.	1537	Oro	400
▪ Doblón	1566	Oro	800
▪ Real	1497	Plata	34
▪ Real de a ocho.	1566	Plata	272
▪ Cuarto	1599	Cobre	4
▪ Blanca	1497	Vellón	0'5

Aun hoy utilizamos la frase estoy sin blanca para indicar que estamos sin dinero. En la obra se utiliza esta expresión también cuando Sancho abandona la ínsula Barataria cansado de ser Gobernador para dejar bien clara su honradez. Sucede en el capítulo LIII de la segunda parte.

PARADOJAS

Las paradojas son argumentos y razonamientos lógicos que han interesado al ser humano de todos los tiempos. El término procede del griego (*para y doxos*), que significa más allá de lo creíble. Una de las más famosas y conocidas es la de Zenón de Elea (445 a.d.C.) sobre Aquiles y la tortuga. Plantea dos concepciones sobre lo continuo y lo discreto o sobre el espacio y el tiempo. Cervantes plantea en *El Quijote* esta paradoja en una situación que ha de resolver Sancho para demostrar su buen juicio, cuando es nombrado gobernador de la ínsula prometida, la ínsula Barataria: “Si alguno pasare por esta puente de una parte a otra, ha de jurar primero adónde y a qué va; y si jurare verdad, déjenle pasar; y si dijere mentira, muera por ello ahorcado en la horca que allí se muestra, sin remisión alguna”. ... Sucedió, pues, que, tomando juramento a un hombre, juró y dijo que para el juramento que hacía, que iba a morir en aquella horca que allí estaba, y no a otra cosa. Repararon los jueces en el juramento y dijeron: “Si a este hombre le dejamos pasar libremente, mintió en su juramento, y, conforme a la ley, debe morir; y si le ahorcamos, él juró que iba a morir en aquella horca, y, habiendo jurado verdad, por la misma ley debe ser libre.

Hay en *El Quijote* una palabra que al leerla nos evocará matemáticas, aunque en este caso se estará equivocado. Es algebrista, que utiliza una sola vez en el cap. XV de la s.p. (1):

Eso os cumple -respondió Sansón-, porque pensar que yo he de volver a la mía, hasta haber molido a palos a don Quijote, es pensar en lo escusado; y no me llevará ahora a buscarle el deseo de que cobre su juicio, sino el de la venganza; que el dolor grande de mis costillas no me deja hacer más piadosos discursos.

En esto fueron razonando los dos, hasta que llegaron a un pueblo donde fue ventura hallar un algebrista, con quien se curó el Sansón desgraciado.

Como puede comprenderse, se trata de un especialista en arreglar huesos, un traumatólogo de hoy en día. En el *Diccionario Crítico Etimológico* de Corominas se da a la palabra *Álgebra* dos acepciones, a saber, “parte de las matemáticas” y “arte de restituir a su lugar los huesos dislocados”.

Hay muchas matemáticas en *El Quijote*. En el limitado espacio dedicado en estas Actas, hemos tratado de mostrar algunas pinceladas para poner de manifiesto la existencia de una matemática en las páginas de esta extraordinaria novela y de paso señalar que unos mínimos conocimientos de esta materia ayudarán a una mejor y más cabal comprensión de esta obra. Con las aportaciones señaladas pretendemos provocar la curiosidad en los lectores y sumarnos a la celebración del IV Centenario desde las matemáticas. Es nuestro deseo que lean (o vuelvan a leer) *El Quijote* con todos los focos, lupas y otros componentes del conocimiento que puedan, ... también con las “gafas” especiales de los matemáticos. ¿Vale?.

PRESENCIA MATEMÁTICA EN *EL QUIJOTE*: UNA REBUSCA.

Ángel Requena Fraile
IES La Cabrera, Madrid

Con motivo del cuarto centenario de la publicación de la primera edición de *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha*, los profesores como muchas otras personas hemos hecho gozosa relectura de tan singular y compleja obra. En verdad, subrayar los aspectos matemáticos de algo tan grandioso parece casi irreverencia dada la inmensidad del contenido humanista de las dos novelas, incluyendo la segunda parte: *El ingenioso caballero*.

El contenido de la anti-novela de caballería es tan amplio que no faltan importantes referencias matemáticas. Tras el documentado y exhaustivo trabajo de Luis Balbuena Castellano[2] parecía que el tema estaba agotado. Y es posible que así sea en lo fundamental. Pertenezco -como Luis- a la generación de lectura obligatoria de la edición escolar abreviada, y con ella eche a volar mis pensamientos. Estaba en deuda. Era necesaria una relectura completa y sosegada para deleitarse, y -por deformación- escudriñar las relaciones del Quijote con las matemáticas.

Cuando en enero de 2005 termine la lectura, con las notas tomadas y un bosquejo del contenido, comente con mis alumnos algunos detalles; con la suerte de que uno me trajo un especial de *Muy Interesante* [1] que mencionaba el trabajo de Balbuena. La edición electrónica estaba disponible generosamente. Quedaba la opción de guardar los apuntes ante un trabajo tan excelente, pero el esfuerzo estaba hecho, y aparecían aspectos en sombra que Luis había iluminado menos. Así, con toda modestia, seguí la andadura de los olivereros pobres, que terminada la recolección de la aceituna hacen la rebusca. Y lo que inicialmente era un trabajo de carácter más general se ha reducido a señalar aspectos menos subrayados por el profesor Balbuena. Pesas, medidas, monedas o el estudio cuantitativo, obviamente no se tratarán.

1. Momento histórico fundamental para la cultura y la ciencia.

La vida de Cervantes transcurre en un momento trascendental: revolución religiosa, literaria, económica, cultural, científica y... matemática. Cervantes nació en 1547, solo cuatro años después de las ediciones de Copernico y Vesalio, y solo dos del *Ars Magna* de Cardano. La recuperación de Euclídes, Apolónio y Arquímedes los tres grandes griegos era un hecho reciente. Los algebristas italianos del renacimiento ya superaban a los árabes. Se estaban poniendo las bases de la notación algebraica moderna: Vieta desarrolla el cálculo especioso. El desarrollo de los logaritmos permitiría una rapidez de cálculo nunca vista. Todo apuntaba a mayores cambios, pero habría que esperar a Descartes (1637), Newton (1666) y Leibniz (1686). Galileo apuntaba el telescopio al universo cuando Cervantes escribía.

El retraso de España no era tan patente como se haría más tarde: buen nivel en la cosmografía necesaria para la navegación, fundación de la Academia, publicación de un buen manual de Aritmética algebraica, el de Pérez de Moya (1562) y hasta raros progresos como el *Analysis Geometrica* (1598) de Hugo de Omerique.

Estos acontecimientos nos muestran la encrucijada en la que está escrita el *Quijote*: no existe la notación decimal, las fracciones elementales están muy presentes, la docena y sus múltiplos y divisores es un auxiliar excelente, el método egipcio de duplicación sucesiva y demediación -conservado por los musulmanes españoles- es muy eficaz para los cálculos: aspectos todos de los que nos da cuenta Cervantes.

2. Modernidad del termino *matemáticas* en Cervantes.

Como han señalado Balbuena y los estudiosos [5] del lenguaje del *Quijote* son cuatro veces las que aparece la palabra *matemáticas*, una vez en la primera novela y tres en la segunda:

i) Y Lotario prosiguió diciendo:

*-Paréceme, ¡oh Anselmo!, que tienes tú ahora el ingenio como el que siempre tienen los moros, a los cuales no se les puede dar a entender el error de su secta con las acotaciones de la Santa Escritura, ni con razones que consistan en especulación del entendimiento, ni que vayan fundadas en artículos de fe, sino que les han de traer ejemplos palpables, fáciles, inteligibles, demostrativos, indubitables, con demostraciones **matemáticas** que no se pueden negar, como cuando dicen: "Si de dos partes iguales quitamos partes iguales, las que quedan también son iguales".*

Capítulo XXXIII de *El ingenioso hidalgo*: Novela del "Curioso impertinente"

Esta primera cita nos ofrece una sorpresa que nos permite atribuir a Cervantes un interés mayor por la matemática que el señalado hasta ahora: el entrecomillado pertenece al Libro I de *Los Elementos*. Se trata de la cuarta Noción Común, y que proviene de la *Metafísica* de Aristóteles. La lectura de Euclídes, aunque fuera superficial nos muestra a Cervantes con deseo de conocimiento. La edición castellana de los seis primeros libros de *Los Elementos* es de 1576 y se debe a Rodrigo Zamorano, catedrático de

Cosmografía en La Casa de Contratación de Sevilla. Traducción solo 11 años posterior a la italiana firmada por Tartaglia, únicas en lenguas romances de la época. En latín las ediciones son múltiples desde la príncipe de Venecia en 1482. De cualquiera de ellas pudo tomar su cita Cervantes.

ii) - La de la caballería andante -respondió don Quijote-, que es tan buena como la de la poesía, y aun dos deditos más.

- No sé qué ciencia sea ésta -replicó don Lorenzo-, y hasta ahora no ha llegado a mi noticia.

*- Es una ciencia -replicó don Quijote- que encierra en sí todas o las más ciencias del mundo, a causa que el que la profesa ha de ser jurisperito, y saber las leyes de la justicia distributiva y comutativa, para dar a cada uno lo que es suyo y lo que le conviene; ha de ser teólogo, para saber dar razón de la cristiana ley que profesa, clara y distintamente, adondequiera que le fuere pedido; ha de ser médico y principalmente herbolario, para conocer en mitad de los despoblados y desiertos las yerbas que tienen virtud de sanar las heridas, que no ha de andar el caballero andante a cada triquete buscando quien se las cure; ha de ser astrólogo, para conocer por las estrellas cuántas horas son pasadas de la noche, y en qué parte y en qué clima del mundo se halla; ha de saber las **matemáticas**, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad dellas; y, dejando aparte que ha de estar adornado de todas las virtudes teologales y cardinales, descendiendo a otras menudencias, digo que ha de saber nadar...etc.*

Capítulo XVIII de *El ingenioso caballero*: En casa de Don Diego Miranda.

*iii) En lo que faltaba de camino les fue contando el licenciado las excelencias de la espada, con tantas razones demostrativas y con tantas figuras y demostraciones **matemáticas**, que todos quedaron enterados de la bondad de la ciencia y Corchuelo reducido de su pertinacia..*

Capítulo XIX de *El ingenioso caballero*: Pleito del bachiller y el licenciado.

Las referencias dos y tres ponen de manifiesto tanto el aspecto de certeza que acompaña a la matemática como la modernidad del uso de la matemática como modelo de ciencia. Es de destacar que la tradición escolástico-aristotélica hace escaso uso de la matemática y será la matematización de la Física lo que dará paso a la ciencia moderna. Y esa matematización se estaba produciendo en plena vida de Cervantes.

La cita tercera cobra más luz si la comparamos con la que aparece en *El licenciado Vidriera*: "tocaban algo en presuntuosos, pues querían reducir [la esgrima] a demostraciones **matemáticas** que son infalibles los movimientos y pensamientos coléricos de sus contrarios". Las *Novelas Ejemplares* muestran ya una fijación cervantina por la obsesión presuntuosa de algunas artes por matematizarse, y ser apreciadas como científicas.

*iv) La cola, o falda, o como llamarla quisieren, era de tres puntas, las cuales se sustentaban en las manos de tres pajes asimesmo vestidos de luto, haciendo una vistosa y **matemática** figura con aquellos tres ángulos acutos que las tres puntas formaban; por lo cual cayeron todos los que la falda puntiaguda miraron que por ella se debía llamar la condesa Trifaldi, como si dijésemos la condesa de las Tres Faldas, y así dice Benengeli que fue verdad.*

Capítulo XXXVIII de *El ingenioso caballero*: La dueña dolorida

La cuarta cita que tiene más el carácter de metáfora para describir el nombre y la vestimenta de la disfrazada para el engaño, y es por ello de menor interés.

3. El mundo de las fracciones.

En nuestra época, de pleno dominio del sistema decimal y de la escritura de fracciones decimales podemos perder la perspectiva del manejo de fracciones en las culturas tradicionales. Incluso el lenguaje ordinario ha perdido usos habituales en los tiempos cervantinos. Veamos algunas:

Tercia parte a la persona que lo acusaré (Privilegio)

Mejorado en un tercio y un quinto (Libro I, capítulo XXI)

Hemos de salir mejorados en tercio y quinto (Libro II, capítulo XXXI)

Tres cuartos de legua habían andado (Libro I, capítulo XXIX)

Y como la noche iba casi en las dos partes de su jornada ($2/3$) (Libro I, capítulo XLII)

Envío a la duquesa hasta medio celemín [de bellotas] (Libro II, capítulo LII)

4. La multiplicación por duplicación y la división por demediación.

Ya el papiro Rhind egipcio (siglo XVIII a.c.) nos muestra una técnica operatoria muy eficaz para el cálculo: duplicaciones sucesivas del multiplicando. Esta tradición no estaba perdida en la Edad Media pues las Aritméticas árabes enseñan el algoritmo. En particular nuestro al-Qalasadí (siglo XV) la describe en *Se levanta el velo de la ciencia gubar*. De igual forma, la mas celebre de las aritméticas incunables, *Summa de arithmetica* de Luca Pacioli (1496), describe seis operaciones: sumar, restar, multiplicar, dividir, *duplicar* y *mediar*.

El conocido cálculo de la cuarta parte de 3300 que realiza Sancho mediante descomposición y dos demediados tenía una gran tradición. Todavía hoy en los libros de Cálculo Mental se recomienda su uso.

- Ellos -respondió Sancho- son tres mil y trecientos y tantos; de ellos me he dado hasta cinco: quedan los demás; entren entre los tantos estos cinco, y vengamos a los tres mil y trecientos, que a cuartillo cada uno, que no llevaré menos si todo el mundo me lo mandase, montan tres mil y trecientos cuartillos, que son los tres mil, mil y quinientos medios reales, que hacen setecientos y cincuenta reales; y los trecientos hacen ciento y cincuenta medios reales, que vienen a hacer setenta y cinco reales, que,

juntándose a los setecientos y cincuenta, son por todos ochocientos y veinte y cinco reales. Éstos desfalcaré yo de los que tengo de vuestra merced, y entraré en mi casa rico y contento, aunque bien azotado; porque no se toman truchas..., y no digo más...

(Libro II, Capítulo LXXI)

5. La combinatoria.

Hay un pasaje donde el soldado seductor Vicente de la Roca combina sus prendas para simular mayor variedad de vestidos:

Y halló que los vestidos eran tres, de diferentes colores, con sus ligas y medias, pero él hacía tantos guisados e invenciones dellas, que si no se los contaran hubiera quien jurara que había hecho muestra de más de diez pares de vestidos y de más de veinte plumajes.

(Libro I, capítulo LI)

Si comprobamos que las variaciones con repetición de tres vestidos tomados de dos en dos son 9 (3^2) y las de tres en tres son 27 (3^3), se aprecia que las estimaciones tenían mucho sentido: diez trajes y más de veinte plumajes.

6. Las progresiones.

Las duplicaciones y las demediaciones -como se ha señalado- son técnicas muy gratas a Cervantes y aparecen varias veces; en dos de ellas forman progresión geométrica de tres términos:

Y despidiendo treinta ayes y sesenta suspiros y ciento y veinte pesetes y reniegos de quien allí le había traído, se levanto [Sancho].

(Libro I, capítulo XV)

¡Ea, ministros de esta casa, altos y bajos, grandes y chicos, acudid unos tras otros y sellad el rostro de Sancho con veinte y cuatro mamonas,, y doce pellizcos y seis alfilerazos en brazos y lomos, que en esta ceremonia consiste la salud de Altisidora!

(Libro II, capítulo LXIX)

7. Una estimación muy errónea.

El hipotético viaje que emprenderán Don Quijote y Sancho en Clavileño será por aire para reducir las distancias, pero comprobaremos que la estimación es muy grosera:

-Es el caso -respondió la Dolorida- que desde aquí al reino de Candaya, si se va por tierra, hay cinco mil leguas, dos más a menos; pero si se va por el aire y por la línea recta, hay tres mil y doscientas y veinte y siete.

(Libro II, capítulo XL)

Tanta precisión tentaba a su verificación. Don Quijote se encuentra en Zaragoza y el reino de Candaya en Ceilán. Calculando por geometría analítica, o mejor con las

fórmulas del primer grupo de Bessel de la trigonometría esférica, encontramos que la distancia de Zaragoza (41° N- 1° W) a Colombo (6° N- 79° E) es 1606 leguas (80,5° de círculo máximo). La distancia mínima es la mitad de la que aparece en el texto. Interesante resaltar que lo que en la superficie terrestre se consideran líneas rectas son los círculos máximos. Desaparecida de los programas la trigonometría esférica, puede ser un buen problema práctico hacer uso de la geometría analítica.

8. La geometría.

El término geometría solo aparece dos veces: en el Prólogo de *El ingenioso hidalgo* y en capítulo I de *El ingenioso caballero*. En el primer caso para manifestar que para escribir la novela poca ayuda ha encontrado en la literatura filosófica: *ni le son de importancia las medidas geométricas*. Mayor interés tiene la segunda: utilización de la semejanza para demostrar la existencia de los gigantes pues *la geometría saca esa verdad de duda*.

El compás aparece en dos ocasiones, ambas en el segundo libro. La primera (capítulo XIX) para señalar en la esgrima la posición de las piernas: *apeaos y usad de vuestro compás de pies*. En el capítulo XXXIII, Sancho indica a la Condesa las precauciones a tomar en las caballerizas: *se ha de ir con el compás en la mano y con medido término*.

La pirámide se usa también metafóricamente como figura de gran base que se reduce a nada en la cúspide: *aunque tuvieron principios grandes acabaron en punta como pirámides...Habiendo disminuido y aniquilado su principio hasta parar en nonada, como lo es la punta de la pirámide* (Libro II, capítulo VI)

9. Las proporciones: ratas.

El Quijote conserva el término *rata*, el latino ratio, para las proporciones. Así, para calcular pagos usa *rata por cantidad de tiempo* (Libro I, capítulo XX) o *contad Sancho rata por cantidad y mirad lo que os debo y pagaos* (Libro II, capítulo XXVIII).

La cuadruplicación la expresa Cervantes con solo el número: *pagaré con el cuatro tanto en la muerte las partidas de que no se hubiera hecho cargo en la vida* (Libro II, capítulo XLII).

Multiplicar por siete son *setenas*, como los palos que recibe Sancho: *y yo con las setenas* (Libro II, capítulo XVIII).

Un reparto de botín delicioso es el realizado por el bandido justiciero catalán Roque Guinart, pero tiene mucho de sabio y poco de matemático.

10. Mitología matemática.

Cervantes escribe cuando termina el Renacimiento, cuando subsisten las creencias de pueblos sabios que disponían de un saber básico y oculto, hermético. Entre los saberes de estas cofradías de iniciados estaba un profundo conocimiento matemático. Estos

sabios mitológicos son los escribas egipcios, los *bracmanes* y los *ginosofistas* (Libro I, capítulo XLVII) En particular los gimnosofistas aparecen como creadores de la aritmética en la biblioteca de El Escorial.

11. El rosario: un ábaco singular.

La matemática puede aparecer donde menos lo esperamos: un rosario no es otra cosa que un ábaco. Si rezar requiere orden y precisión, el rosario es el mecanismo simple de computo. Ante la carencia de un rosario, Don Quijote fabrica uno: *...rasgó una gran tira de la falda de la camisa ...y dióles once ñudos, el uno más gordo que los demás* (Libro I, capítulo XXVI)

12. Los números primos, los divisores y la poesía.

El termino usado para un poema es *metros*; nada más apropiado para un arte que en la época lleva asociada una forma precisa: silabas por verso, número de versos y rimas prefijadas según la composición. El orden del poema es aritmético.

Cuando Don Quijote (Libro II, capítulo IIII) pide al bachiller poeta que dedique un poema acróstico a su idolatrada dama se va encontrar con una dificultad añadida: Dulcinea del Toboso tiene 17 caracteres, es por tanto primo y no encaja en las composiciones establecidas. Dice el bachiller:

...no dejaría de componer los tales metros, aunque hallaba una dificultad grande en su composición, a causa que las letras que contenían el nombre eran diez y siete, y si se hacía de cuatro castellanas de a cuatro versos, sobrara una letra, y si de a cinco, a quien llaman décimas o redondillas, faltaban tres letras;...

13. Una deriva tecnológica.

Tres aspectos relacionados con la revolución científico-tecnológica de la época pueden ser de interés resaltar: los ingenios mecánicos, la cosmografía y el vuelo de Clavileño.

En el siglo XVI se realiza en España un esfuerzo tecnológico importante con los máquinas de agua y viento. Queda como modelo el ingenio para subir las aguas del Tajo al Alcázar de Toledo de Juanelo Turriano, relojero del emperador. Y junto a ese admirable dispositivo de ruedas hidráulicas y tornillos de Arquímedes, se inician muchas obras de canales y molinos. Cervantes no permanece al margen de ese proceso y no le pasará inadvertido. Don Quijote sufrirá el enfrentamiento con las máquinas: *molinos de viento* (Libro I, capítulo VIII), *batanes* (Libro I, capítulo XX) y *aceñas* (Libro II, capítulo XXIX. El terror cósmico ante la maquina pocas veces se ha expresado mejor.

El viaje por el Ebro (Libro II, capítulo XXIX) es una deliciosa caricatura de la navegación científica realizada por un aficionado conocedor. *Ptolomeo* es citado dos

veces, una como geógrafo (Libro I, capítulo XLVII) y otra como astrónomo (Libro II, capítulo XXIX). El *astrolabio* que Don Quijote echa de menos en el río Ebro sería el instrumento de orientación básico. En una ocasión se calcula lo que queda de noche por las estrellas, Osa Mayor, llamada por su nombre popular *bocina* (Libro I, capítulo XX)

El vuelo de Clavileño nos ofrece la teoría del espacio en el Renacimiento: *sentí que pasaba por la región del aire y aun que tocaba la del fuego* (Libro II, capítulo XLI)

14. Recapitulación.

Quizá el Quijote no sea una novela de omnipresencia matemática o con un papel muy destacable como -dentro de las grandes obras de la literatura universal- pueden ser *Guerra y Paz* o *El hombre sin atributos*; pero Cervantes no desdeña su importancia, antes bien, tuvo una concepción moderna y consciente de su papel. Como con los ingenios y la cosmografía, punta de lanza tecnológica de los nuevos tiempos, a Don Miguel no le paso desapercibido que algo profundo estaba pasando -no solo que la caballería andante estaba trasnochada- y que en ese nuevo acontecer algo tenían que ver las matemáticas. *El ingenioso hidalgo* nunca dejará de sorprendernos y admirarnos.

15. Referencias.

- [1] ALCALDE, J. y COPERIAS, E. M. *La ciencia en el Quijote*. Muy Interesante, 284. Madrid, enero 2005.
- [2] BALBUENA CASTELLANO, L. *Cervantes, Don Quijote y las matemáticas*. Edición digital. Tenerife, 2003
- [3] BALBUENA CASTELLANO, L. y GARCÍA JIMENEZ, J. E.. *El Quijote y las matemáticas*. Servicio publicaciones FESPM. Badajoz, 2004.
- [4] CERVANTES SAAVEDRA, M. *Don Quijote de la Mancha*. Edición de Iriso S. y Pontón G. Galaxia Gutenberg. Barcelona, 1998.
- [5] CERVANTES SAAVEDRA, M. *Novelas ejemplares*. Editorial Planeta. Barcelona, 2005.
- [6] FERNANDEZ GOMÉZ, C. *Vocabulario de las obras de Miguel de Cervantes*. Biblioteca Nacional. Sala Cervantes, 3451.
- [7] GARCÍA-FRIAS CHECA, C. *La pintura mural y de caballete en la biblioteca del Real Monasterio de el Escorial*. Editorial Patrimonio Nacional. Madrid, 1991.
- [8] PSEUDO-JUANELO TURRIANO. *Los veintitún libros de los ingenios y de las maquinas*. Turner. Madrid 1983.
- [9] VERA, F. *Científicos griegos*. Aguilar. Madrid 1970.

Post-scriptum: Las matemáticas en el Apócrifo

La publicación en 1614 de la quinta, la sexta y la séptima parte de *El ingenioso hidalgo Don Quijote de la Mancha* firmada (con pseudónimo) por Alonso Fernández de Avellaneda, y su carácter provocador contra el autor alcalaíno, fuerza cambios en la edición de 1615 de *El ingenioso caballero* de Cervantes, pero también nos ofrece la posibilidad de comparar cuanta matemática hay en uno y otros libros.

La pobreza matemática del apócrifo nos permite valorar mejor la importancia que daba Cervantes a las matemáticas. Las aventuras del *Caballero Desamorado* ocupan una extensión inferior a un tercio de los dos libros de Don Miguel, el tamaño es suficiente para observar alguna referencia de interés. Presencia matemática hay, pero nada comparable a lo analizado anteriormente o a la riqueza de lo estudiado por Balbuena.

Los términos matemáticas, geometría o aritmética no aparecen. Como autor solo se cita a Ptolomeo vinculado a la astrología (astronomía). No hay en el apócrifo operaciones, paradojas, metáforas matemáticas, figuras, o progresiones. Pocas veces se mencionan medidas o monedas, algunas fracciones, varias veces el termino cifras, algunas docenas e innumerables el termino infinito.

Para exagerar, o expresar algo grande, se abusa de *infinito*: aparece prácticamente en todos los capítulos del apócrifo y en distintas variantes: *infinidad o infinitamente*.

Doce se encuentra varias veces (*doce pares, doce doncellas, doce leguas, doce millones en oro, doce signos*), pero quizá lo más curioso es la mezcla que hace Sancho recriminando a Don Quijote en el capítulo XXVIII del sistema decimal y el docenal: *no le he dicho yo cuatro mil docenas de millones de veces que no nos metamos...*

Se usan por Avellaneda los términos *medio*, y *cuartos* y *ochavos* como monedas. También se menciona *pares*.

El termino *cifra* aparece referido más a los versos y al uso como cifrado. Merece la pena detenerse pues tanto en el sentido de versos, como en el de cifrado, como el de resumen o simplificación del mensaje está presente el sentido profundo de la matemática: dar orden, simplificar, y conceptualizar. Resulta muy interesante el uso y segunda evolución del termino *cifra* (cero en árabe) y como ya es utilizado por Avellaneda.

Terminamos las referencias con la medida de capacidad *azumbre* que es la supervivencia del termino árabe octava parte (de cántaro)

San Sebastián de los Reyes
7 de abril de 2005

ENCONTRANDO EL «LUGAR DE LA MANCHA» CON LAS MATEMÁTICAS

M^a Jesús Ríos Insua Francisco Javier Montero de Juan Francisco Parra Luna
(Universidad Complutense de Madrid)

Albacete, 5 de Julio, 2005

CONTENIDO

- Resumen
- Introducción
- Datos
- Hipótesis
- Primer problema
- Segundo problema
- Conclusiones
- Comentarios

RESUMEN

Cervantes, aunque no quiere decir dónde vivía Don Quijote al principio del libro, a lo largo del texto va dejando caer, con motivo de sus viajes, referencias acerca de las distancias entre ese lugar de la Mancha y otros pueblos, como El Toboso, Puerto Lápice, Sierra Morena,... En este trabajo vamos a ver que esas distancias son consistentes y permiten determinar, con bastante fiabilidad, dicho lugar, teniendo en cuenta que de la lectura del libro se tiene idea del tiempo empleado por Don Quijote y Sancho en llegar a los distintos pueblos mencionados: asociando a cada uno de los candidatos a lugar de La Mancha un vector de distancias, la teoría de la Decisión Multicriterio proporciona una solución mediante la construcción de una función de valor con valores reales. Además, nos permitirá elaborar una hipótesis acerca de la velocidad con la que Rocinante y Rucio cabalgaban pudiendo contrastar la solución matemática con la que puede deducirse de la lectura del Quijote.

INTRODUCCIÓN

Desde hace 400 años se viene intentando encontrar el lugar de la Mancha de cuyo nombre no quiso acordarse Cervantes.

Las soluciones al problema han ido desde:

- cabalísticas (el lugar debe tener tantas letras como años la esposa de Cervantes al casarse)
-
- sociológicas (estudiando las condiciones y características que se describen en el texto)

Nuevo enfoque del problema

Considerar «El Quijote», como enunciado de un problema geométrico de determinación de un punto o lugar geométrico (de cuyo nombre Cervantes no quiso acordarse), dadas las distancias desde dicho punto a tres/cuatro lugares (de cuyos nombres Cervantes si se acordó).

HIPÓTESIS

Datos

- a) El «lugar de la Mancha» está dentro del Campo de Montiel (prólogo; Cap. I; Cap. VII; Cap. LII, Primera parte, y Cap. VII, segunda Parte).
- b) El «lugar de la Mancha» está a dos días de Sierra Morena (SM), (Cap. XXIX, Primera parte).
- c) El «lugar de la Mancha» está a una noche y dos días de El Toboso (ET) (Cap. XXXVII, Primera parte).
- d) El «lugar de la Mancha» está a dos días y algunas horas de Puerto Lápice (PL) (Cap. XII a XXIV, Primera parte).
- e) El «lugar de la Mancha» está a dos días de Munera (Cap. LXXII, Segunda parte).
- f) La velocidad de Rocinante/Rucio está comprendida entre los 30 y 35 Km por jornada (Caps. XI, XXVII, Primera parte).

Figura 1. Este mapa es copia del original que se encuentra en la Biblioteca del Escorial que fue realizado para las Relaciones Topográficas de los pueblos de España, mandada hacer por Felipe II. El aquí presentado se guarda en la Real Academia de Historia de Madrid y corrige un error de orientación del original.



Pueblos	PL	SM	ET	MR	Pueblos	PL	SM	ET	MR
Albaladejo	100	69	100	54	Puebla P.	100	55	107	66
Alcubillas	72	52	85	64	S. C. Valle	65	87	61	36
Alhambra	61	70	68	52	S. C. Caña	95	64	100	58
Almedina	91	55	100	62	Solana	48	65	67	66
Cañamares	92	78	90	41	Terrinches	98	64	102	57
Carrizosa	69	66	75	50	T. J. Abad	93	44	105	73
Castellar	90	27	110	89	Torres M.	88	61	94	59
Cozar	85	46	98	68	Torrenueva	78	30	102	88
Fuencilla	79	64	84	52	Villahermosa	84	69	85	46
Membrilla	42	65	67	75	Villamanrique	98	49	108	71
Montiel	90	67	93	50	Villa Fuente	98	80	94	42
Ossa	75	92	65	25	Villa Infant.	77	58	85	57

Tabla 1. Distancias, en kms, de los venticuatro pueblos candidatos —situados en esa época dentro del Campo de Montiel—, a los cuatro destinos, medidas en línea recta. Fuente: Mapa de carreteras Michelin.

Consideremos la tabla anterior, Tabla 1, como una matriz de distancias $A = (a_{ij})$, con $i = 1, \dots, 24$ y $j = 1, \dots, 4$.

Consideremos también el vector $d = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ en que d_j representa las jornadas empleadas por D. Quijote y Sancho para llegar desde el lugar de La Mancha al j -ésimo de los cuatro destinos señalados.

- d_1 = jornadas para llegar hasta PL.
- d_2 = jornadas para llegar hasta SM.
- d_3 = jornadas para llegar hasta ET.
- d_4 = jornadas para llegar hasta MR.

Como consecuencia de la información que da Cervantes en el texto podemos estimar las d_j para $j = 1, \dots, 4$, resultando

$$d = (2, 2, 2.5, 2)$$

Llamemos v a la velocidad por jornada en kms, esto es, el número de kms recorridos por jornada.

Definamos ahora una matriz $X = (x_{ij})$ con todas las filas iguales, es decir

$$x_{ij} = v d_j \text{ para todo } i = 1, \dots, 24, j = 1, \dots, 4;$$

Consideramos ahora la siguiente matriz $D = (d_{ij})$

$$d_{ij} = |x_{ij} - a_{ij}|$$

que representa las discrepancias entre las x_{ij} (que son función de la velocidad v) y a_{ij} , que son las distancias medidas sobre el mapa Michelin, en línea recta.

Quedan así definidas las discrepancias d_{ij} como función de la velocidad v .

Si conociésemos con exactitud esta velocidad (p.e. los 34 Km. por jornada que se justifican en el propio texto de El Quijote, entonces la matriz de discrepancias d_{ij} , resultaría perfectamente conocida.

Así, p.ej., para $i = 1$, Albaladejo, la fila primera fila de la matriz D sería

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= |100 - 34 \times 2| = 32 \\ \delta_{12} &= |69 - 34 \times 2| = 1 \\ \delta_{13} &= |100 - 34 \times 2.5| = 15 \\ \delta_{14} &= |54 - 34 \times 2| = 14\end{aligned}$$

y para $i = 24$, Villanueva de los Infantes, la fila sería

$$\begin{aligned}\delta_{241} &= |77 - 34 \times 2| = 9 \\ \delta_{242} &= |58 - 34 \times 2| = 10 \\ \delta_{243} &= |85 - 34 \times 2.5| = 0 \\ \delta_{244} &= |57 - 34 \times 2| = 11\end{aligned}$$

De forma que repitiendo los cálculos para las restantes $i = 2, \dots, 23$, queda la matriz $D = (d_{ij})$, de la Tabla 2.

Pueblos	PL	SM	ET	MR	Pueblos	PL	SM	ET	MR
Albaladejo	32	1	15	14	Puebla P.	32	13	22	2
Alcubillas	4	16	0	4	S. C. Valle	3	19	24	32
Alhambra	7	2	17	16	S. C. Caña	27	4	15	10
Almedina	23	13	15	6	Solana	20	3	18	2
Cañamares	24	10	5	27	Terrinches	30	4	17	11
Carrizosa	1	2	10	18	T. J. Abad	25	24	20	5
Castellar	22	41	25	21	Torres M.	20	7	9	9
Cozar	17	22	13	0	Torrenueva	10	38	17	20
Fuencollana	11	4	1	16	Villahermosa	16	1	0	22
Membrilla	26	3	18	7	Villamanrique	30	19	23	3
Montiel	22	1	8	18	Villa Fuente	30	12	9	26
Ossa	7	24	20	43	Villa Infant.	9	10	0	11

Tabla 2. Tabla de las discrepancias absolutas usando la métrica L1 y una velocidad de $v = 34$ kms/jornada.

PRIMER PROBLEMA

El primer problema que tenemos que resolver es el de comparar los 24 pueblos, representado cada uno de ellos por la fila correspondiente de la matriz $D = (d_{ij})$, de las discrepancias para los 24 pueblos. La solución ha de pasar por ordenar y comparar los 24 vectores. Las comparaciones entre vectores no son fáciles sin recurrir a ciertas metodologías matemáticas. La idea en esta parte del trabajo es aplicar la teoría de la decisión multicriterio definiendo una función de valor Z que permita asociar a cada fila i -ésima de la matriz (vector) un valor real r con lo cual el problema estará resuelto pues se reducirá a comparar números reales, determinando el mínimo que corresponderá al lugar de La Mancha que buscamos. En esquema:

$$(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}) \rightarrow Z(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}) = r \in R$$

Siguiendo la Teoría de la Decisión Multicriterio, analizados los componentes del vector (criterios), podemos plantear distintas funciones de valor que, como veremos, darán soluciones muy similares al problema:

$$\begin{aligned} (1) \quad Z_1(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}) &= \sum_{j=1}^4 \delta_{ij} \\ (2) \quad Z_2(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}) &= \sum_{j=1}^4 \delta_{ij}^2 \\ (3) \quad Z_\infty(\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3}, \delta_{i4}) &= \max_{j=1, \dots, 4} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Con cualquiera de estas tres funciones de valor, una vez valorado cada pueblo para una velocidad determinada, aquél que haga mínima la correspondiente función de valor Z_1 será el lugar de La Mancha.

Al ir repitiendo este estudio para distintos valores de la velocidad v (no solo para los 34 Km por jornada), nos va a ir dando los pueblos óptimos correspondientes a cada v . En conclusión, desde este planteamiento la determinación del pueblo óptimo vendrá condicionada por el valor de la velocidad v que hayamos fijado.

v	Z_1	Z_2	Z_∞
25	Solana	Solana	Solana
26	Alhambra	Solana	Solana
27	Alhambra	Solana	Solana
28	Alhambra	Alhambra	Solana
29	Alhambra	Alhambra	Solana
30	Carrizosa	Alhambra	Alhambra
31	Carrizosa	Carrizosa	Alcubillas
32	Alcubillas	Alcubillas	Alcubillas
33	Alcubillas	Alcubillas	Villa Infant.
34	Alcubillas	Alcubillas	Villa Infant.
35	Alcubillas	Villa Infant.	Villa Infant.
36	Alcubillas	Villa Infant.	Villa Infant.
37	Alcubillas	Torres M.	Torres M.
38	Torres M.	Torres M.	Torres M.
39	Cozar	Torres M.	Torres M.
40	Cozar	Torres M.	Torres M.

Tabla 3. Pueblos candidatos a ser el lugar de la Mancha para una velocidad v y cada una de las tres funciones de valor $Z1(di, v)$, $Z2(di, v)$ y $Z8(di, v)$.

SEGUNDO PROBLEMA

Como consecuencia de lo anterior, nos planteamos otro problema:

Si en lugar de considerar las d_{ij} fijas, consecuencia de haber fijado v en distintos supuestos, las vemos ahora como funciones de v , $d_{ij}(v)$, podríamos tratar el problema de estimar la velocidad como uno de minimizar una función objetivo conveniente, con respecto a v . Esto nos dará, en principio, según la función objetivo que elijamos, distintas soluciones.

Si tomamos como función de discrepancia global la suma de las discrepancias totales, lo que supone utilizar la métrica L_1 , el problema será:

$$\min_v O_1(v) = \min_v \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^4 \delta_{ij}(v) = \min_v \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^4 |v d_j - a_{ij}| \quad (L_1)$$

esto nos dará la poligonal de la Figura 3. Podemos obtener el mínimo de esta función, gráfica o numéricamente, que será esa velocidad de Rocinante/ Rucio que optimiza el sistema, que resulta ser $v_1 = 34$ kms/jornada.

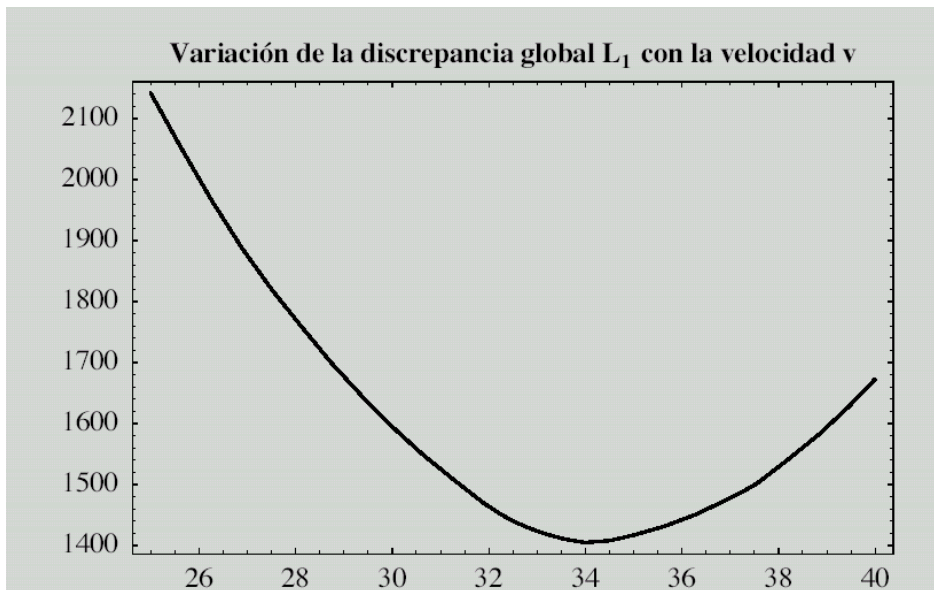


Figura 3. Gráfica de la curva poligonal correspondiente a la ecuación (L1).

Si optamos por la función objetivo asociada a la métrica L_2 , tendremos que calcular

$$\min_v O_2(v) = \min_v \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^4 \delta_{ij}(v)^2 = \min_v \sum_{i=1}^{24} \sum_{j=1}^4 (v d_j - a_{ij})^2 \quad (L_2)$$

En este caso, que corresponderá a una parábola (véase la Figura 4), podemos obtener el mínimo de forma analítica sin más que derivar e igualar a 0. El mínimo se obtiene para una velocidad $v_2 = 34.371$ kms/jornada.

Si por último tomamos como métrica la L_8 , en combinación con el criterio minimáx,

$$\min_v O_2(v) = \min_v \sum_{i=1}^{24} \max_{j=1,\dots,4} \delta_{ij}(v) = \min_v \sum_{i=1}^{24} \max_{j=1,\dots,4} |v d_j - a_{ij}|, \quad (L_\infty)$$

entonces obtenemos la Figura 5 que es una poligonal. En este caso se el mínimo se obtiene para una velocidad $v_8 = 32.75$ kms/jornada.

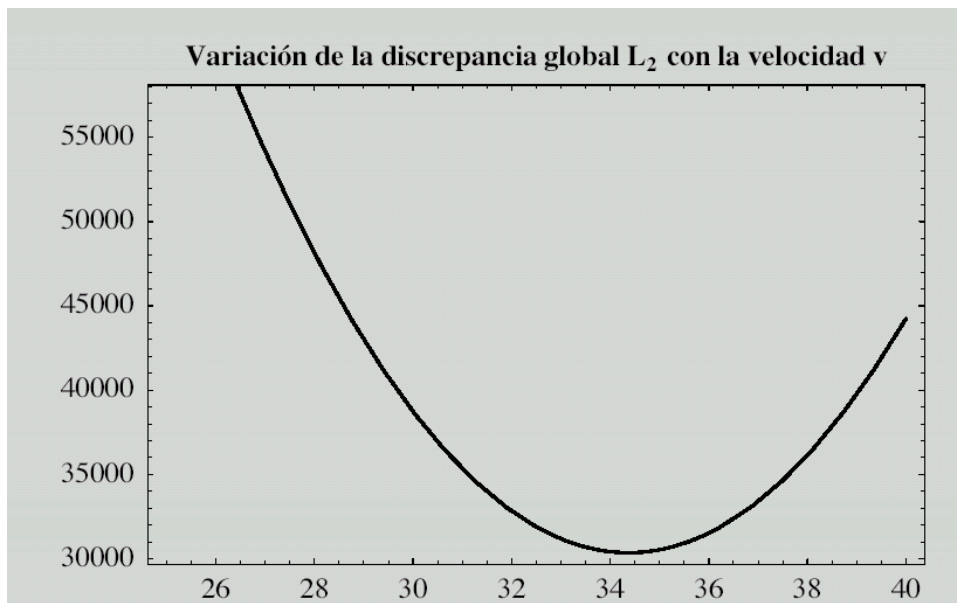


Figura 4. Gráfica de la curva cuadrática o parábola correspondiente a la ecuación (L2).

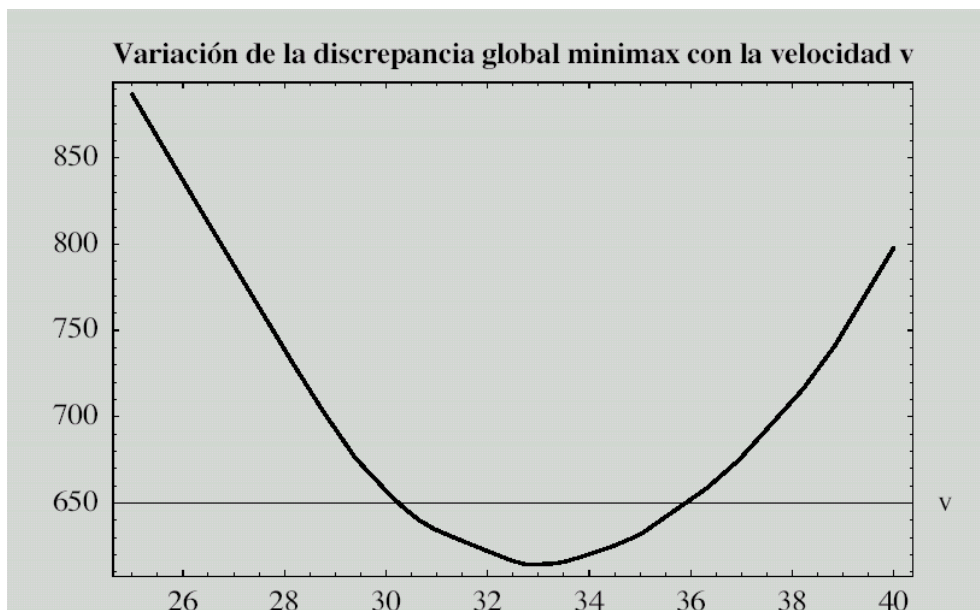


Figura 5. Gráfica de la curva poligonal correspondiente a la ecuación (L8).

CONCLUSIONES

- (1) Para la velocidad que razonadamente describe Cervantes en el texto para Rocinante, resulta como más verosímil lugar de la Mancha Villanueva de los Infantes, quedando en segundo lugar el pueblo de Alcubillas.
- (2) Al ir considerando las discrepancias como función de la velocidad, podemos determinar o estimar la velocidad que minimiza la suma global de esas discrepancias, según cada una de las métricas utilizadas.

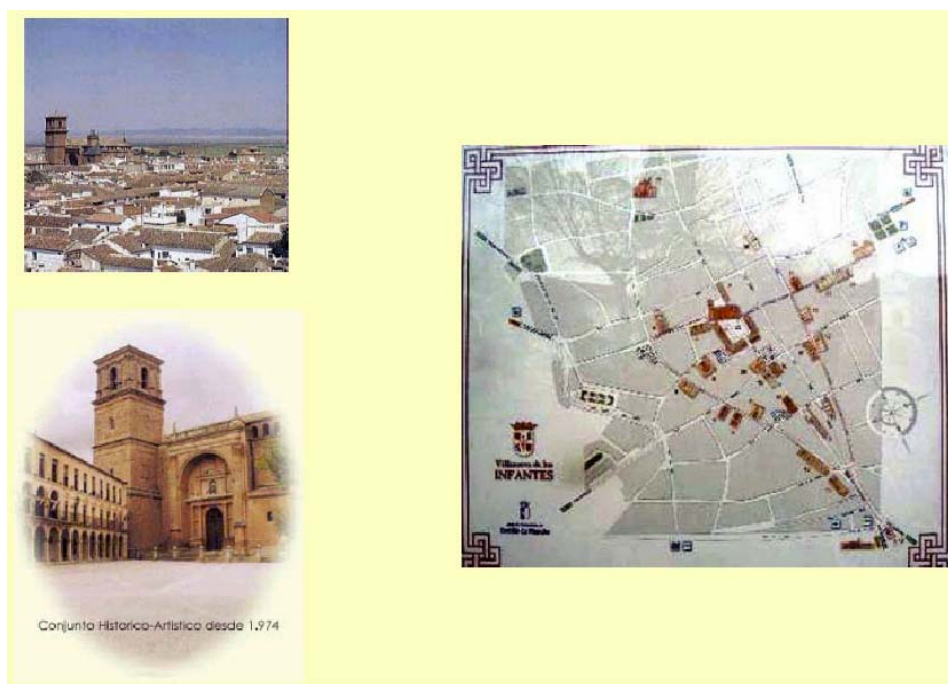


Figura 6. Villanueva de los Infantes.

COMENTARIOS

- (1) La estimación de la velocidad v depende de los 24 pueblos considerados y de la métrica que se utiliza, $L1$, $L2$ o $L8$. La elección de estas métricas puede justificarse por razonamientos basados en ciertas propiedades de las funciones de valor o por razonamientos estadísticos.
- (2) La presencia de algunos pueblos, entre los 24 del Campo de Montiel, que están dominados por otros, puede distorsionar la estimación de la velocidad y también la del lugar de la Mancha, por lo que sería interesante considerar su eliminación y el efecto que pudieran tener en la solución de los dos problemas.
- (3) Se podría llevar a cabo un análisis similar al presentado considerando discrepancias relativas, en vez de absolutas como se ha hecho aquí, aunque los resultados no son demasiado diferentes.
- (4) Dada la incertidumbre inherente tanto a los datos como a las jornadas cubiertas por D. Quijote en sus viajes, un análisis estadístico del problema, en lugar de uno basado en la Teoría de la Decisión Multicriterio como el que se ha seguido aquí, sería deseable.