



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 1

“LAS NUEVAS TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN (TIC) AL SERVICIO DEL APRENDIZAJE Y LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS”

TALLERES

JUEGOS DE LÓGICA Y ESTRATEGIA. JUEGOS Y MATEMÁTICAS.	913
ACTIVIDADES MATEMÁTICAS PARA ESO Y BACHILLERATO CON EL PROGRAMA DERIVE	917
MATEMÁTICAS CON EXCEL. SIMULACIÓN DE MOVIMIENTO. OPTIMIZACIÓN.	919
PUZZLES LÓGICOS, PROGRAMACIÓN FUNCIONAL.	925
EL LÍMITE DEL BIEN. EL LÍMITE DEL MAL.	931
JUGAR CON LAS MATEMÁTICAS	937
TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. MATEMÁTICAS 4º DE LA ESO.	945
UNA OJEADA A LA CALCULADORA WIRIS	951
LA CALCULADORA GRÁFICA COMO RECURSO EN MATEMÁTICAS	953
UN PASEO POR LA METODOLOGÍA CLASSPAD EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.	955
PROGRAMACIÓN CON DERIVE PARA FOMENTAR LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA DEL ALUMNO	957

JUEGOS DE LÓGICA Y ESTRATEGIA. JUEGOS Y MATEMÁTICAS.

Comas Roqueta, Joaquín
IES Sierra Minera
Joaquincomas@semrm.com

Herrera Ponz, María Jesús
IES Thiar
chusherrera@semrm.com

Presentación:

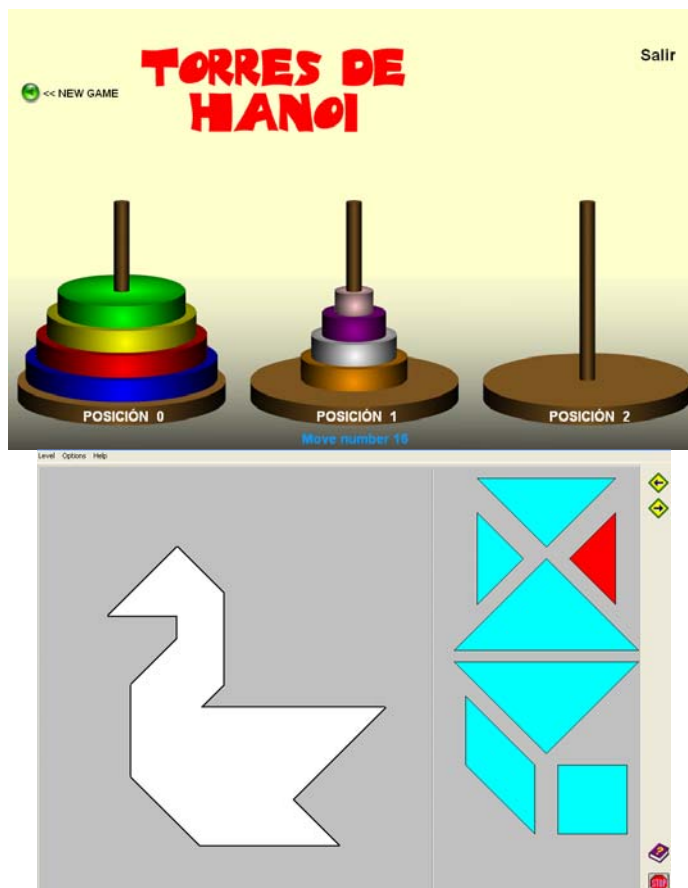
El objetivo de este taller es mostrar una serie de actividades realizadas con alumnos de 1º y 2º de ESO en la asignatura de Juegos de Lógica y Estrategia siendo de aplicación en las asignaturas de matemáticas en Secundaria. Por lo general se trata de juegos clásicos pero “novedosos” en su presentación que nos podemos encontrar en libros, revistas, tiendas y sobre todo en internet. Con ellos pretendemos mostrar el juego como medio para trabajar las Estrategias de Resolución de Problemas y como ayuda en el proceso de aprendizaje.



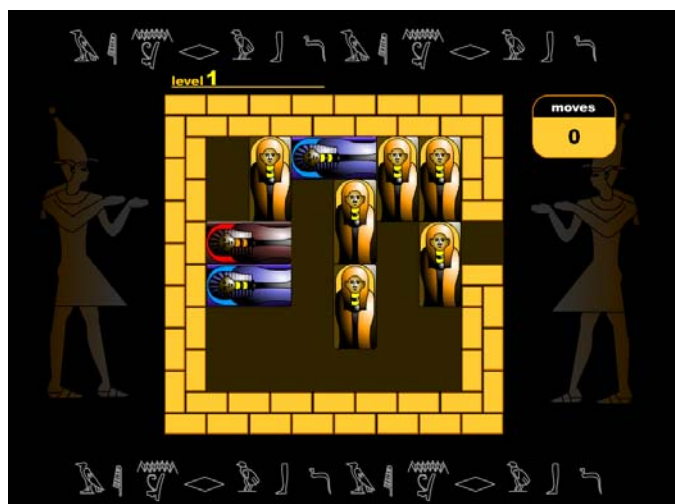
Juegos de Lógica y Estrategia es una asignatura optativa, ofertada en el I.E.S. Thiar de Pilar de la Horadada (Alicante) a alumnos de 1º y 2º de E.S.O. La gran mayoría de los juegos que vamos a presentar no tienen un nivel curricular determinado sino que pueden adaptarse a los diferentes alumnos y niveles llegando a razonamientos más o menos elaborados y muy cercanos al que-hacer matemático.

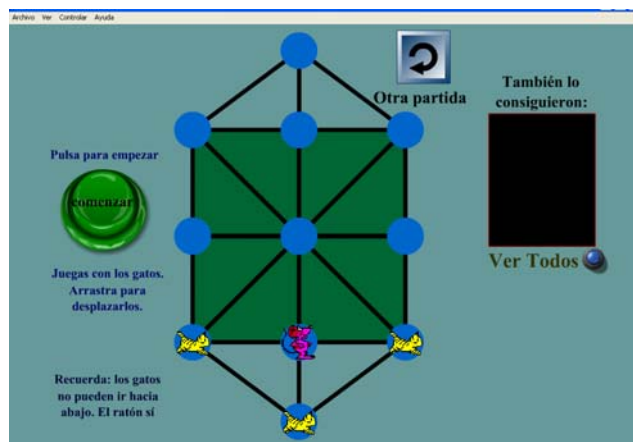


Las actividades a realizar durante el taller son presentadas en formato papel o mediante el uso de ordenador (para cada alumno o pareja de alumnos). Por lo general las actividades presentadas en formato papel necesitarán de una mayor motivación por nuestra parte, mientras que en aquellas en las que utilicemos el ordenador con una presentación atractiva (a menudo en Power Point) se logra casi sin darnos cuenta un verdadero reto para nuestros alumnos. Con esto conseguiremos primero que nuestros alumnos comiencen a jugar y posteriormente lograremos hacerles pensar para ir iniciándoles en un modo de razonamiento matemático.



En el Taller iremos presentando y evaluando diferentes tipos de juegos (con sus respectivas presentaciones y actividades) a la vez que iremos mostrando numerosas fuentes donde encontrarlos.





Algunos de los juegos a tratar son: Cruzar el río, Sapos y Ranas, Tangram, Torres de Hanoi, Los puentes de Königsberg, El solitario inglés, El problema del tráfico, La mosca, Los gatos y el ratón, Salto de canguros, Jugando con expresiones, Nim, Puzzles...

Bibliografía:

Carcavilla, J.L., Fernández, G. (2003): *Historia de las Matemáticas*. Proyecto Sur. Granada.

Corbalán, F. (1994): *Juegos Matemáticos para secundaria y bachillerato*. Síntesis. Madrid.

Guzmán, M. de (1999): *Para pensar mejor*. Pirámide. Madrid.

Guzmán, M. de (2003): *Cuentos con cuentas*. Nivola. Madrid.

Rodríguez Vidal, R.(2002) *Diversiones Matemáticas*. Reverté. Sevilla.

<http://www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm>

<http://www.xtec.es/~jjareno/>

<http://www.juntadeandalucia.es/averroes/iesarrojo/matematicas/taller/taller.htm>

<http://www.cnice.mecd.es/eos/MaterialesEducativos/mem2002/estrategias/index.html>

<http://www.juegosdelogica.net/>

<http://www.puzzles.com/>

<http://www.plastelina.net>

<http://www.mazeworks.com/home.htm>

<http://www.xtec.es/~rbernau1/>

<http://www.cut-the-knot.org/games.shtml>

<http://www.mlevitus.com/>

ACTIVIDADES MATEMÁTICAS PARA ESO Y BACHILLERATO CON EL PROGRAMA DERIVE

Jesús Ríos Garcés

profesor del IES de La Sénia, Tarragona
profesor asociado de la Universidad
Jaume I de Castellón
jríos@mat.uji.es

Francisco José Monserrat Delpalillo

profesor ayudante de la Universidad
Jaume I de Castellón
monserra@mat.uji.es

Descripción del taller

La tecnologías de la información y de la comunicación son cada vez más importantes en nuestra sociedad y, por tanto, se incluyen continuamente en la metodología de la enseñanza en general. El programa Derive nos da la oportunidad de complementar las actividades tradicionales (exposiciones orales, resolución de ejercicios, problemas escritos ...) con un apoyo informático, tan necesario hoy en día.

Este taller está dirigido a todo el profesorado de matemáticas de ESO y bachillerato que quiera utilizar herramientas informáticas para el refuerzo, ampliación y/o consolidación de los contenidos fijados en el currículum.

El objetivo fundamental es el de mostrar al profesorado la existencia del programa Derive, explicar su funcionamiento, las posibilidades educativas del mismo y, finalmente, iniciarse en la creación de actividades aprovechando los ejemplos de las ya creadas por los organizadores del taller.

Con estas actividades, el docente tiene una herramienta más para tratar los contenidos de matemáticas y atender la diversidad que se puede encontrar, cada día con más frecuencia, dentro del aula.

MATEMÁTICAS CON EXCEL. SIMULACIÓN DE MOVIMIENTO. OPTIMIZACIÓN.

Miguel Barreras Alconchel.

IES Matarraña

EXCEL es una potente Hoja de Cálculo (HC), disponible en cualquier ordenador, que ofrece recursos muy interesantes no sólo para la obtención de resultados, sino también y sobre todo para el aprendizaje de las matemáticas. Se presentan en este taller dos de los múltiples recursos para ser utilizados en la clase. Uno, la simulación de movimiento con la ayuda del Visual Basic que EXCEL lleva incorporado. Dos, la resolución de problemas, sencillos y complejos, de optimización utilizando la potente herramienta Solver.

Introducción

La utilización de la hoja de cálculo en clase de matemáticas puede realizarse de dos maneras.

Una. El propio alumno elabora algunas hojas de sencilla construcción. Así, él mismo modeliza el problema y lo generaliza, construyendo la solución, creando algoritmos propios, valorando la necesidad de una sintaxis correcta, distinguiendo entre distintas categorías numéricas (constante, variable, parámetro), acercándose a las funciones lógicas, etc.

Dos. El profesor diseña la hoja bien para la exposición de algún problema, bien para que el alumno la manipule en su ordenador y establezca conclusiones.

Las funciones que EXCEL procura son lo suficientemente robustas como para que el usuario pueda abordar problemas interesantes que la complejidad del cálculo aparta del currículo.

Veamos dos ejemplos.

Simulación de movimiento

Un recurso interesante que puede conseguirse con Excel es la simulación de movimiento. Hay dos procedimientos para obtener tal efecto; con y sin Visual Basic. Con el primero se logran hojas más versátiles. Es el que pasamos a describir.

Excel trae incorporado un programa muy utilizado en informática, el Visual Basic. Podemos hacer uso de él aunque seamos legos en materia de programación.

Vamos a partir de la ecuación general de la parábola, no dada de la forma más habitual

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{sino de esta otra,}$$

$$y = a(x - b)^2 + c$$

en la que los parámetros guardan relación directa con la representación gráfica.

Se trata de cambiar los valores de los parámetros para mover la parábola asociada y analizar el significado geométrico de los coeficientes de la ecuación. Para ello insertaremos tres contadores de Visual Basic (ScrollBar, Barra de desplazamiento) mediante los que conseguiremos, con un clic de ratón o arrastrándolo, cambiar los

valores de los parámetros en un rango dado, $[-10,10]$, con pasos de 0,1, 1 y 0,5, respectivamente. Los valores se actualizarán en el gráfico automáticamente.

1. Escribir la ecuación de la parábola con parámetros concretos para que, al representarla, EXCEL no dé mensaje de error [fig.1].

	A	B	C	D	E	F
1	y=		2 (x+	-4) ² +	1	

fig. 1

2. Crear una tabla de valores con rango para las x's de -50 a 50 y un incremento = 0,1.

(B26) = $\$B\$1*(A26+\$D\$1)^2+\$F\1

[Observar que es necesario bloquear el valor de los coeficientes con el signo \$ para que Excel no los arrastre como hace con el valor de la variable x, A26, A27, etc.]

Rellenar hasta A1026 y B1026 [fig.2]

3. Representar la parábola con el Asistente para gráficos. Utilizar el modo Dispersión con líneas suavizadas y sin marcadores de datos. Suprimir las líneas de división y la Leyenda.

Con el Botón secundario sobre el eje de abcisas, primero, y luego en el de ordenadas, eliminar la escala automática de los ejes fijando el de las x's de -15 a 15 y de -12 a 12 el de las y's. Mejorar el aspecto del gráfico utilizando el menú contextual sobre los ejes y sobre el Área de trazado [fig.3]

25	x	f
26	-50	= $\$B\$1*(A26+\$D\$1)^2+\$F\1
27	-49,9	= $\$B\$1*(A27+\$D\$1)^2+\$F\1
28	-49,8	= $\$B\$1*(A28+\$D\$1)^2+\$F\1
29	-49,7	= $\$B\$1*(A29+\$D\$1)^2+\$F\1
30	-49,6	= $\$B\$1*(A30+\$D\$1)^2+\$F\1
31	-49,5	= $\$B\$1*(A31+\$D\$1)^2+\$F\1
32	-49,4	= $\$B\$1*(A32+\$D\$1)^2+\$F\1
33	-49,3	= $\$B\$1*(A33+\$D\$1)^2+\$F\1
34	-49,2	= $\$B\$1*(A34+\$D\$1)^2+\$F\1
35	-49,1	= $\$B\$1*(A35+\$D\$1)^2+\$F\1

fig. 2

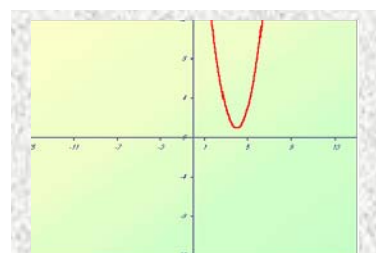


fig. 3

4. Cambiar los valores de las celdas B1 y D1 y comprobar el efecto que produce en el gráfico.

A continuación vamos a conseguir, ayudándonos del Visual Basic incorporado a Excel, una simulación de movimiento de la parábola modificando el valor del coeficiente a.

5. Visualizar la paleta de herramientas del Visual Basic.

Ver / Barras de herramientas / Visual Basic.

6. Activar el botón de Cuadro de controles [fig.4].

7. Seleccionar el cuadro Barra de desplazamiento [fig.5]. (Realmente, este comando en Visual Basic no es un contador sino una barra de desplazamiento de texto. Este comando, cuando interviene en EXCEL, cambia su función y nos permite utilizarlo como una interesante herramienta didáctica).

Dibujar el objeto debajo del coeficiente de las x's.

8. Hacer Doble clic sobre él: Bienvenido a Visual Basic.



fig. 4



fig. 5

El efecto que pretendemos conseguir con este contador es el siguiente: cambiar el valor del coeficiente a con un clic de ratón en la flecha de arriba o de abajo (también de forma continua deslizando el botón de la barra de desplazamiento) con un incremento, pongamos de 0,1, con valores extremos en -10 y +10.

Para este objeto, las únicas propiedades del objeto que acabamos de crear (que se llama ScrollBar1) son las siguientes:

LinkedCell, que hace referencia a la celda de la hoja EXCEL cuyo valor cambiará a golpe de clic del ratón.

Max, que es valor tope máximo que alcanzará y Min que es el valor mínimo.

Como quiera que Visual Basic prefiere los números naturales a los demás, nos valdremos de una celda auxiliar, la A13, que luego volveremos invisible para el usuario, para conseguir el rango y paso deseados en nuestro programa.

9. Definir las propiedades del contador.

LinkedCell: A13.

Max: 200.

Min: 0.

Cerrar la ventana de Visual Basic para volver a EXCEL.

10. Redefinir la celda B1.

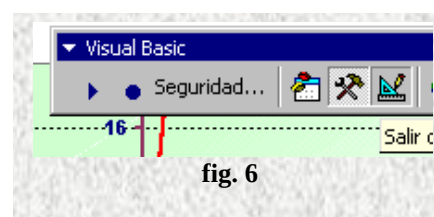
Realizar un cambio de escala en B1 para el contador salte desde -10 hasta +10 con un incremento de 0,1. (B1) = -(A13-100)/10

11. El proceso se repite para los otros dos coeficientes.

12. Para ejecutar el programa es preciso Salir del modo diseño [fig.6].

13. Cuando abramos un Libro de este estilo, EXCEL nos preguntará si deseamos Habilitar macros, a lo que deberemos contestar siempre que Sí.

14. Las únicas celdas que interesa tener visibles son las de la primera fila, así que podemos seleccionar el resto y cambiar su Color de fuente a Blanco para que el usuario no se distraiga con ellas.



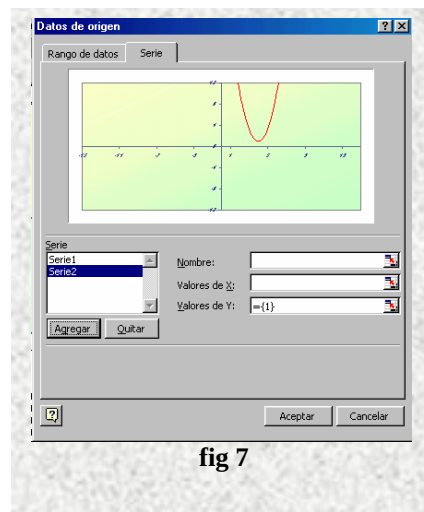
Hojas análogas a ésta pueden elaborarse fácilmente: trigonométricas $y = k \operatorname{sen}(ax) + b$; exponenciales $y = k a^{cx}$; logarítmicas $y = k \log_b(ax)$; hiperbólicas, etc.

No sólo eso. Una vez conseguido un gráfico en Excel con una serie de datos, pueden añadirse más gráficos así [fig7]:

Botón secundario en el gráfico / Datos de origen / Series / Agregar / Seleccionar el bloque para las x's y pegarlo en Valores de X. Lo mismo para las y's / Aceptar

Considerando esta posibilidad, resulta asequible idear hojas que resuelvan gráficamente sistemas de ecuaciones en las que los parámetros puedan cambiar; representación conjunta y móvil de una función con su valor absoluto, con su recíproca, etc.; problemas de programación lineal en los que la recta optimizable se mueva buscando en la frontera de la región factible los valores críticos; rectas tangentes que envuelvan a su curva; distribuciones binomiales que tienden a la normal; etc.

Las posibilidades didácticas que esta herramienta nos ofrece para la clase de Matemáticas son sólo comparables con la capacidad de nuestra imaginación.



La herramienta Solver

La herramienta Buscar Objetivo se utiliza en el caso de que se conozca el resultado deseado de una fórmula, pero no alguna de las variables que lo determinan. Al realizar una búsqueda de objetivo, EXCEL varía el valor de la celda específica hasta que una fórmula dependiente de dicha celda devuelve el resultado requerido. Así, pueden resolverse muchos problemas de tipo inverso cuyo planteamiento clásico comporta una ecuación más o menos complicada.

En esta línea, EXCEL nos ofrece una herramienta más potente aún. Solver. Con Solver puede buscarse el valor óptimo para una celda, denominada celda objetivo, en una HC. Solver funciona en un grupo de celdas que estén relacionadas, directa o indirectamente, con la fórmula de la celda objetivo, ajusta los valores en las celdas cambiantes que se especifiquen, denominadas celdas ajustables, para generar el resultado especificado en la fórmula de la celda objetivo. Pueden aplicarse restricciones para delimitar los valores de las soluciones.

A menudo, se dice, los árboles nos impiden ver el bosque. Frecuentemente, las complicaciones que conllevan el cálculo en la resolución de problemas en el aula de matemáticas hacen que perdamos de vista la esencia del mismo. Solver nos libera de esta carga en problemas como optimización de funciones (de una y varias variables), programación lineal o resolución de sistemas de ecuaciones (complicados o no).

Problemas de optimización pueden plantearse de todo tipo y en todos los niveles. Uno sencillo nos permitirá abordarlo desde tres puntos de vista distintos y nos dará pie a presentar la herramienta Solver.

Partiendo de una chapa cuadrada de una superficie dada, se cortan en los vértices cuatro cuadraditos iguales para, doblando las solapas resultantes, conseguir una caja sin tapa. Calcular el lado del cuadrado que se ha de cortar para conseguir una caja de máximo volumen.

Con la función MAX.

Un acercamiento al problema puede ser construir una tabla de valores con la que se calcula el volumen en función del corte.

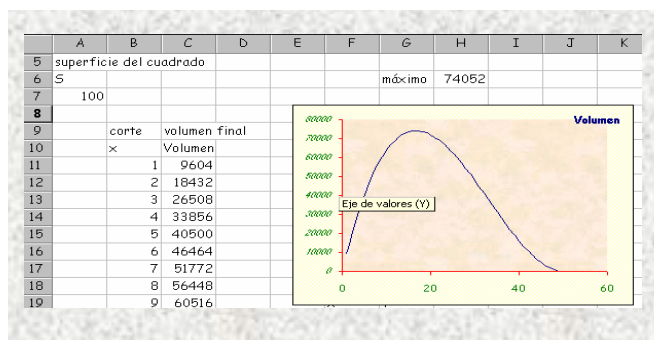
1. Definir la variable S (superficie del cuadrado inicial, que tomamos como 100).
2. Definir el rango x, que será [1,50] con 1 de incremento.
3. Escribir la fórmula del volumen en la celda C11.
4. Hacer el gráfico de la curva.
5. Calcular el máximo con la función MAX [fig8]:

Para que aparezca en pantalla también, al lado del volumen máximo, el valor del corte para el que se alcanza tal valor, procedemos así:

En la columna D resaltamos la fila donde aparece el máximo escribiendo en D11: (D11)=SI(C11=\$H\$6;B11;"").

Y debajo de la celda del volumen máximo, H7, trasladamos el valor de la x: (H7): =MAX(D11:D60).

Se podría mejorar la hoja en el sentido de encontrar la solución con el grado de precisión deseado. Bastaría definir un punto de arranque y un incremento, pero, en este



caso, no nos detendremos en ello porque vamos a conseguir la solución exacta (o casi exacta) con otro método.

Con BUSCAR OBJETIVO

En este caso, esta función no resuelve el problema, pero es útil si se quiere utilizar el método del tanteo [fig9]

x	V			
6,6524	50000			
Función objetivo				
	quiero un volumen de			50000
		x=		6,7

fig 9

Con SOLVER

Si nuestro ordenador no ha utilizado nunca Solver, tendremos que sacarlo de la opción Complementos, en el menú Herramientas.

Planteamos la cuestión:

(F20): =7 (G20): =F20*(S-2*F20)^2 [devuelve 51772]

Seleccionar G20 (celda objetivo) Herramientas / Solyer

Celda objetivo: \$G\$20

Valor de la celda objetivo:

Máximo.

Cambiando las celdas: \$F\$20.

Sujetas a las siguientes restricciones: en este caso, como no hay ninguna, dejar en blanco [fig10]

Se obtiene, en la celda G20, el valor máximo, y en la F20 el corte que se precisa para conseguirlo.

Resolver / Utilizar solución de Solver / Aceptar.



fig 10

Veamos algún problema con restricciones.

Calcular las dimensiones de una lata cilíndrica de 1/3 de litro de volumen para que el coste de la chapa sea mínimo. Suponemos los fondos y el lateral del mismo precio.

1. Definir las variables r (radio de la base) y h (altura). Dar dos valores cualesquiera.

2. Escribir la función que se optimiza: (C9): =2*PI()*r^2+2*PI()*r*h

3. Debajo, la condición:

(C10): =PI()*r^2*h-333

La preparamos para igualarla a cero luego, aunque también podemos igualarla a cualquier otro número.

Seleccionar C9 (celda objetivo) / Herramientas / Solyer.

Celda objetivo: \$C\$9.

Valor de la celda objetivo: Mínimo.

Cambiando las celdas: \$A\$7;\$B\$7.

Sujetas a las siguientes restricciones: \$C\$10=0. [fig11]

Aceptar / Resolver / Utilizar solución de Solver / Aceptar.



fig 11

Se obtiene, en la celda C9, el valor mínimo, en C10 la confirmación de que se ha cumplido la restricción impuesta y en las A7 y B7 los valores idóneos para el radio y la altura.

Si tenemos en cuenta que las restricciones en Solver no sólo admiten igualdades sino también desigualdades, caeremos en la cuenta de que esta herramienta también sirve para resolver problemas de Programación Lineal.

Las posibilidades de Solver no acaban con los problemas de optimización. También podemos abordar complejos sistemas de ecuaciones, distancias mínimas a curvas o superficies, maximización de funciones de varias variables y otros muchos.

PUZZLES LÓGICOS, PROGRAMACIÓN FUNCIONAL.

María del Rosario Muñoz Marín¹ - Blas C. Ruiz Jiménez² - Manuel Ruiz Muñoz³

Resumen

Presentamos un modelo sencillo y elegante para resolver puzzles lógicos del estilo de los analizados por el lógico norteamericano Raymond Smullyan en su célebre libro *¿Cómo se llama este libro?* Mostramos cómo nuestro modelo motiva conjuntamente la enseñanza de la lógica y la programación funcional.

Palabras clave Matemática Recreativa, Puzzles Lógicos, Programación Funcional.

0 Introducción

El presente trabajo debe encuadrarse en la *Matemática Recreativa*, disciplina que incluye puzzles lógicos, acertijos y problemas de ingenio⁴. Matemáticos con aportaciones importantes en esta disciplina son: Martin Gardner (1914-), Douglas Hofstadter (1945-), John Conway (1937-), Charles Dodgson (Lewis Carroll) (1832-1898) y Raymond Smullyan (1919-).

Tradicionalmente la Matemática Recreativa ha sido utilizada con éxito para motivar la enseñanza de la lógica, la aritmética y la geometría elementales⁵; el presente trabajo muestra que un lenguaje funcional moderno como Haskell es un instrumento auxiliar idóneo muy interesante para abordar esta tarea. Así, el principal objetivo del presente trabajo es motivar los principios de la Lógica y de la Programación Funcional vía ejemplos lúdicos.

A tal fin hemos elegido varios puzzles lógicos extraídos del maravilloso libro de Raymond Smullyan [1]. Esto no es una novedad: El propio autor afirma en el prólogo que escribió su libro para motivar el estudio de la lógica. Así, pretendemos ilustrar las características esenciales del lenguaje funcional Haskell (tipificación fuerte, definiciones con patrones, estructuras de datos) y justificar conjuntamente las construcciones esenciales de la lógica y la programación funcional (operadores lógicos, composición de funciones, listas por comprensión). Seguimos además un principio didáctico esencial: Elección de problemas introductorios (puzzles) elementales, no triviales y resolubles usando como instrumentos la lógica y programación básicos.

Clasificación de Puzzles Lógicos Suelen clasificarse en dos grupos: (1) Con frases dependientes (cada frase depende de la anterior) expresadas por oradores *infinitamente* inteligentes y sinceros; ejemplos de éstos son los puzzles con Sombreros o Números en

¹ Dpto. de Matemática Aplicada. Universidad de Málaga. chamuma@ctima.uma.es

² Dpto. de Lenguajes y Ciencias de la Computación. Universidad de Málaga. blas@lcc.uma.es

³ Instituto de ESO Itaca. Villamayor de Santiago (Cuenca). manuel@uma.es

⁴ Es interesante el *Journal of Recreational Mathematics*. <http://www.ashbacher.com/jrecmath.stm>

⁵ Algunas universidades incorporan esta disciplina como asignatura. <http://www.dma.fi.upm.es/docencia/primer ciclo/matrecreativa/>

la Frente (J Conway, M Gardner) [3] y el Problema P-S (H Freudenthal, J McCarthy) [2]. En estos puzzles el problema esencial es modelar el comportamiento inteligente. En el grupo (2) las frases son independientes pero posiblemente falsas dependiendo del orador, del día de la semana, etc.: Problemas de “Alicia en el bosque del olvido”, la colección de Smullyan [1] (El enigma de Drácula, Los Cofres de Porcia). La dificultad esencial de éstos es modelar cada frase junto a su interpretación. En este artículo trataremos problemas del segundo grupo. El lector puede encontrar ejemplos del primer grupo resueltos en Haskell en [2].

1 Alicia en el Bosque del Olvido

Alicia, al entrar en el bosque, olvida entre otras cosas el día de la semana. En el bosque viven dos curiosos personajes, que por ser gemelos son indistinguibles: Leo, que miente los Lunes, Martes y Miércoles, y Uni, que miente los Jueves, Viernes y Sábados (Leo y Uni son los personajes Tweedledum y Tweedledee del original de Smullyan). Resolveremos en este artículo los problemas que siguen, con la numeración del original [1] y redactados con ligeras modificaciones:

Problema 51 Alicia escucha la siguiente conversación entre estos personajes:

A.— Yo soy Leo.

B.— Yo soy Uni.

¿Quiénes eran cada uno?

Problema 62 El Rey encuentra el sonajero que rompieron los gemelos y Alicia debe entregárselo a su propietario. Tras adentrarse en el bosque se encuentra con los gemelos:

Alicia (dirigiéndose a A). — ¿Es tuyo este sonajero?

A.— Sí.

Alicia, tras un momento pensativa, dirigiéndose a B.— ¿Es tuyo este sonajero?

B, susurrándole al oído. — ...

No se escuchó la respuesta, aunque fue, o bien Sí, o bien No. Después de escuchar la respuesta, Alicia adivinó su propietario. ¿A quién dio el sonajero?

Problema 65 El Rey le contó a Alicia que los gemelos podían tener un hermano (Duendi) idéntico a ellos, aunque siempre miente. Alicia escucha durante un día laborable:

A. — Duendi existe.

B. — Y yo también.

¿Existe realmente Duendi?

2 El Bosque en Haskell

Presentemos un modelo en Haskell para la descripción de diálogos. Por problemas de espacio no podemos en este artículo dar una visión ni siquiera corta de este lenguaje funcional y nos centraremos en detalles esenciales. Recomendamos para ello *Una introducción agradable a Haskell*⁶ y el texto [2]. Partimos pues de la siguientes declaraciones para representar el universo del discurso:

⁶ <http://www.lcc.uma.es/~blas/pfHaskell/gentle/>

data Día = L | M | X | J | V | S | D deriving (Eq,Show,Enum)
data Habitante = Leo | Uni | Duendi deriving (Eq,Show,Enum)

Una frase del diálogo será una función booleana con tipo:

type Frase u = u → Bool

donde u representa cada posibilidad del problema, que dependerá del universo del discurso. Por ejemplo, en el problema 51 cada frase será del tipo *Frase* (*Habitante, Habitante, Día*), y asignará un booleano a cada terna (a, b, d) , donde a representa el primer personaje, b el segundo, y d el día de la semana. Además, una frase debe ser interpretada dependiendo de un par del tipo (*Habitante, Día*): La interpretación es función de la persona que enuncia la frase y del día de la semana. La interpretación la haremos con la función:

interpreta :: Frase a → (Habitante, Día) → Frase a

Así, si p dice la frase f el día de la semana d , entonces la expresión *interpreta* f (p, d) es la “afirmación verdadera” que hace p . Para nuestros personajes tendremos

interpreta f (Leo, d) = if d `elem` [L, M, X] then not . f else f
interpreta f (Uni, d) = if d `elem` [J, V, S] then not . f else f
interpreta f (Duendi, d) = not . f -- Duendi siempre miente

donde $x \text{ `elem` } xs$ es el test de pertenencia y $f . g$ representa la composición de funciones. El problema 51 queda resuelto vía listas (o conjuntos) por comprensión:

sol51 = [(a, b, d) | (a, b) ∈ [(Leo, Uni), (Uni, Leo)],
d ∈ [L .. D],
interpreta f (a, d) (a, b, d),
interpreta g (b, d) (a, b, d)]

where

f (a, b, d) = a == Leo -- A.- Yo soy Leo.
g (a, b, d) = b == Uni -- B.- Yo soy Uni.

La función *sol51* devuelve en forma de lista un conjunto de ternas con tipo (*Habitante, Habitante, Día*). La terna (a, b, d) será un elemento de ésta si el par (a, b) es o bien (*Uni, Leo*) o bien (*Leo, Uni*), d es un día de la semana, y además, son ciertos los valores de cada frase una vez interpretadas. Debido a la asociatividad a la izquierda de la aplicación, la expresión *interpreta* f (a, d) (a, b, d) debe leerse: El valor que toma el predicado *interpreta* f (a, d) para la terna (a, b, d) . Por todo ello, nuestro programa “computa todas las combinaciones de personajes cuyas afirmaciones son ciertas”. Resaltemos la forma tan simple de describir las frases: La frase de A “Yo soy Leo” se representa vía el predicado $a == \text{Leo}$, siendo $==$ el operador de igualdad. La ejecución produce el siguiente diálogo:

ElBosqueDelOlvido > sol51
[(Leo, Uni, D)]

La lista solución obtenida tiene una sola posibilidad, y esto ¡es una demostración! de

que el diálogo solamente puede ocurrir si A es Leo, B es Uni, y el día es Domingo.

Veamos ahora cómo resolver el problema 62. Para ello necesitamos añadir al universo del discurso como nuevo dato el propietario del sonajero:

```
sol62 res = [ cf | a ∈ [Leo,Uni], b ∈ [Leo,Uni], a≠b,
                  prop ∈ [Leo,Uni], d ∈ [L .. D],
                  let cf=(a,b,prop,d),
                  interpreta f (a,d) cf,
                  interpreta g (b,d) cf ]
where
  f (a,b,prop,d) = prop == a -- A.-El sonajero es mío.
  g (a,b,prop,d) = prop == if res then b else a
```

Recordemos que no se escuchó la respuesta, pero fue Cierto o Falso y con ésta Alicia dedujo su propietario. Por ello *sol62* depende de esta respuesta *res*, y obviamente también el predicado *g* de la segunda frase. Si ejecutamos el programa obtenemos:

```
ElBosqueDelOlvido> sol62 True
[(Leo,Uni,Leo,J),...,(Leo,Uni,Uni,L),...,(Uni,Leo,Uni,X)]
```

Vemos que la respuesta Sí (*True*) existen casos donde el propietario (3ª componente) es el primer orador o el segundo. Luego, ya que Alicia adivinó su propietario, la respuesta no pudo ser Sí. Por otro lado:

```
ElBosqueDelOlvido> sol62 False
[(Leo,Uni,Leo,D),(Uni,Leo,Uni,D)]
```

y observamos que la primera y la tercera componentes son iguales. Luego la respuesta fue No y el propietario del sonajero es el primer personaje. Curiosamente, al igual que Alicia, no sabremos si el propietario es Leo o Uni, pero sí que es Domingo.

Veamos ahora el problema 65. Como observa Smullyan, la segunda afirmación siempre es verdadera (à la Descartes: ¡Hablo, luego existo!). Como B es sincero, y Duendi siempre miente, B no puede ser Duendi. Ya que el día es laborable (no es Domingo), A no puede ser Duendi. Luego Duendi no interviene, ambas afirmaciones la hacen Uni y Leo, y solamente pueden ser ciertas el Domingo. Y ya que no es Domingo, la primera afirmación es falsa y Duendi no existe. ¿Podemos llegar a esta conclusión a través de un programa en Haskell? Veamos cómo. La traducción de la segunda frase es trivial y la principal dificultad es programar la frase “Duendi existe”. Para ello introducimos en el universo del discurso un nuevo valor booleano que capture la existencia de Duendi:

```
data EstadoDuendi = Existe | NoExiste deriving (Eq,Show)
sol65= [ cf | (a,b) ∈ [Leo .. Duendi] `x` [Leo .. Duendi], a≠b,
              d ∈ [L .. S], -- el día es laborable
              duendi ∈ [Existe,NoExiste],
              let cf=(a,b,duendi,d),
              interpreta f (a,d) cf,
              interpreta g (b,d) cf ]
```

where

$f(a,b,duendi,d) = duendi == Existe \text{ -- } A.- \text{ Duendi existe.}$
 $g(a,b,duendi,d) = True \text{ -- } B.- \text{ Y yo también.}$

Si ejecutamos el programa obtenemos:

ElBosqueDelOlvido > sol65
[(Leo,Uni,NoExiste,L),(Leo,Uni,NoExiste,M), ..., (Duendi,Uni,NoExiste,X)]

¡y vemos que la 3ª componente siempre es NoExiste!

Para finalizar debemos añadir que el modelo aquí expuesto es suficientemente general y ha sido utilizado para resolver la colección de problemas de [1]. El lector interesado puede solicitar a alguno de los autores los programas Haskell.

Referencias

- [1] Raymond Smullyan. *¿Cómo se llama este libro? El enigma de Drácula y otros pasatiempos lógicos*. Cátedra (1984).
- [2] Blas Ruiz et al. *Razonando con Haskell. Un curso sobre Programación Funcional*. Thomson (2004).
- [3] Martin Gardner. *Inspiración ¡Ajá!* Labor (1981).

EL LÍMITE DEL BIEN. EL LÍMITE DEL MAL.

Sonsoles Blázquez

Nora Gatica

Tomás Ortega.

CFIE Valladolid I

Universidad de San Luis
Argentina

Universidad de Valladolid

Resumen

El taller que se propone pretende trabajar el concepto de límite funcional desde una nueva perspectiva que evita el formalismo sin perder el rigor que hace de dicho concepto la herramienta base del análisis. Esta conceptualización es útil para la enseñanza del límite en bachillerato y primeros cursos universitarios. Se presenta la base teórica del taller después de describir brevemente las actividades o tareas que servirán para desarrollar dicho taller, y se concluye con una reflexión sobre las ventajas e inconvenientes de trabajar con esta conceptualización.

1. LAS TAREAS

Se propone un trabajo con el concepto de límite como aproximación óptima a través de las siguientes tareas (se especifica la duración aproximada):

- 1º) Un pequeño test de “completar huecos” en el ordenador para reflexionar sobre los contenidos relacionados con el apartado de aproximación. Breve exposición de los asistentes sobre la enseñanza de estos contenidos en el aula. Duración: 15 minutos.
- 2º) Utilización del applet *Descartes* para explicar de forma interactiva la idea de tendencia y la conceptualización de límite como aproximación óptima. Se puede establecer un pequeño debate en torno a las dificultades de comprensión de esta conceptualización y de sus posibles ventajas respecto a la métrica. Duración: 1 hora.
- 3º) Propuesta de demostración, por grupos, de alguna propiedad utilizando dicha conceptualización y compararla con la demostración utilizando la conceptualización métrica-formal. Visualización de algunas de esas propiedades con *Descartes*. Duración: 30 minutos.
- 4º) Presentación de un esquema para reflexionar sobre la enseñanza del límite para debatir brevemente. Duración: 15 minutos.

2. BASES TEÓRICAS.

Se considera la recta real con la métrica usual y que en todo entorno del punto donde se define el límite y del propio límite existan puntos del conjunto donde se estudian dichos límites. En el primer caso es necesario, además, que esos puntos sean distintos del punto en el que se define el límite. No se hará mención específica a esta pertenencia en los enunciados.

2.1. APROXIMACIÓN

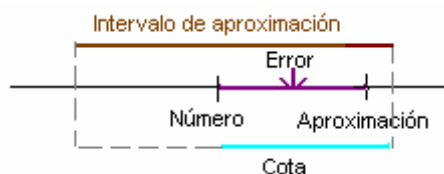
Una *aproximación* de un número L es otro número A que se utiliza en lugar del primero para simplificar operaciones o representaciones, por desconocimiento del primero, etc. Si la aproximación es mayor que el número se llama *aproximación por exceso* y si es menor que el número *aproximación por defecto*.

Hay muchas aproximaciones de un mismo número (de hecho, cualquier otro número puede funcionar como una aproximación), pero no pueden ser todas iguales. Nos

interesa entonces compararlas de alguna manera. Se llama *error absoluto* de la aproximación a la diferencia entre el valor exacto y el aproximado, restando siempre al mayor el menor. Así, una aproximación será mejor que otra cuando el error absoluto cometido sea menor.

Ahora bien, como los errores son muchas veces difíciles de calcular o incluso imposibles de calcular (en el caso de aproximación de números irracionales), se suele trabajar con un número cercano al error y “un poco” mayor que él, que se denomina cota de error, y que viene a establecer un tope. Una buena cota será aquella que se aproxime al error suficientemente y que tenga también una expresión sencilla.

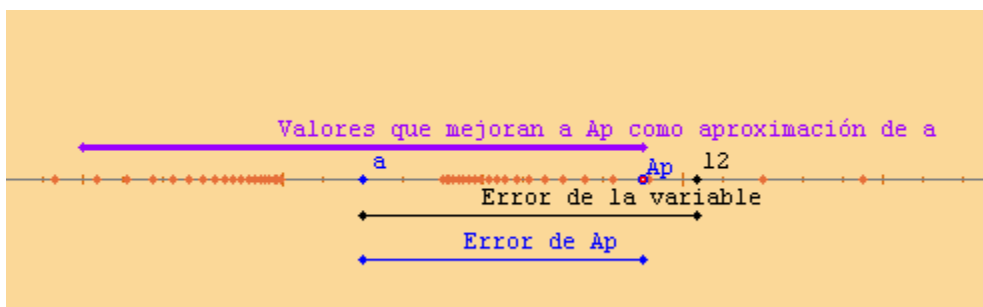
La cota define a su vez un *intervalo de proximidad* de un número, ya que todos aquellos valores cuyo error absoluto respecto a un número es menor que una determinada cota forman un intervalo centrado en dicho número y distancia a los extremos igual a la cota.



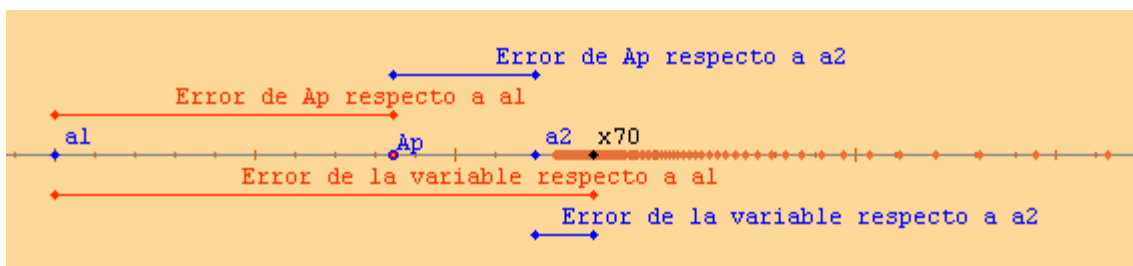
2.2. APROXIMACIÓN ÓPTIMA Y TENDENCIA

Cuando se pretende analizar hasta qué punto los valores que puede tomar una variable se aproximan a un valor dado, surge un proceso dinámico que se conoce con el nombre de tendencia y que debe ser precisado.

Considerando que a es un número real cualquiera, la variable x tiende a a si cualquier aproximación Ap de a , y distinta de a , se puede mejorar con todos los valores de la variable x que se encuentran dentro de un determinado entorno de a .



Es evidente que el concepto de tendencia es dinámico, y que cuando x tiende a a se puede considerar que a es la aproximación óptima de x en esa tendencia, ya que cualquier otra aproximación de x a a , distinta de a , se puede mejorar. En el gráfico siguiente $a1$ y $a2$ son aproximaciones de x pero la variable se aproxima más a $a2$ que la aproximación Ap (cualquiera que sea Ap) y, sin embargo, no se aproxima tanto a $a1$ como lo hace Ap . De hecho la variable se aproxima a muchos valores pero sólo tiende a uno, al que llamamos aproximación óptima.



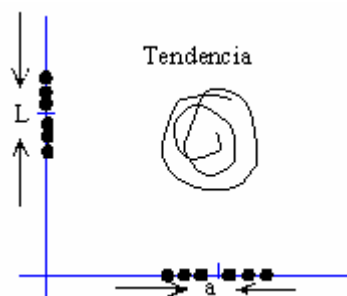
2.3. CONCEPTUALIZACIONES

A continuación se enuncian tres conceptualizaciones del límite de la función en un punto que, en realidad, sólo difieren en el formalismo de su escritura:

Como tendencia:

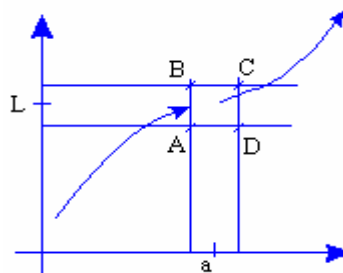
La función $y=f(x)$ tiene límite L en el punto $x=a$ si cuando x tiende a a entonces $f(x)$ tiende a L .

Conforme la x tiende a a , sus imágenes, $f(x)$, se van acercando⁷ a L y mejoran cualquier aproximación prefijada.



Como aproximación óptima: La función $y=f(x)$ tiene límite L en el punto $x=a$ si para cualquier aproximación, H , de L , existe un entorno reducido de a , $(a-d, a+d)^*$, tal que todas las imágenes de este entorno mejoran la aproximación fijada.

En el sistema de representación gráfica, esta conceptualización equivale a decir que existe un entorno reducido de a en el que la gráfica de la función tiene que entrar forzosamente por el lateral AB y salir exclusivamente por el lateral CD . Más importante que representar la gráfica de la función, que no es necesaria, es representar la condición.



Métrica: La función $y=f(x)$ tiene límite L en el punto a si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$

2.4. PROPIEDADES.

Vamos a demostrar ahora algunas propiedades utilizando la conceptualización de límite como aproximación óptima.

TEOREMA DE UNICIDAD: Si el límite de la función en un punto existe, es único.

Supongamos que existen dos valores para el límite, $L1$ y $L2$ y sea M un valor comprendido entre los dos, que tomamos como aproximación de ambos. Si se aplica la definición de límite, existirá un entorno reducido del punto tal que sus imágenes se encuentren más cerca de $L1$ que M y otro entorno tal que sus imágenes se encuentren más cerca de $L2$ que M . Los puntos del entorno intersección cumplen las dos condiciones, que son incompatibles como se observa en el siguiente gráfico, de donde se deduce la imposibilidad de que ambos sean límites de la función en el punto.

⁷ No tiene por qué ser un acercamiento monótono.



TEOREMAS DE ACOTACIÓN Y DEL SIGNO

- a) Si el límite, L , de la función en un punto $x=a$ es menor (mayor) que un número p , existe un entorno de dicho punto en el que la función es menor (mayor) que p . Tomamos p como aproximación de L , y aplicando la definición existirá un entorno reducido de a tal que la imagen de todos sus puntos mejoren dicha aproximación y, por tanto, la función es menor (mayor) que p en dicho entorno (ver gráficos siguientes).



- b) Si el límite, L , de la función en un punto $x=a$ es positivo (negativo), existe un entorno de dicho punto en el que la función es positiva (negativa). Es un caso particular del teorema anterior con $p=0$.
- c) Si una función es menor (mayor) que un número p en un entorno de $x=a$, su límite, L , en $x=a$ es menor o igual (mayor o igual) que un número p . Si el límite, L , fuese mayor que p (menor que p), existiría un entorno reducido de $x=a$ en el que la función sería también mayor que p (menor que p), en contra de la hipótesis.
- d) Si una función es positiva (negativa) en un entorno de $x=a$, su límite, L , en $x=a$ es mayor o igual que cero (menor o igual que cero). Es un caso particular del anterior.
- e) Toda función con límite en a está acotada en un entorno reducido del punto $x=a$. Se deduce de aplicar los dos casos del teorema del apartado c) tomando dos cotas del límite cualesquiera.

TEOREMA DEL ENCAJE: Si $y=f(x)$, $y=g(x)$ e $y=h(x)$ son tres funciones tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un entorno reducido de $x=a$. Si $y=f(x)$ e $y=h(x)$ tienen límite L en $x=a$, entonces $y=g(x)$ tiene límite en $x=a$ y su valor es L . Fijada una aproximación, A , del número L , al ser éste el límite de h y de f en $x=a$ existen sendos entornos reducidos de a tales que las imágenes respectivas de $h(x)$ están más cerca de L que A y las de $f(x)$ está más cerca de L que A . Tomando el entorno intersección se cumplen ambas condiciones, lo que obliga a que $g(x)$ esté más cerca de L que A ya que está entre $f(x)$ y $h(x)$.

TEOREMAS INFINITESIMALES

A las funciones que tienen límite cero en $x=a$ se las denomina *funciones infinitesimales* en $x=a$. Para estas funciones, fijada una aproximación de 0 , existe un entorno reducido de a tal que la imagen de todos sus puntos mejora dicha aproximación.

- a) El límite de la función $y=f(x)$, en $x=a$, es L si, y sólo si, $o(x)=f(x)-L$ es una función que tiene límite cero en $x=a$ (equivale a que $f(x)$ es la suma de L y una función infinitesimal). La demostración es evidente porque restar o sumar L a una función equivale a trasladar sus valores en la recta llevando L a 0 y viceversa.



- b) La suma de dos funciones infinitesimales $u(x)$ y $v(x)$ es otra función infinitesimal. Si se toma una aproximación A de cero existirá un entorno reducido en el que $u(x)$ esté más cerca de cero que $A/2$ y otro en el que lo esté $v(x)$. Tomando la intersección de los dos tanto $u(x)$ como $v(x)$ están más cerca de cero que $A/2$ y su suma $u(x)+v(x)$ estará más cerca de cero que A .
- c) El producto de una constante, K , por una función infinitesimal en $x=a$, $y=o(x)$, es otra función infinitesimal $y=K \cdot o(x)$. Considerando una aproximación arbitraria, A , de cero, A/K es otra aproximación de cero, y, por ser $y=o(x)$ una función infinitesimal en $x=a$, existe un entorno reducido de a , E_a , tal que todas sus imágenes están más próximas a cero que A/K y, por tanto, las imágenes de E_a por la función producto $y=K \cdot o(x)$ estarán mas próximas a cero que A .
- d) El producto de dos funciones infinitesimales $u(x)$ y $v(x)$ es otra función infinitesimal. Si se considera $\frac{1}{2}$ como aproximación a cero es claro que en un entorno reducido del punto a la función $u(x)$ estará más cerca de cero que $\frac{1}{2}$ y la función producto se aproxima a cero “más deprisa” que $v(x)$ (es menor en valor absoluto). Así, para cualquier aproximación K de cero, existe un entorno reducido de a , tal que $v(x)$ está más cerca de cero que K , y tomando la intersección de este entorno y el anterior las imágenes del producto están más cerca de cero que $v(x)$ y por tanto que K .
- e) e) Si $y=o(x)$ una función infinitesimal en $x=a$, $y=o(x)/$ es otra función infinitesimal en $x=a$. La prueba es evidente, ya que es válida la misma aproximación y entorno reducido de la función $y=o(x)$.
- f) f) El producto de una función acotada, $u(x)$, y un infinitesimal, $v(x)$, es también un infinitesimal. Podemos aplicar el teorema del encaje al producto $u(x)v(x)$ acotando dicha función por las funciones $-M|v(x)|$ y $M|v(x)|$, siendo M una cota de $u(x)$, que son también infinitesimales por c) y e).

TEOREMAS SOBRE ARITMÉTICA DE LÍMITES

Habiendo trabajado con infinitésimos las demostraciones de los teoremas de aritmética de límites son más sencillos.

LÍMITE DE UNA SUMA/RESTA: Considerando que $y=f(x)$ e $y=g(x)$ son dos funciones tales que sus límites respectivos en $x=a$ son H y K , el límite de la función $y=(f+g)(x)$ en $x=a$ es $H+K$ (Idem para la resta). Tomando los infinitesimales $f(x)-H$ y $g(x)-K$ y aplicando el teorema (b) es evidente que $(f(x)-H)+(g(x)-K)=(f(x)+g(x))-(H+K)=(f+g)(x)-(H+K)$ es un infinitesimal y, por tanto, el límite de $f+g$ es $H+K$ (Idem para la resta).

LÍMITE DE UN PRODUCTO: Considerando que $y=f(x)$ e $y=g(x)$ son dos funciones tales que sus límites respectivos en $x=a$ son H y K , el límite de la función $y=(f \cdot g)(x)$ en

$x=a$ es HK . Es evidente que en un entorno reducido de $x=a$ se puede considerar que $f(x)=H+o_1(x)$ y que $g(x)=K+o_2(x)$, siendo $o_1(x)$ y $o_2(x)$ funciones infinitesimales en $x=a$. Por otra parte, $(f \cdot g)(x) - HK = f(x) \cdot g(x) - HK = HK + K \cdot o_1(x) + H \cdot o_2(x) + o_1(x) \cdot o_2(x) - HK = K \cdot o_1(x) + H \cdot o_2(x) + o_1(x) \cdot o_2(x)$. Aplicando los resultados c), d) y el teorema anterior se obtiene el enunciado.

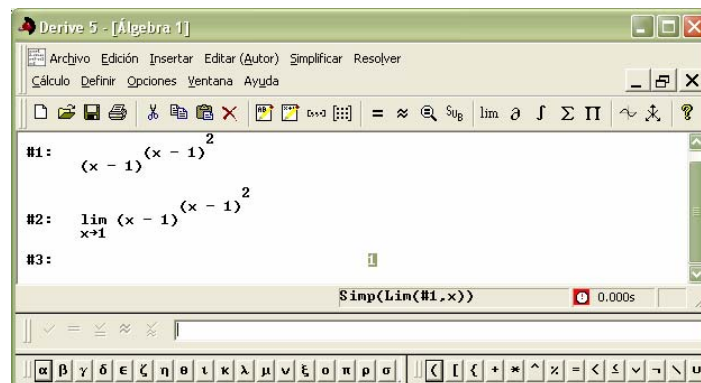
LÍMITE DEL COCIENTE: Considerando que $y=f(x)$ e $y=g(x)$ son dos funciones tales que sus límites respectivos en $x=a$ son H y K , K distinto de cero, el límite de la función $y=(f/g)(x)$ en $x=a$ es H/K . Teniendo en cuenta que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \frac{H}{K} = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{H}{K} = \frac{Kf(x) - Hg(x)}{Kg(x)} = -\frac{K(f(x) - H) - H(g(x) - K)}{Kg(x)} = \frac{1}{Kg(x)} o(x)$$

donde $o(x)$ es un infinitesimal por los resultados a, c y b anteriores, y que la función $1/Kg(x)$ está acotada por estarlo $g(x)$, y por tanto $Kg(x)$, y no anularse esta función en un entorno reducido de a (puesto que K es distinto de cero y lo será la función $g(x)$ que tiende a K), tenemos el producto de un infinitesimal por una función acotada, cuyo resultado es también un infinitesimal por el resultado f).

¿Y EL CÁLCULO DE LÍMITES?

Algunos límites son sencillos de calcular aunque involucren aritmética infinita o indeterminaciones. Por ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x + 5) = 5$. Sin embargo, el empleo de excesivo tiempo para el cálculo de límites no está justificado ya que con determinado software, como puede ser *Derive*, se pueden resolver fácilmente.



3. REFLEXIÓN

El límite del bien	El límite del mal
Aproximación óptima	Definición métrica.
Definición métrica sólo si se quiere	Trabajar exclusivamente el registro simbólico.
Controlar errores	El exceso de formalismo (producto, cociente)
Trabajar el concepto	Cálculo de límites a discreción.
Cálculo de límites sencillos	Prescindir de software
Utilizar <i>Derive</i> para cálculos complicados	

JUGAR CON LAS MATEMÁTICAS

Manuel Díaz Regueiro

IES Xoán Montes. Lugo

Resumen

Con el objetivo de crear un entorno de aprendizaje en el que se favorezcan los procesos de construcción matemática, se elaboró un programa, **Matemáticas 3º de ESO CDRom**, en el que se prima especialmente la dimensión lúdica.

Contiene gran número de juegos de base matemática, antiguos como el *wari* o modernos como el *Hex*; otros, como el *laberinto* o el *puzzle de triángulos*, son adaptaciones de juegos de mesa, pero en el programa se convierten en juegos múltiples por la posibilidad de cambio. La mayoría de los apartados no considerados estrictamente como juegos poseen una dimensión lúdica. Así, con *mosaicos hexagonales* o *nudos celtas* se juega a componer mosaicos sencillos, *caleidoscopio* permite buscar un polígono que con un par de espejos nos dé la figura más bonita, etc.

Otras actividades propuestas integran una componente de desafío que hace que el alumno pueda disfrutar jugando *de y con* las matemáticas sin que, por ello, se excluyan ejercicios de polinomios, ecuaciones de segundo grado, sucesiones,..., siguiendo el currículo del curso.

Todo esto en un programa en el que los objetos de estudio se convierten en objetos de experimentación y diversión, presentándolos en contextos diferentes, unas veces inesperados, otras intrigantes y otras adictivos.

La enseñanza de las matemáticas se planifica habitualmente sin tener en cuenta la componente de gratificación en el aprendizaje. Cuando los alumnos nos preguntan cuándo y cómo se utilizan algunos contenidos, solemos dar respuestas vagas... En física... ya lo veréis... más adelante..., algo que contradice el sentido del tiempo de los adolescentes, que viven el aquí y el ahora.

En nuestra intervención en el aula no debemos olvidar que los estudiantes necesitan motivación, tiempo de consolidación de los conocimientos y experimentación en contextos diferentes.

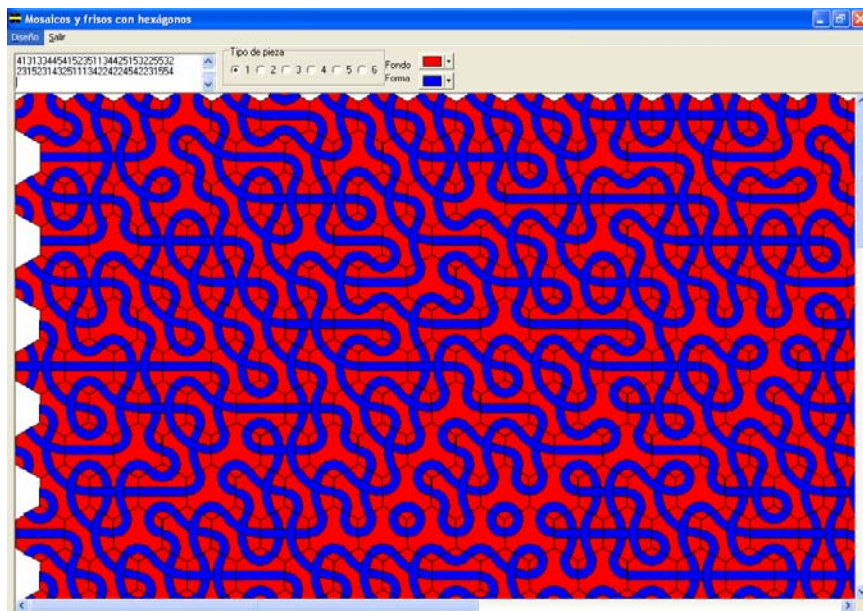
La humanidad construye las matemáticas mediante un proceso de búsqueda y de experimentación, de ensayo y error. Se elaboran de modo inductivo, probando, experimentando el “qué pasa si” y sólo cuando la experiencia acumulada es importante se aplica la deducción. Nosotros tratamos de acelerar ese proceso histórico por medio de reglas y deducciones que se convierten muchas veces para los alumnos en una colección desordenada de técnicas, trucos y algoritmos “ad hoc”.

El programa que se ofrece, Matemáticas 3º de ESO, destinado fundamentalmente al profesorado y alumnado de tercer curso de la educación secundaria obligatoria (14-15 años), utiliza las posibilidades que brindan las tecnologías de la información y

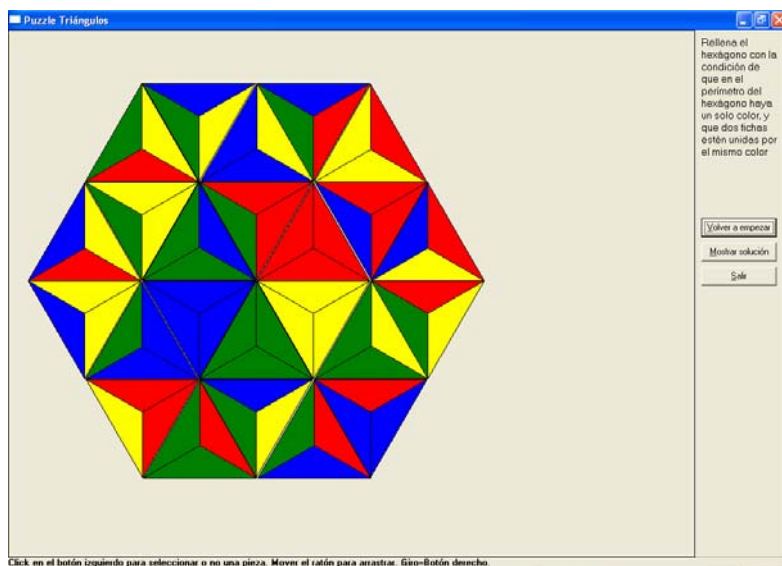
comunicación para facilitar el proceso de aprendizaje de las matemáticas y la intervención en el aula. Es un programa que permite la experimentación de las matemáticas -el estudiante puede practicarlas el tiempo que necesite, porque siempre puede encontrar numerosos ejercicios que le permiten ahondar sobre varios aspectos de un mismo tema. Aporta un contexto informático que propicia la motivación del estudiante al presentarlo como un juego, a veces simulado y estrictamente curricular, a veces curricular de forma indirecta y a veces directamente lúdico.

Al igual que en la propuesta que se realiza para el primer y segundo curso de esta etapa, se pretende hacer tangibles los objetos abstractos, convertirlos en objetos de experiencia. Para ello se utiliza el recurso de las representaciones y animaciones, como por ejemplo, en el apartado *Visualizaciones de álgebra*.

Pero es en *Geometría* donde más aplastante es su eficacia. La imagen permite que el alumno visualice los conceptos abstractos y que los manipule mediante cambios en las variables implícitas subyacentes. Abundan las figuras con puntos clave que pueden ser arrastrados y figuras manipulables, y ello hace posible la exploración en dominios antes inaccesibles al estudiante. Es él el que puede llegar a conclusiones experimentando con objetos matemáticos y observando cómo responden sus múltiples opciones: visualizaciones del teorema de Pitágoras en formato tangram, de las propiedades de puntos y rectas notables de un triángulo, de proporcionalidad y semejanza. Se trabaja con mosaicos regulares y semirregulares y es factible teselar el plano con piezas de diseño, crear frisos o recrearse en nudos celtas. También se hace posible la manipulación de objetos en el plano con movimientos de traslación, simetría, giros, etc. e, incluso, variar la orientación y posición de cuerpos geométricos tridimensionales sencillos.



Una buena guía a este módulo del programa es el libro de Bob Ives Pavimentar com ladrilhos, publicado por la APM, (Using Tiling generators in School, es el título original del libro publicado por la ATM inglesa)



“Los juegos están entre las creaciones más interesantes de la mente humana y el análisis de su estructura está llena de aventuras y sorpresas.”

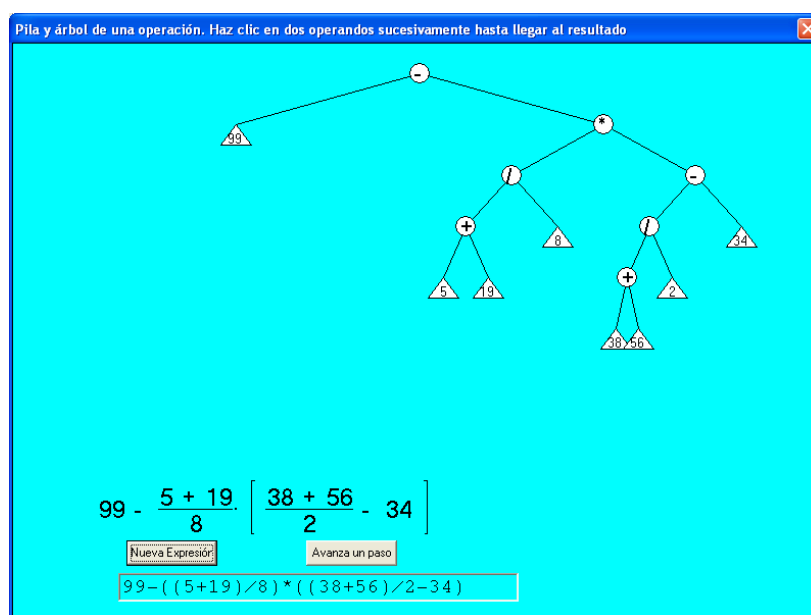
James R. Newman. *El mundo de las matemáticas*.

En el apartado de *funciones* se implementan informáticamente ejemplos de lecturas de gráficas e interpretación de funciones, dando un especial relieve a las funciones lineal, afín y cuadrática de la que se presentan ejercicios visuales.

Simulaciones como la palanca permiten descubrir como funciona, no solo cuantitativamente, que también, sino incluso cualitativamente. El alumno puede predecir en qué marca ha de colocar el fulcro para que la palanca se equilibre probablemente sin cálculos, sino a través de la intuición. Así está aprendiendo no solo a decir la ley, sino experimentando, “sintiendo” su efecto: Los pesos mayores han de estar más distantes del fulcro que los menores,...

Comparar las gráficas y sus fórmulas se convierte en un método de experimentación que va más allá del hecho de dar la solución exacta a un problema. El alumno debe desarrollar estrategias de reconocimiento de gráficas y asociarlas a las fórmulas. Implícitamente ha de hacer consideraciones y cálculos de pendientes, de su signo, de la importancia del coeficiente de x^2 en una ecuación de segundo grado, etc. Tras una serie de ejercicios, y en un tiempo mucho más breve que si los hace con lápiz y papel, consigue determinar las reglas que le harán llegar a la conclusión. El programa se presenta como un juego de experimentación en el que hay que pensar, redescubrir las reglas del juego y ese proceso puede ser potenciado mediante el apoyo y orientación del profesor, con la posibilidad de individualizar para cada alumno el tipo de ejercicios que más le conviene.

En otras partes del programa aparecen algoritmos informáticos clásicos, como la *pila* y *árbol de una operación*, pero en un contexto visual nuevo o cuando menos poco conocido. Jugar con esta parte del programa implica aceptar que las operaciones no tienen la misma prioridad; que una lectura lineal, unidimensional, no es la adecuada y sí en cambio una lectura en árbol en la que se deben realizar las operaciones comenzando por las “hojas”. Estoy seguro de que jugar con esta opción agilizará la interiorización de la prioridad de las operaciones como se pretende.



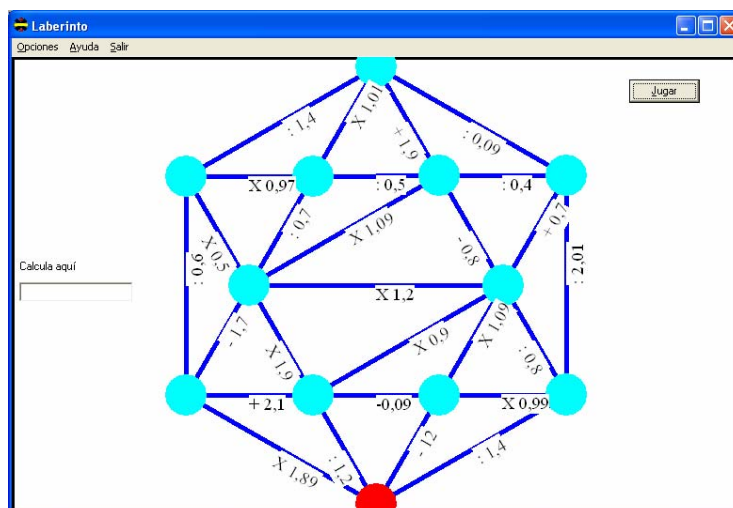
Esto mismo es válido para el *árbol de las ecuaciones de primer grado* – en este caso ni siquiera la implementación informática es clásica o conocida- donde se profundiza en la necesidad de calcular un número que permita pasar de una ecuación con denominadores a otra sin ellos. Hasta tal punto esta visualización es importante que en la *resolución de ecuaciones de primer grado* es posible ver los pasos necesarios para llegar a la solución utilizando, en el fondo, el algoritmo del árbol de las ecuaciones de primer grado.

Esta es otra de las aportaciones interesantes del programa pues hay varios programas que resuelven ecuaciones de primer grado pero ninguno – que yo conozca- que lo explique paso a paso.

En resumen, se aporta un apoyo visual y experimental, casi físico, a los contenidos matemáticos de esta etapa escolar. Si en la etapa de primaria es fácil encontrar una apoyatura física en objetos reales, en cuanto avanzamos en la edad escolar, es mucho más complicado; pero el ordenador nos permite sustituirlos por objetos virtuales que cumplen una función semejante. Estos “manipulables virtuales” interactivos crean un ambiente matemático rico en el que encuentran, representan, experimentan y razonan sobre ideas matemáticas. Observando cómo los objetos se manipulan, arrastran y distorsionan en la pantalla comienzan a aprender cómo realizar en sus mentes los mismos experimentos.

Se incluyen una serie de juegos con un gran potencial educativo. Una versión del familiar juego de los barcos, *batalla naval*, promueve la utilización de las coordenadas para la localización, *puzzle de triángulos* acerca al alumno a los mosaicos y la combinatoria. En *Poliminós* se exploran sus posibilidades geométricas. En *Paridad* se juega con monedas y vasos estudiando las operaciones y conservación de la paridad. Es decir, el programa es, además de un medio de hacer explícitas las soluciones de un problema, un escenario de presentación de nuevos interrogantes y problemas, algunos de ellos nunca planteados previamente.

Además de realizar aportaciones, el programa se apoya en la literatura existente sobre didáctica de las matemáticas. Así, el *laberinto* recoge la idea del libro de César de Sá “A aprendizagem da Matemática e o Jogo”, editado por la APM; *funciones* le debe mucho al libro “El lenguaje de funciones y gráficas” del Shell Center, y en otros apartados se utilizan ideas de varias aplicaciones informáticas que se enriquecen para abrir nuevas perspectivas y enfoques.



Detengámonos por un momento en el *laberinto* y observemos alguna de las diferencias con su presentación sobre un tablero.

-Deja de ser estático. Se pueden variar las cantidades y su colocación, o se presenta la opción de un laberinto de fracciones en donde la demanda cognitiva se aumenta al ser necesario reconocer, al menos de una forma aproximada, el valor decimal de cada fracción.

-El hecho de que el ordenador puntúa –y esa fue la parte más difícil de crear- dándonos el % de caminos que tienen menor o igual puntuación que la conseguida. Así, el alumno tiene un feedback inmediato sobre el nivel alcanzado y una puntuación media de los niveles pasados.

-La rapidez con la que se llega a conclusiones. Es un juego en el que por simple observación se van interiorizando en el alumno propiedades y resultados que de otra manera quedan aislados y sin contexto; por ejemplo, el efecto de multiplicar o dividir por un número menor que la unidad.

En otros muchos apartados también se promueve el afianzamiento de las destrezas del cálculo numérico con nuevos modelos de ejercicios, tanto en su presentación como en la comunicación de la solución, de manera que se mantenga el interés y la motivación. También se da continuidad a las tareas de familiarización con la codificación –como códigos de encriptación tipo Cesar, Vigniere- y, reitero, se brinda un número ilimitado de ejercicios, que buscan el refuerzo y consolidación de los aprendizajes en la mayoría de los apartados que plantea el diseño curricular de matemáticas del tercer curso de enseñanza secundaria obligatoria.

Las actividades mantienen la posibilidad de elegir el nivel de dificultad y de solicitar ayuda para mostrar el proceso de resolución. También cabe resaltar que se implementa una cierta vigilancia de las actividades desarrolladas por el alumno en su periplo a través del programa, de tal manera que el profesorado o los padres pueden saber de qué tipo y cuántos ejercicios ha realizado el alumno.

Es el momento de recordar una cita de Euler en “Matemáticas y razonamiento plausible” de Polya, en la que nos recuerda que no es posible conseguir resultados interesantes con los números si no es a través de una extensa experimentación con ellos. Uno aprende un lenguaje hablando y comunicándose con él. Equivocándose y corrigiéndose. Uno de los mitos habituales en matemáticas es que existen alumnos bien dotados para ellas y que no necesitan tiempo para aprender. Creo que esa cita de Euler debería hacernos reflexionar.

Euler conseguía resultados maravillosos en matemáticas por sus extensas e intensas exploraciones, experimentaciones y familiarizaciones con las propiedades de los números y funciones.

Así nuestros alumnos, que no son Euler, también necesitan familiarizarse y experimentar. Pero en un contexto lúdico, motivador y gratificante que mantenga su interés.

Estamos delante de una meta “el aprendizaje de las matemáticas” que requiere tiempo. El alumno debe movilizar su cerebro con problemas estimulantes, dedicarle un tiempo a razonar y comprender, a sacar conclusiones que le hagan sentir que toca tierra firme, que lo que se le propone es capaz de conseguirlo dedicándole el tiempo necesario.

Esto no es fácil alcanzarlo en una clase numerosa porque no es posible conocer y aplicar las ideas de cada alumno y, menos aún, darles una respuesta inmediata o una batería extensa de ejercicios que les corroboren la exactitud o inexactitud de sus intuiciones.

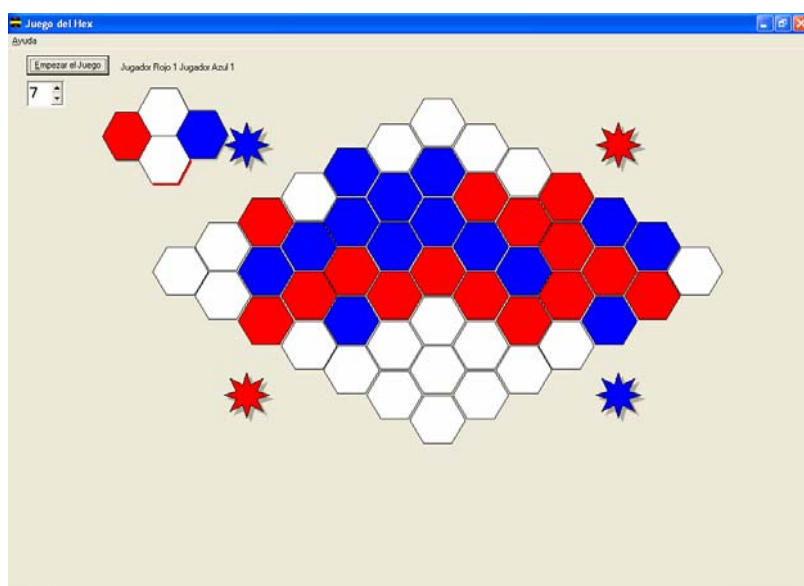
Esta experimentación con las preguntas y respuestas puede parecer que tiene algo de rutinaria o conductista. Sin embargo, con la visión de Euler, se están experimentando las propiedades de los números en una proporción mucho mayor que la que se produce en una clase común. El alumno tiene cientos de ejercicios en este programa en los que puede experimentar todas las posibles variantes, dudas y contrastar errores, hasta llegar, a un estado de firme conocimiento de cuales son las condiciones para dar una respuesta correcta. No es preciso resaltar lo que es obvio, el papel relevante del profesorado para orientar y enriquecer este proceso.

A veces se le pide a un programa educativo en matemáticas que sea un “procesador de ideas matemáticas”. Pero una preparación aplicable al aula de tales procesadores se convierte en un programa semejante al descrito. Con la ventaja de que este programa ya tiene insertado todo un caudal de experiencias en educación matemática. El profesor no tiene que elaborar el programa sino seleccionar, preparar ciertas partes, orientar en su utilización. Como sabemos, el valor de la herramienta depende del uso que se le dé.

En resumen, entre las características y posibilidades del software que se presenta podríamos enumerar las siguientes:

- Desarrolla el currículo y lo complementa con opciones que deberían estar presentes en él (Algoritmos, grafos,)
- Presenta objetos virtuales que propician la creación de abstracciones en los alumnos.
- Facilita la experimentación a través de la manipulación de objetos matemáticos, hacer matemáticas experimentales. Como dice el informe francés Kahane: "L'enseignant peut montrer, faire découvrir, et bien sûr susciter la réflexion sur les objets mathématiques grâce à ces logiciels. L'enseignement des mathématiques trouve là de nouveaux moyens et méthodes, de nouvelles images."
- Integra la informática en el currículo de matemáticas. Se introducen temas como códigos, claves, algoritmos, grafos, árboles binarios, etc
- Utiliza como eje conductor la resolución de problemas, unas veces más abiertos como en mosaicos, otras más cerrados como los ejercicios de decimales periódicos, que están siempre en el centro de lo que el alumno percibe. En todo caso son un desafío, un juego, que puede practicar sin limitación de tiempo.

Con todo, la aplicación de las actuales tecnologías al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas presenta grandes retos acordes con la complejidad de la tarea educativa. Compartir nuestra experiencia nos permitirá avanzar en un proceso de mejora continua.



“Los juegos son una fuente inestimable de situaciones abstractas en las que el estudio y la comprensión enriquecen a los que los utilizan... mientras se divierten. Son la mejor manera de hacer apreciar y practicar las matemáticas.”

Jean Paul Delhaye.

Jeux Mathématiques et mathématiques des jeux.

TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS. MATEMÁTICAS 4º DE LA ESO.

Manuel Díaz Regueiro

"La mente no es un vaso que es preciso llenar, sino un fuego que es preciso encender"
Plutarco

Como en toda época de cambio se producen discusiones sobre la necesidad o no de utilizar las tecnologías novedosas. En la época del ferrocarril se discutía en Inglaterra los graves problemas que podrían sucederle a aquellos atrevidos que osasen viajar en un tren a 30 km/h. Como en aquella época hoy se discute que pasa si un alumno deja de adquirir destrezas repetitivas y de cálculo. Lo que está, también, en discusión es que pasa si un alumno no ve las posibilidades de las destrezas de manipulación de cálculo simbólico, destrezas de visualización de las matemáticas, destrezas de concretización,... todas ellas destrezas de futuro, usando las TIC.

Porque un alumno, de Bachillerato, por ejemplo, tiene una edad fértil, una edad, que como la edad de adquisición de los idiomas, en la que es posible incendiar su mente, motivarla hacia metas científicas y de comprensión mayores, a costa de, evidentemente no llenarla de contenidos innecesarios, prescindibles y vulgares, "agua" en la metáfora. Pasada esa edad, ya no es tan fácil. Microsoft busca sus empleados a esas edades para formarlos convenientemente.

Hoy sabemos que estudiar la lista de los reyes godos –a pesar de su posible utilidad para ejercitar la memoria-, no es ni atrayente, ni motivadora, ni necesaria. Uno escribe en Google "lista reyes godos" y obtiene hasta 800 páginas web en que es posible consultar esa lista.

No es, pues, un conocimiento necesario, como no lo es saberse de memoria el listín telefónico. Si es necesario, en cambio, saber utilizar un buscador web para obtener esas informaciones.

Hablando de matemáticas estaríamos de acuerdo en que un alumno debe saber multiplicar 20×50 o $0,25 \times 400$ no ya con lápiz y papel sino mentalmente. Debe saber estimar el resultado de una operación con calculadora, comprobando si se equivocó al introducir los números. O, en general, saber estimar cualquier tipo de operación o cálculo que se le pueda presentar en la vida real.

Debe tener intuiciones ciertas, esquemas conceptuales asentados, del concepto de función, derivada, etc... Para ello no es preciso que los pasos por los que llegue a la abstracción sean saltos en el vacío. Hay alumnos capaces de visualizar lo abstracto en su mente sin necesidad de ortopedia de ningún tipo. Como hay alumnos que tiene una vista de águila y otros son cegatos. Todos entendemos que esa diferencia no es significativa y no debería ser un obstáculo el que un alumno sea cegato para que "progrese adecuadamente" en sus estudios pese a ello. ¿Por qué ha de ser distinto en la capacidad de abstracción?. ¿Es una cualidad humana tan importante que ha de dividir y clasificar a los seres humanos, como parece que pretenden algunos? ¿Servir de selección?

Frecuentemente contraponemos abstracción a comprensión. ¿Es más importante comprender lo que se abstrae, aunque sea menos, que abstraer sin comprender?

Es atractivo suponer que la función (más bien curva) que relaciona abstracción y comprensión tiene un punto óptimo de equilibrio.

Las matemáticas, además de sus enormes aspectos positivos, tienen aspectos (su abstracción, su encadenamiento progresivo, su lógica,...) que dificultan que algunos – bastantes-alumnos lleguen a una total comprensión e identificación con ella. Se producen auténticos bloqueos hacia la asignatura que impiden que ni siquiera se acerquen a ella, no ya que la disfruten, sino que la temen y la rehuyan, impidiendo así que los alumnos lleguen a tener los conocimientos necesarios. Crear entornos donde las matemáticas no provoquen ansiedad es una de las recomendaciones de PISA. Pero aún más necesario sería crear entornos donde las matemáticas provoquen adicción. Donde su necesidad no venga dada por lo del “magister dixit”, o “el cuento del dragón”, sino por el disfrute del conocimiento, de la comprensión, y la ansiedad de saber, que son características humanas. “Queremos saber, sabremos” decía Hilbert en su disputa con Du Bois Reymond. Esto no siempre es posible, pero habría que remediar la apatía y el horror al conocimiento-sobre todo si éste es anticuado- y la ansiedad del no saber, características no tan humanas pero si moneda corriente en las aulas.

Y esto viene a cuento de la cuestión que tenemos planteada, si se favorece o entorpece el aprendizaje de los alumnos con las TIC. En primer lugar es un entorno atractivo, ligado a juegos y entretenimientos, a información ilimitada, natural a las nuevas generaciones.

Es un lugar en el que es posible experimentar. Pongamos un ejemplo: un lugar común de los alumnos es preguntarse para que sirven los polinomios (excepto quizá los de segundo grado, que les surgen en las ecuaciones y que saben resolver si son de grado 2). Pongamos el contexto informático siguiente (Matemáticas cuarto de la ESO): el alumno debe hacer clic en determinados puntos de un plano cartesiano para conseguir dibujar polinomios que pasen por esos puntos (polinomios de interpolación, por tanto), cumpliendo ciertos requisitos sobre sus raíces (3 raíces en el intervalo $[-7,2]$, por ejemplo).

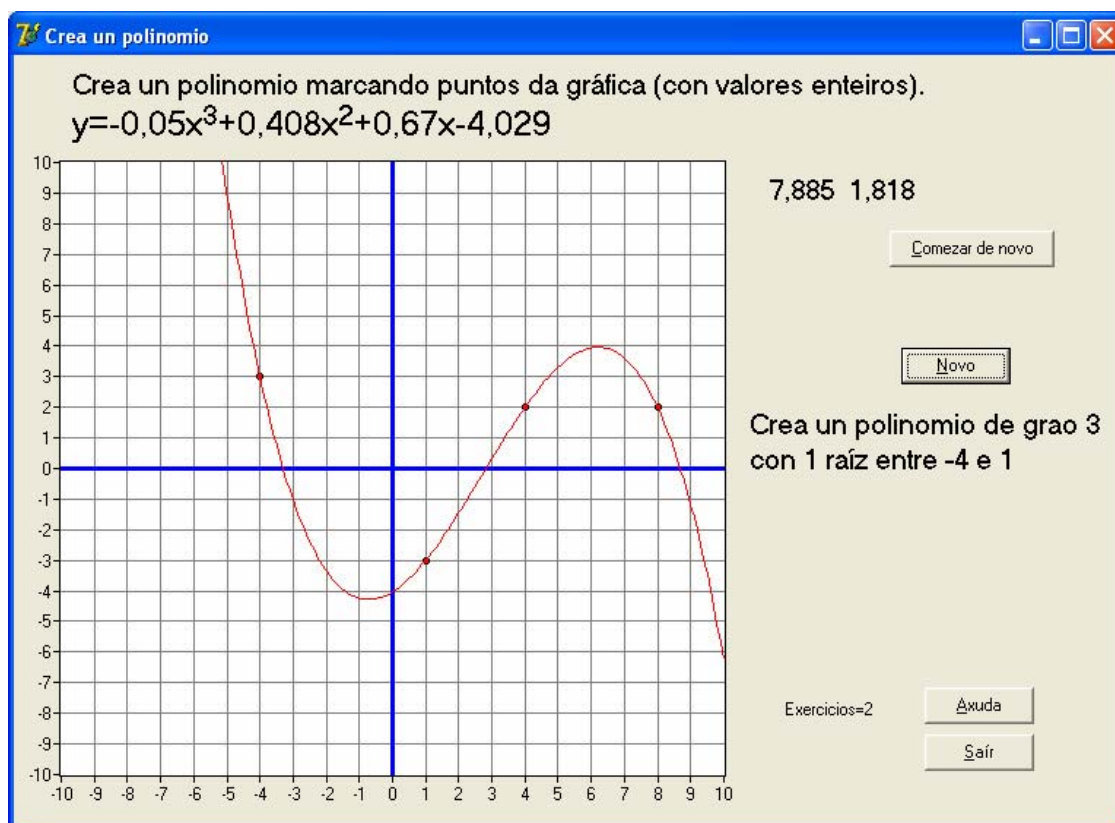
Es evidente que el alumno maneja los polinomios de interpolación sin calcularlos (es un entorno prefabricado del programa) pero los está visualizando de modo que cada polinomio adquiere una propiedad característica -su gráfica, visual y concreta- e incluso evolutiva, es posible observar que diferencias notables tienen sus gráficas al cambiar o aumentar sus puntos de interpolación. Puede investigar, puede preguntarse que pasa si...(y hay preguntas notables que se pueden hacer, seguramente teoremas sin descubrir sobre el comportamiento de estos polinomios cuando variamos algunos de sus parámetros –a modo de ejemplo, qué relación tiene un polinomio con el que se obtiene al añadir los puntos medios x de sus puntos de interpolación contiguos con el valor de $-f(x)$, etc...).

Como dice Celia Hoyles “Creemos que un desafío central para el diseño de ambientes de estudio matemáticos debe hacer visible lo que es normalmente visible sólo al cognoscenti matemático. De este modo, el nivel de lo que puede ser pensado y hablado en clase se eleva un peldaño o dos y las ideas pueden ser exploradas al estar localizadas dentro del mundo de lo particular, lo concreto y lo manipulable (expresado a través de clics de ratón, partes de programas etc.), conteniendo dentro de ellas las semillas de lo general, lo abstracto, y lo virtual.”

Es así que el alumno está experimentando y probando situaciones e hipótesis sobre las que puede interesarse probar o razonar su necesidad. Pero más que nada, el alumno al que se le presenta esa situación de trabajo no sólo está asentando su concepto de polinomio como función, como estimación (por ser de interpolación), sino que está

conociendo un concepto vivo, dinámico, que se deforma y modifica bajo su acción, que le responde, más que un concepto algebraico abstracto del que se sabe sumar, multiplicar y dividir sin que ese conocimiento le ayude nada más que indirectamente en la resolución de ciertas ecuaciones.

Hay ciertas consecuencias de este punto de vista incendiario: ya que no es el volumen del recipiente lo que importa –pese al interés de algunos en tener alumnos selectos-, no debemos esperar a que este se llene de vacuidades: la labor del profesor, de la educación, es incendiarlo, es actuar activamente para que se desencadene el interés, la motivación, la curiosidad, y la adicción a la sabiduría. Contra la opinión más general, no es que Euler fuese un genio. Johann Bernouilli, su profesor particular de un estudiante destacado, era justo el incendiario que necesitaba para que el fuego se produjese.



"Si me hablas, escucharé. Si me muestras, miraré. Si me dejas experimentarlo, aprenderé" **Lao Tsé**

En este ejemplo, además de mostrarse la eficacia de experimentar como medio de introducción de conceptos y de concretizar la abstracción, hay algo que resaltar: se puede jugar con matemáticas superiores a las del currículo siempre que sean transparentes al usuario, se está trabajando con un modelo matemático superior – internamente- pero de él se muestra la parte asequible al alumno. Dicho en otras palabras, hay problemas matemáticos ocultos –algunos de muy alta dificultad- en la presentación asequible de las matemáticas escolares. Y un tema muy querido por André Antibí, las propias matemáticas escolares, a veces áridas, son un campo adecuado de interés siempre que la presentación sea la conveniente. Acertar con el entorno, comprender las dificultades del alumno medio, generar una “ingeniería didáctica” de una trasposición didáctica tampoco es un problema trivial. Queda mucho por hacer y por investigar. Lo que se presenta es a modo de ejemplo de lo que es posible hacer hoy en día, pero no cabe duda que, con los impulsos adecuados, sería

posible mejorar los entornos de aprendizaje matemático utilizando las TICs. ¿Es necesario investigar la curación del cáncer? Todos diremos que sí, evidentemente. ¿Pero lo es más o menos que investigar entornos de aprendizaje que alienten a los alumnos y consigan un rendimiento óptimo de resultados? Parece que la educación está abocada a ser la “cenicienta” en la consideración social, en la que una cierta concepción “racista”, genética, de desigualdad social justifica que no sea necesaria la investigación en éste campo. Lo que veríamos intolerable en temas como la salud (muchos de los cuales si son efectivamente genéticos), lo vemos razonable en temas como la educación: hacer lo mismo que los profesionales de hace un siglo o dos y no dar un tratamiento personalizado –acorde a sus características-, a cada paciente o alumno.

Hay un aspecto importante de las TIC que también es necesario destacar: no sólo permiten visualizar la virtualidad, concretizar, sino abstraer aún más las matemáticas, poner los desafíos matemáticos, aún para el alumno, a un nivel muy superior. Hablemos del cálculo simbólico, de preguntarse que pasa si... y de prescindir de pasos intermedios, incluso de conocimientos intermedios.

En un artículo de GAMMA 5 presento el siguiente problema: Dado un triángulo, idear una regla que transforme los vértices en otros puntos. Calcular la razón de las áreas del triángulo transformado y el original. Un programa apropiado sería Derive y el problema es del tipo de los presentados por Miguel de Guzmán (2002), por lo que es conveniente el uso de las herramientas que creó y que presenta en su CD.

Una vez entendido el problema, y vistos los ejemplos del artículo, casi cualquier alumno de Bachillerato puede reproducirlo, más que usando cálculo (que ya lo proporciona Derive), imaginación (que no la tiene Derive), e ir más allá: inventar sus propios teoremas sobre razones de áreas de triángulos. Algo que tampoco consideramos objetivo de educación: conseguir resultados usando las herramientas apropiadas (a cualquier empresario este punto de vista le provocaría risa). Es decir, preferimos suspender a un alumno porque no sabe determinar el ortocentro de un triángulo a que sepa inventar nuevos teoremas simples de geometría del triángulo saltándose los detalles del cálculo en los que posiblemente fallaría. Ese es nuestro dilema con la tecnología. Considerar fértiles, inteligentes, a nuestros alumnos o incapaces de resistir la trivialidad y el mecanicismo, por lo tanto, retrasados.

Considerando, ya de antemano, que este punto de vista no tiene el aplauso general hoy en día, hay otro aspecto en el que el cálculo simbólico mejora la enseñanza: como tutorial. Se trata de que el alumno pueda ver paso a paso los procesos necesarios de resolución. Esto está implementado en el siguiente módulo de 4º de ESO.

Y aún otro más: implementar visiones de los números como las que propone Tomás Recio en “Cálculo simbólico y geométrico”, primando las relaciones entre ellos sobre su carácter individual (así, por ejemplo, las relaciones entre las raíces de los polinomios).

Un aspecto interesante de discutir, pero, en cualquier caso, pone de manifiesto que las herramientas de cálculo simbólico ponen sobre la mesa el modo en como podemos presentar hasta los mismos números. Es posible pensar las matemáticas desde puntos de vista nuevos, interrogativos, especulativos, experimentadores, atrayentes.

Como diría, también, Hilbert “Nadie nos expulsará del paraíso que Cantor ha creado para nosotros”, substitúyase Cantor por Tecnología....

Bibliografía

Antibi, André. *La motivación en Matemáticas: ¿La del profesor? ¿La del alumno?* Actas 9^{as} J.A.E.M. Lugo, 1999.

Guillén, Michael. *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo*. Editorial Debate. Madrid. 2000.

Miguel de Guzmán. *La experiencia de descubrir en Geometría*. Editorial Nivola . Madrid. 2002.

Hoyles, Celia. *Lessons we have learnt: effective technologies for effective mathematics*. En Internet.

Tomás Recio. *Cálculo simbólico y Geométrico*. Síntesis. 1998

UNA OJEADA A LA CALCULADORA WIRIS

Antoni Gomà.Nasarre

www.xtec.es/~agoma/wirisscm

El objetivo que se plantea en este taller es el de presentar el entorno de trabajo de la calculadora Wiris y describir sus principales características, que nos permiten definirla como una potente calculadora simbólica y gráfica que hace posible –y a menudo exige– un interesante trabajo a nivel conceptual y se convierte en un eficaz recurso didáctico.

Actividades

1. El entorno de trabajo
2. Calculemos... y pensemos!
3. Variables y funciones. Ecuaciones y sistemas
4. La Wiris, calculadora gráfica. Gráficos interactivos
5. Algunos recursos avanzados

En el material que acompañará cada actividad se expondrán detalladamente los contenidos del taller, redactados de forma que facilitan el auto-aprendizaje y profundización posterior. Asimismo se incluyen enlaces a actividades didácticas elaboradas con el programa que se presenta y apartados de ampliación.

Objetivos

Conocer el interfaz de trabajo y el tablero gráfico y realizar las primeras ejercitaciones, así como aprender a guardar como página HTM una sesión de trabajo. Saber cuál es el procedimiento para indicar a la calculadora Wiris la forma como queremos que se muestren los resultados de los cálculos. Ver la utilidad y el ámbito de aplicación de los tres signos de igual que incorpora el programa. Resolver ecuaciones y sistemas. Tener un primer contacto con las posibilidades gráficas de la Wiris y la facilidad de elaborar gráficos interactivos.

Presentar algunos de los recursos avanzados de la Wiris (listas, lenguaje Wiris ++) y utilizarlos para la resolución de problemas de aritmética.

Referencias

www.wiris.com Documentación de la calculadora Wiris (Guía Rápida e Índice alfabético de comandos)

Antoni Gomà, Misericòrdia Nomen, Victòria Oliu. *La calculadora Wiris como recurso didáctico*. (Curso de autoformación en modalidad telemática. SGTI del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. 2003)

(accesible en www.xtec.es/formaciotic/curstele/d112)

LA CALCULADORA GRÁFICA COMO RECURSO EN MATEMÁTICAS

José María Chacón Íñigo
IES Llanes de Sevilla

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
IES Jándula de Andújar (Jaén)

La calculadora gráfica, en especial la nueva Calsspad 300, constituye un excelente recurso didáctico para el aula de matemáticas que facilita el trabajo y permite al alumno adquirir los conocimientos del currículum de ESO y sobre todo de Bachillerato de una manera más acorde con la época actual.

A partir de ejemplos y actividades el profesorado conocerá las posibilidades que ofrece esta herramienta, es especial como ayuda para el alumnado de cara a la prueba de acceso a la Universidad.

En cada una de las propuestas de trabajo de este taller se mostrará las ventajas de la calculadora gráfica en la resolución de problemas de análisis, álgebra, geometría y estadística.

Los distintos ejemplos expuestos y propuestos corresponderán a los niveles educativos de ESO y de Bachillerato, además para su realización dispondremos de un número suficiente de calculadoras.

Esta actividad se propone a través del convenio que la SAEM THALES mantiene con CASIO para la formación del profesorado en el uso de la calculadora gráfica.

UN PASEO POR LA METODOLOGÍA CLASSPAD EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS.

Abel Martín

Profesor de Matemáticas del IES Pérez de Ayala de Oviedo

Introducción:

La metodología Classpad utiliza como herramienta educativa y matemática de última generación una máquina y un software que cuenta con un gran número de prestaciones y ventajas, siendo un híbrido entre calculadora gráfica - algebraica, ordenador de bolsillo y PDA con lápiz táctil interactivo.

En cada sesión, cada alumno dispone de una calculadora de mano y una retroproyectable para el profesor, que permite llegar a todos fácilmente, generando una visualización general, que llega de forma instantánea a todos los alumnos, conviviendo de forma paralela y simultánea con una enseñanza más "tradicional", sin necesidad de salir del aula, con un simple retroproyector (o un cañón, con ordenador portátil), con el objetivo de comprobar sus posibilidades didácticas, como elemento motivador, de refuerzo visual y conceptual de todo aquello que vamos trabajando día a día, incluyendo nuevos tipos de actividades donde, la reflexión, la toma de decisiones y la aplicación sean el objetivo fundamental.

Objetivos:

- Analizar las características y prestaciones de la ClassPad 300 y estudiar el manejo elemental de esta calculadora.
- Mostrar métodos alternativos a la enseñanza tradicional.
- Estudiar la utilidad de la ClassPad 300 para tratar diversos temas del currículo de matemáticas en ESO y Bachillerato, aprovechando sus posibilidades de trabajo con gráficas, construcciones geométricas y expresiones algebraicas.
- Analizar las posibilidades didácticas de la ClassPad 300 en la clase de matemáticas como libro de texto.
- Presentar diversas actividades electrónicas (eActivity) que hemos diseñado y trabajado en el aula de Matemáticas a lo largo de los dos últimos cursos en el IES Pérez de Ayala de Oviedo, con alumnos desde 2º ESO (13/14 años) a 1º de Bachillerato (16/17 años), con la nueva metodología "CLASSPAD.
- Enseñar a pensar.

Contenidos:

- Características de la classpad 300. manejo elemental de la calculadora. Operaciones básicas con los menús virtuales y la función de arrastre.
- ¿Qué es una actividad electrónica?.
- Presentación de actividades electrónicas en castellano.
- Elaboración de actividades electrónicas.
- Presentación del Website: **www.classpad.tk** , donde se podrán "descargar" a través de internet, actividades electrónicas diseñadas en castellano, para ser utilizadas por el profesor y los alumnos en clase, últimas noticias, artículos, desarrollo de actividades en el aula...

- La opción “Verify”, como elemento revolucionario en la enseñanza y aprendizaje autónomo de las matemáticas.
- Enlace CAS – DGS.
- Análisis de nuevos enfoques en diferentes temas del curriculum:
 - Cálculo aritmético y algebraico.
 - Estudio de funciones.
 - Métodos alternativos para la resolución de ecuaciones de diferentes grados.
 - Ecuaciones irracionales.
 - Sistemas de ecuaciones.
 - Límites.
 - Trigonometría.
 - Estudio de la Estadística.
 - Geometría y Geometría dinámica.
 - Derivadas e integrales.
 - Superficies en 3D.
 - Programación lineal.
 - Matrices.
 - La opción de Álgebra simbólica.
 - Etc.

Metodología

La sesión constará de una exposición detallada, de forma dinámica e interactiva, con la participación de los asistentes, que dispondrán de máquinas y herramientas para su sesión de trabajo. También se facilitarán materiales didácticos en soporte electrónico y papel.

Ampliación de contenidos:

Una vez finalizadas las XII JAEM, en www.classpad.tk

PROGRAMACIÓN CON DERIVE PARA FOMENTAR LA CREATIVIDAD MATEMÁTICA DEL ALUMNO

J.L. Galán, M.A. Galán, A. Gálvez, A.J. Jiménez, Y. Padilla, P. Rodríguez

Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Málaga

*jl_galan@uma.es, magalan@ctima.uma.es, agalvez@ctima.uma.es,
anjipri@telefonica.net, ypadilla@ctima.uma.es, prodriguez@uma.es*

RESUMEN. Aunque actualmente es habitual el uso del ordenador en el aula de Matemáticas en la Universidad, su utilización no conduce, en la mayoría de las ocasiones, a que se fomente la creatividad matemática del alumnado. En muchos casos se sigue utilizando para resolver los procedimientos de cálculo de forma inmediata, privando así al alumno de la posibilidad de adquirir algún conocimiento nuevo. En este taller se mostrará cómo con el uso de la programación con Computer Algebra Systems (CAS) se consigue que el uso del ordenador provoque un aprendizaje de la materia de la asignatura en cuestión sin abandonar, por otro lado, la utilidad como herramienta de cálculo potente.

En particular, en el desarrollo de este taller y a modo de ejemplo, se elaborarán con DERIVE programas que faciliten la resolución de diversos problemas de Cálculo Vectorial.

Introducción

El objetivo principal del taller “Programación con DERIVE para fomentar la creatividad matemática del alumno”, es mostrar a los participantes la utilización de la programación con Computer Algebra Systems (CAS) como herramienta que fomenta la creatividad matemática en el alumno. La base fundamental de este taller está en el trabajo realizado en los últimos años con nuestros alumnos en las asignaturas de Matemáticas de Ingeniería Técnica de Telecomunicación de la Universidad de Málaga. En las prácticas que se desarrollan en las distintas asignaturas, los alumnos no sólo resuelven los problemas típicos de la materia en cuestión sino que realizan programas para resolver dichos problemas.

En el siguiente apartado se describe el desarrollo del taller. Posteriormente se dedicará un apartado a comentar una serie de experiencias realizadas con alumnos de Ingeniería. El objetivo general de esas experiencias era determinar si el uso de la programación con CAS produce una mejor asimilación de los conceptos tratados. Por último, se dedicará un apartado para la enumeración de una serie de reflexiones a modo de conclusiones así como otro apartado para las referencias bibliográficas que se han considerado.

Descripción y desarrollo del taller Programación con DERIVE para fomentar la creatividad matemática del alumno

A modo de ejemplo de utilización didáctica de la programación con CAS, en el taller se elaborarán ciertos programas con el software DERIVE para resolver diversos problemas de Cálculo Vectorial.

Concretamente, el ponente del taller guiará la elaboración de ciertos programas para resolver problemas sobre integrales de línea e integrales múltiples. Una vez visto cómo se crean programas, los asistentes serán los que elaborarán una serie de programas adicionales sobre esta materia.

En la primera parte del taller, se explicará como se crean programas con DERIVE. Para ello se elaborarán los siguientes programas:

- DIFERENCIALEXACTA3 para comprobar si una forma diferencial de R^3 es exacta o no.
- POTENCIAL2 para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de R^2 . En el caso de que la forma diferencial no sea exacta, lo indicará.
- LINEAPARAMETRICA3 para calcular la integral de línea de una forma diferencial de R^3 a través de un camino dado.
- TRIPLE para calcular integrales triples en coordenadas cartesianas.
- TRIPLECILINDRICA para calcular integrales triples en coordenadas cilíndricas.

A lo largo de todo el proceso de creación de los programas anteriores, se realizarán ejemplos aclaratorios tanto para comprender dicha elaboración como para enseñar el modo de utilizarlos.

Se dedicará una atención especial a la representación con DERIVE de recintos de R^2 y de superficies de R^3 , con el fin principal de utilizar estas representaciones como ayuda, tanto a la hora de establecer los límites de integración en integrales dobles y triples, como a la de la elección del sistema de coordenadas con el que se resolverán estas integrales.

En la segunda parte del taller y tras unas breves aclaraciones sobre algunos aspectos teóricos sobre la materia, se propondrá a los asistentes la elaboración de los siguientes programas:

- DIFERENCIALEXACTA2 para comprobar si una forma diferencial de R^2 es exacta o no.
- POTENCIAL3 para calcular el potencial de una forma diferencial exacta de R^3 . En el caso de que la forma diferencial no sea exacta, lo indicará.
- LINEAPARAMETRICA2 para calcular la integral de línea de una forma diferencial de R^2 a través de un camino dado.
- DOBLE para calcular integrales dobles en coordenadas cartesianas.
- DOBLEPOLAR para calcular integrales dobles en coordenadas polares.
- TRIPLEESFERICA para calcular integrales triples en coordenadas esféricas.

Para que los asistentes comprueben si elaboran correctamente los programas propuestos se les proporcionará una serie de ejemplos junto con sus soluciones numéricas para que les sirvan a modo de test.

Una de las principales aplicaciones que tiene la elaboración de programas es la creación de ficheros de utilidades sobre una materia específica. Con los ficheros de utilidades se aumentan considerablemente las posibilidades del programa DERIVE.

Así, por ejemplo, los autores de este taller hemos publicado los siguientes ficheros de aplicaciones:

- MULTIPLE INTEGRATION.MTH (y .DFW), publicado en la sección de *User Contributed Math Packages* desde la versión 5.06 de DERIVE y que contiene, además de los programas desarrollados anteriormente, una serie de programas adicionales sobre integrales de superficie.
- COMPLEX ANALYSIS.MTH (y .DFW), publicado en la sección de *User Contributed Math Packages* desde la versión 5.06 de DERIVE y que está formado por múltiples programas que permiten resolver los ejercicios típicos del cálculo con variable compleja.
- RESIDUES.MTH (y .DFW), aceptado para su publicación en la siguiente versión de DERIVE y que contiene programas sobre la utilización del teorema de los residuos al cálculo de integrales reales. Es importante señalar que estos programas están desarrollados con fines didácticos puesto que no se proporciona tan sólo el resultado final sino todos los pasos intermedios a seguir para resolver el ejercicio en cuestión.
- ATPCL.MTH (y .DFW), aceptado para su publicación en la siguiente versión de DERIVE y que contiene programas que convierten a DERIVE en un demostrador automático de teoremas (ATP) para la Lógica Clásica, esto es, permite comprobar si una fórmula es un teorema, si una fórmula es satisfacible o si una inferencia es válida. Para ello se han implementado distintos algoritmos tales como Quine o Tablas Semánticas.
- RANDOM_DISTRIBUTIONS.MTH (y .DFW), aceptado para su publicación en la siguiente versión de DERIVE y que contiene programas tanto para generar distribuciones estadísticas específicas (discretas y continuas) como para generar cualquier distribución (discreta o continua) conocida su función de distribución o su función de densidad.

Pruebas realizadas a los alumnos

En el curso 2002-2003 realizamos unas pruebas a nuestros alumnos de la asignatura *Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales* de las titulaciones de Ingeniería Técnica de Telecomunicación, con el fin de comprobar si la elaboración de programas con DERIVE influye positivamente en la asimilación de los conceptos tratados en las clases de pizarra.

Básicamente el experimento consistió en:

- En un grupo se impartió el tema *Integrales de línea* de forma tradicional, es decir, desarrollo del tema en clases de pizarra (tanto la teoría como los ejemplos aclaratorios y todos los ejercicios). La duración de este tema fue de seis horas. Este grupo se utilizó como *grupo control*.
- En otro grupo se impartió el tema sobre integrales de línea utilizando una “metodología mixta”, consistente en clases de pizarra (en las que se desarrollaron los aspectos teóricos, ejemplos aclaratorios y primeros ejercicios del tema) y una clase en el laboratorio, en la que se resolvieron el resto de ejercicios del tema mediante la elaboración con DERIVE de los programas apropiados. Para las clases de pizarra se emplearon cinco horas, mientras que para la clase en el laboratorio se empleó una hora (observemos que se tardó el mismo tiempo en ambos grupos y se les impartió los mismos contenidos). Este grupo se utilizó como *grupo experimental*.

- Tras la realización de la experiencia, se realizó una prueba de nivel sobre integrales de línea a ambos grupos.

Es importante señalar las características principales que se tuvieron en cuenta a la hora de elegir los grupos:

- La asignatura la impartía en los dos grupos el mismo profesor intentando así que el resultado de la experiencia fuese independiente del profesor que impartiera la asignatura.
- En las calificaciones de años anteriores se ha observado que los alumnos de ciertas especialidades obtenían mejores resultados que los de otra. Por tal motivo, se eligieron los dos grupos pertenecientes a la misma especialidad intentando así que el resultado fuese independiente de la especialidad.

Además de la elección de los grupos de forma “coherente”, antes de llevar a cabo la experiencia, se realizó una prueba de nivel previo cuyos resultados justificaron que los alumnos de ambos grupos partían con el mismo nivel (apenas una diferencia de menos de una décima sobre diez puntos).

Tras la corrección de la prueba de nivel sobre el tema de integrales de línea, se constató que con una diferencia en la metodología de sólo una hora (recordemos que la diferencia consistió en la forma de impartir la materia y no en la duración dedicada a éste), en el grupo experimental **se obtuvo una media 1.35 puntos mayor** que la media del grupo control.

Por lo tanto, podemos concluir que la elaboración de programas con DERIVE sobre integrales de línea mejora la asimilación de los conceptos por parte de los alumnos.

Por otro lado, al igual que para el tema de integrales de línea, para el siguiente tema de la asignatura (*Integrales múltiples: integrales dobles y triples*) se realizó una experiencia cuya estructura base es la misma anterior, es decir:

- Un *grupo control* y un *grupo experimental* (pertenecientes a la misma titulación e impartidos por el mismo profesor, distinto al de la experiencia anterior).
- Metodología clásica para el grupo control (se tardó doce horas en impartir las clases de pizarra), y una metodología “mixta” desarrollada en el grupo experimental, en el mismo sentido que antes (teoría, ejemplos aclaratorios y primeros ejercicios sobre integrales dobles y triples en clases de pizarra; ejercicios finales realizados en el laboratorio utilizando la elaboración de los programas necesarios).
- Realización de una prueba de evaluación sobre integrales dobles y triples.

En este caso si se observaron diferencias significativas sobre el nivel previo de los alumnos (una diferencia de unas ocho décimas sobre diez puntos).

Tras la corrección de la prueba sobre integrales dobles y triples y considerando las diferencias de nivel previa de ambos grupos, se obtuvo **un incremento final de un punto y una décima** en el grupo experimental frente al grupo control (el resultado fue de 1.9 puntos más en el grupo experimental que, considerando la diferencia de nivel previa da lugar a que el incremento relevante fuera de un punto y una décima).

Por lo tanto, al igual que para el tema *Integrales de línea* consideramos que la elaboración de programas con DERIVE sobre *Integrales dobles y triples* hace que se asimilen mejor los contenidos del tema.

Por último señalar que independientemente de estas experiencias, a todos los alumnos que lo desean se les imparte prácticas con DERIVE sobre toda la materia de la asignatura, en las cuales se elaboran ciertos programas significativos de la materia tratada.

Teniendo en cuenta las conversaciones mantenidas con los alumnos, los exámenes, las encuestas y las entrevistas realizadas, podemos concluir que la elaboración de programas con DERIVE facilita la asimilación de los conceptos aprendidos en las clases de pizarra.

Conclusiones

De nuestra experiencia personal a lo largo de los últimos diez años de docencia en asignaturas de Matemáticas de las titulaciones de Ingeniería, nos gustaría señalar las siguientes reflexiones/conclusiones:

- Las experiencias acumuladas revelan que los CAS son herramientas informáticas de fácil manejo y útiles para su integración en las clases de Matemáticas de Ingeniería.
- Se deben cambiar los usos tradicionales de los CAS en la enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería para maximizar las oportunidades que ofrece esta tecnología. La optimización se debe orientar hacia la mejora de la motivación, la autonomía y el aprendizaje basado en la implicación del alumno en el proceso.
- Una idea potente es la de combinar los recursos de un CAS con la flexibilidad de un lenguaje de programación.
- Hay indicios razonables de que la realización de programas con DERIVE facilita el aprendizaje y mejora la motivación del alumno.
- Aunque sería lo deseable, no es necesario modificar sustancialmente un programa tradicional de una asignatura de Matemáticas en Ingeniería para introducir la elaboración de programas con DERIVE por parte de los alumnos.

Referencias bibliográficas

- [1] GALÁN, J.L. (1998). Análisis Vectorial para la Ingeniería. Teoría y Problemas. *Editorial Bellisco*. Madrid (España).
- [2] GALÁN, J.L. (2003). Integrales Múltiples con DERIVE. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación. *Tesis Doctoral*. Universidad de Málaga (España).
- [3] GALÁN, J.L., GALÁN, M.A., PADILLA, Y. y RODRÍGUEZ, P. (2002). Are computers under-used in Mathematical teaching for engineers? *Educational technology. Serie Sociedad de la información* n° 9, 220-225.
- [4] GALÁN, J.L., GALÁN, M.A., PADILLA, Y. y RODRÍGUEZ, P. (2002). Use of the computer in Mathematic teaching for engineers. A powerful calculator? *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level)*. Hersonissos, Creta (Grecia).
- [5] PADILLA, Y. (2003). Integrales de Línea con DERIVE. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación. *Tesis Doctoral*. Universidad de Málaga (España).
- [6] RODRÍGUEZ, P., RODRÍGUEZ, C. y SÁNCHEZ, S. (1996). Análisis Vectorial y Ecuaciones Diferenciales. Problemas comentados de examen. *Editorial Ágora Universidad*. Málaga (España).
- [7] RODRÍGUEZ, P. (2004). Derivación e Integración de Funciones de Variable Compleja con DERIVE. Un estudio de innovación curricular en segundo curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación. *Tesis Doctoral*. Universidad de Málaga (España).

