



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 3

“GEOMETRÍA : LA BELLA DURMIENTE. LA GEOMETRÍA ¿SIGUE OLVIDADA?”

TALLERES

PROPUESTA DE TALLER PARA LAS JAEM.....	967
CONSTRUYENDO TENSEGRIDADES SIMPLES	971
EL PAPEL COMO MATERIAL DIDÁCTICO EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA PLANA	973
GEOMETRÍA CON LA CALCULADORA CLASSPAD 300	979
INNOVACIÓN PRÁCTICA CON PLANTILLAS MATEMÁTICAS EN EL AULA	981

PROPUESTA DE TALLER PARA LAS JAEM

Covadonga Blanco García
Profesora Titular
Departamento de Matemáticas
Universidad de A Coruña

Teresa Otero Suárez
Catedrático de Matemáticas
I.E.S. Antonio Fraguas
Santiago de Compostela

Alicia Pedreira Mengotti
Profesora Agregada de Secundaria
I.E.S. Monelos en A Coruña

INTRODUCCIÓN : PAPIROFLEXIA, EDUCACIÓN Y MATEMÁTICAS.

La Papiroflexia

La papiroflexia juega un importante papel en el campo de la educación, a cualquier nivel: primaria, secundaria, e incluso como apoyo de ciertas disciplinas a nivel universitario pues reúne cualidades indispensables desde el punto de vista pedagógico.

La Papiroflexia desarrolla en el alumno habilidades tan evidentes como el desarrollo de la habilidad manual, de la concepción volumétrica, de la coordinación de movimientos y de la psicomotricidad fina, además fomenta el espíritu creativo, enseña al alumno a seguir instrucciones y ayuda a desarrollar la sociabilidad y el trabajo en equipo.

Dentro del campo de las matemáticas, ayuda al uso y comprensión de conceptos geométricos tales como diagonal, mediana, vértice, bisectriz, etc. y a la visualización de cuerpos geométricos. El proceso de creación y ejecución de una figura de papiroflexia fomenta la agilidad mental y desarrolla estrategias para enfrentarse y para resolver problemas de lógica o matemática.

MAPA DE CICATRICES.

Para el matemático, la belleza de la papiroflexia está en su simple geometría. En cada trozo de papel hay patrones geométricos, combinaciones de ángulos y rectas que permiten a la hoja llegar a tener variadas e interesantes formas. El matemático se pregunta: ¿consigue el diseño final una buena utilización de la geometría existente?, ¿es elegante el procedimiento de doblado, con líneas claras, dobleces compactos y proporciones sencillas y regulares? ¿se desperdicia papel o hay dobleces arbitrarios? ¿cada paso es útil y necesario?.

La mejor manera de entender un modelo de origami desde el punto de vista matemático es dibujar lo que se suele llamar un patrón de doblado. Para obtener el patrón de doblado de un modelo hay que desdoblar el papel, dejarlo liso, y dibujar sus dobleces más importantes; solo los que contienen su geometría esencial, no los detalles.



El patrón de doblado es, por necesidad, una abstracción, la reducción de una forma complicada a su estructura interna.

MATEMÁTICAS, PAPEL Y JUEGO.

Una manera de abordar las matemáticas desde un punto de vista asequible es a partir de los rompecabezas, muchos de los cuales son claramente “juegos matemáticos”, que a través del tiempo se han popularizado y perdido el nombre: “matemático” que asusta a un gran segmento de la población que experimenta desde los primeros pasos en su educación infantil, un rechazo.

EL ROMPECABEZAS DE H. VERRILL

LA DISECCIÓN DEL CUBO



Los juegos matemáticos constructivos nos van a permitir:

- Estudiar y analizar las propiedades de algunas figuras geométricas planas, tal como el rectángulo, el cuadrado y el triángulo equilátero. En estas propiedades se incluyeron la identificación de sus partes y de propiedades que permitieran su construcción.
- Construir poliedros regulares y estudiar sus propiedades básicas, particularmente sobre la forma y número de sus caras, así como la cantidad de vértices y de aristas.
- Hacer un estudio sobre las simetrías de algunos de los sólidos platónicos y sobre las relaciones que existen entre la forma de las caras de cada uno de ellos y el número de aristas que concurren en cada vértice.

Vamos a realizar la disección del cubo utilizando únicamente en la construcción de las figuras papel de formato cuadrado sin necesidad de cortes o pegamento.

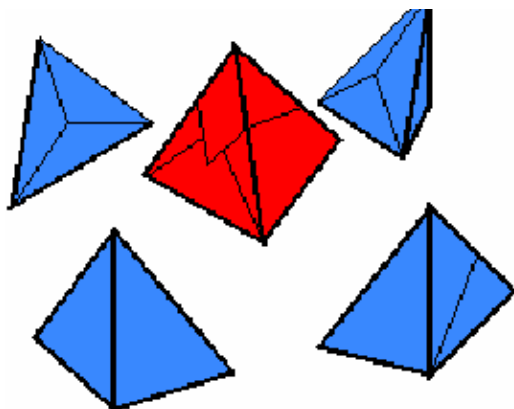
Seguiremos los diagramas de H. Verril.

En la elaboración utilizaremos 10 hojas de papel cuadrado todas de idéntico tamaño. Las figuras que vamos a realizar son las siguientes:

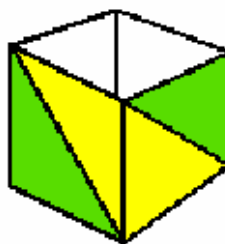
- ✓ Tetraedro de base cuadrada. 1
- ✓ Pirámides. 4
- ✓ Un cubo que nos servirá de caja contenedora.

La pregunta que se plantea es la siguiente:

¿es posible insertar estas cinco piezas....



En esta caja tan pequeña?



La realización de las figuras que componen el puzzle nos sirve para trabajar con los conceptos matemáticos correspondientes. Encontraremos en esta construcción grandes recursos didácticos que iremos acoplando al nivel de formación adecuado en cada caso.

METODOLOGÍA:

El taller lo llevaremos a cabo tres personas y está destinado a un número máximo de 50 personas. Eso nos permitirá el atender de manera personalizada a todos los asistentes. Los tres profesores nos turnaremos en la explicación de las figuras, lo que ayudará al dinamismo del curso. Entre los tres ayudaremos a la realización de las figuras pues el objetivo es la realización de los modelos completos por parte de todos los asistentes. Como apoyo visual se contará con una presentación en Power Point de cada uno de los apartados . Esto permitirá el introducir material gráfico como fotografías y diagramas.

CONSTRUYENDO TENSEGRIDADES SIMPLES

José Luis Mayobre Antón Errose Landa Jáuregui Covadonga Rodríguez-Moldes Rey

IES MUGARDOS (A Coruña)

Construir con palillos y plastilina o con cartulinas ha sido siempre la forma de entrar en contacto con los palillos. Caras, aristas y vértices se miden, dibujan, se cortan y montan. Se aprende manipulando.

Construir en tensión permite, además, estudiar conceptos geométricos como cuadriláteros, diagonales, coordenadas, ejes y planos de simetría, localización de puntos, rectas que se cruzan, posiciones de planos, proyecciones,... todo está al alcance de la mano y podemos observarlo desde cualquier ángulo, comprobar medidas, simetrías, perpendiculares, paralelas.

Como paso inicial en la construcción de tensegridades es necesario familiarizarse con el elemento mínimo de tensegridad: el prisma oblicuo triangular.

En el taller se abordará la construcción del prisma oblicuo triangular de distintas maneras y con diversos materiales, en primer lugar con tres barras y gomas elásticas, a continuación las gomas se sustituirán por cordones elásticos y por último se construirá la tensegridad simple rígida con cordones no elásticos.

Abordaremos la transformación de la tensegridad simple en la canónica de la que trata la comunicación *Tensegridad: una geometría exclusivamente tridimensional* y por último se explorarán otras construcciones como tensegridades simples con cuatro o más barras, tensegridades de más de un “piso”,...

EL PAPEL COMO MATERIAL DIDÁCTICO EN LA CONSTRUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA PLANA

M^a Consuelo Cañadas Santiago, Edson Crisóstomo do Santos, Sandra Gallardo Jiménez, Marta Molina González, María Peñas Troyano. (Los nombres de los coautores están ordenados alfabéticamente) ¹

grupo_pi@yahoo.es

Resumen

La geometría en el currículo de secundaria se introduce con la intención de proporcionar al alumno una mayor capacidad de comprensión de la organización espacial del mundo que nos rodea, exigiendo para ello un aprendizaje sistematizado. Con este propósito, el “Grupo PI” trabaja en el desarrollo de actividades para el aula utilizando un material económico y de fácil adquisición como es el papel. El objetivo es proporcionar al profesor un material eficaz para el trabajo en el aula y aproximar a los alumnos a la Geometría Plana a través de una serie de tareas estructuradas que logran una mayor significatividad del proceso de aprendizaje. Se emplearán axiomas del origami para crear secuencias que permitan la construcción de representaciones significativas en los procesos de aprendizaje. Por último, intentaremos mostrar a los profesores la utilidad del papel como material didáctico en la construcción de conocimiento geométrico.

1. Introducción

Quienes nos preocupamos por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas pretendemos hacer el trabajo cotidiano comprensible y ameno. De nuestro interés por desarrollar nuevas estrategias de enseñanza y explorar nuevos recursos surge la necesidad de trabajar con materiales didácticos cercanos a los alumnos y versátiles. Son numerosos los que podemos encontrar en nuestro entorno o que son de fácil elaboración (Grupo PI, 2002). En nuestro caso, hemos puesto de manifiesto que el doblado de papel (papiroflexia) puede ser un recurso didáctico importante, especialmente en el campo de la Geometría. La Geometría es la parte de las matemáticas más intuitiva, concreta y susceptible de ser ligada a la realidad. Sin embargo, tenemos la percepción de que sigue sin atribuírsele la importancia que le corresponde. Consideramos que la disponibilidad de materiales didácticos adecuados supone un incentivo suficientemente atractivo para rescatar a la Geometría escolar de su confinamiento.

Consideramos materiales didácticos adecuados aquellos que se adaptan a distintas capacidades y niveles de conocimientos previos de los alumnos, permiten el tratamiento de contenidos variados, facilitan el aprendizaje, fomentan el interés y son accesibles en dos sentidos: próximos al entorno del alumno, y baratos (Grupo PI, 2002). El papel

¹ El Grupo PI está formado por estudiantes de doctorado en Didáctica de la Matemática impartido por el departamento homónimo de la Universidad de Granada. Nuestra procedencia e intereses son muy variados (distintas nacionalidades, distintas profesiones, cuatro líneas personales de investigación...), pero nos une una profunda preocupación por el desarrollo de la Educación Matemática. Actualmente estamos trabajando (no exclusivamente en ello) en el uso de materiales didácticos aplicados a la enseñanza de la Geometría.

cumple con estas características y con él pretendemos acercar la Geometría a las aulas y manifestar nuestro interés por materiales didácticos adecuados.

Este trabajo viene desarrollándose y haciéndose público en distintos foros de Didáctica de la Matemática (Grupo PI, 2002; 2003a; 2003b; 2003c).

2. ¿Qué es la papiroflexia?

La Papiroflexia, originada en Japón con el nombre de ORIGAMI (de Ori=plegar y Kami=papel), es el arte de hacer figuras de papel. A pesar de su origen centenario, ha sido recientemente cuando la papiroflexia se ha convertido en un tema de interés matemático.

Según la corriente más ortodoxa de la papiroflexia, sólo está permitido plegar el papel, sin usar tijeras ni pegamento. Además se deberá utilizar como punto de partida un único trozo de papel cuadrado. Pero hay muchas modalidades menos estrictas de la papiroflexia. En este trabajo seremos flexibles con estas normas, lo que redundará en una mayor y más significativa gama de actividades y de objetos matemáticos que pueden ser abordados.

3. La papiroflexia como recurso para la enseñanza de la Geometría.

Entendemos que un material didáctico es cualquier objeto o recurso que, eventualmente, contribuya al desarrollo de los objetivos didácticos propuestos en un determinado programa. Es decir, aquellos objetos que pueden ayudar a conceptualizar, ejercitar y reforzar procedimientos e incidir en las actitudes de los alumnos en las diversas fases del aprendizaje.

El papel como material didáctico, proporciona una mayor implicación del alumno en las tareas a realizar, ya que la manipulación “constituye un modo de dar sentido al conocimiento matemático” (Segovia y Rico, 2001, p. 86). Además, mediante ésta el estudiante “adquiere una percepción más dinámica de las ideas” (Mora, 1995, p.104). Justificamos el uso de la papiroflexia como recurso didáctico en función de los criterios de Coriat (1997, p. 159): disponibilidad, equipamiento para todos los alumnos, cierta práctica por parte del profesor y de los alumnos antes de empezar a razonar matemáticamente con ellos y temporalización adecuada que permita extraer consecuencias a la mayoría de los alumnos.

El uso del papel permite la manipulación de representaciones de los objetos geométricos, un acercamiento intuitivo a la geometría del plano y del espacio mediante procesos de construcción lógicos, eficientes y económicos. Este trabajo se centra en el uso de la papiroflexia para trabajar elementos y propiedades de la Geometría Plana. Se compone de 36 fichas agrupadas temáticamente en 10 tareas y acompañadas de orientaciones didácticas. La Tabla 1 muestra la composición de una de dichas tareas. Cada una de las representaciones de los objetos matemáticos enumerados debe construirse con papel.

Tabla1

TAREAS	FICHAS	1º ESO	2º ESO	3º ESO	4º ESO
TAREA 5. TEOREMAS DE THALES Y DE PITÁGORAS	13. DIVIDIR UN FOLIO EN PARTES IGUALES		X	X	
	14. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS		X	X	

De forma análoga hemos analizado las 10 tareas que componen este trabajo: (1) Construimos puntos y trazamos rectas, (2) Mediatriz y bisectriz, (3) Ángulos, (4) Transportador de ángulos, (5) Teoremas de Thales y Pitágoras, (6) Triángulos, (7) Suma de los ángulos de un triángulo, (8) Lugares notables de un triángulo, (9) Cuadriláteros, (10) Pentágono y Hexágono.

En las distintas fichas indicamos el nivel educativo mínimo para el que se aconseja y aportamos al menos una solución, aquella que hemos considerado más clara y pensamos que requiere conocimientos matemáticos básicos, pretendiendo que puedan ser de utilidad para un mayor número de estudiantes. A continuación mostramos como ejemplo una de las fichas que componen la tarea 5:

Ficha N° 14: Demostración del Teorema de Pitágoras

Tópicos implicados: Mediatriz, simetría, transportar distancias, diagonal y construcción triángulos rectángulos.

Nivel Educativo: 2º ESO y 3º ESO

Formato Papel: Papel cuadrado

Propuesta para el alumno

1. Con un papel cuadrado, intenta realizar una demostración del Teorema de Pitágoras.
2. Explica cómo lo has realizado y por que has seguido estos pasos.

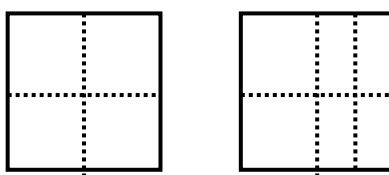
Instrucciones para el profesor

Objetivos: Percibir los elementos implicados en el teorema de Pitágoras:

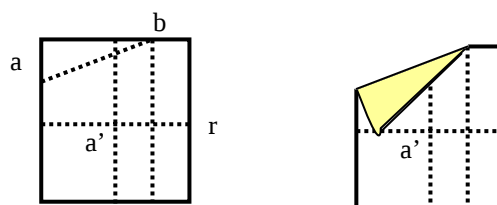
- a. Triángulo rectángulo.
- b. Comparación de Superficies.
- c. Y el propio teorema de Pitágoras.

Solución Ficha 18:

1. Cogemos un papel cuadrado y lo dividimos en cuatro cuadrados iguales. Posteriormente volvemos a dividir el lado de uno de estos cuadrados pequeños otra vez por la mitad.

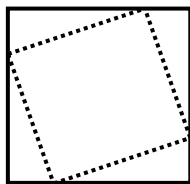


2. Llevamos el vértice a sobre el punto a' de la recta r y pasando por b construyendo así un triángulo rectángulo.

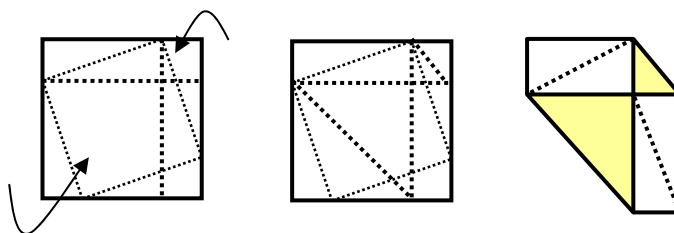


3. Repetimos el proceso con todos los vértices y desdoblamos. De esta manera hemos construido un cuadrado sobre la hipotenusa de nuestro triángulo rectángulo. El proceso ha sido ir construyendo perpendiculares a los vértices de la hipotenusa de los triángulos

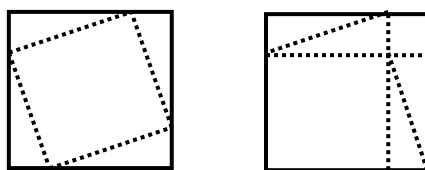
rectángulos contruidos. (Nota: Este cuadrado ha salido de un triángulo rectángulo de catetos en proporción 3-1 pero es posible realizar el mismo proceso con otras relaciones).



4. A continuación construimos los cuadrados sobre los catetos. Para ello hacemos uso de la simetría del cuadrado respecto a su diagonal, transportando distancias.



5. Desdoblamos y el teorema de Pitágoras queda demostrado. Nota: Esta sólo es una de las muchas demostraciones posibles.



Pistas para ayudar a los alumnos:

1. Recordamos teorema de Pitágoras.
2. Construimos un cuadrado sobre un segmento.
3. Propiedades de un cuadrado.
4. Dibujamos esta demostración en la pizarra.

6. Conclusiones y perspectivas

En este trabajo fundamentamos el uso coherente del papel como recurso didáctico en la enseñanza de la Geometría Plana. Disponemos de una amplia variedad de tareas para el trabajo con tópicos muy diversos, que abarcan la construcción de conceptos, el reconocimiento de propiedades, el establecimiento de relaciones, etc. El ejemplo que se ha mostrado podrá ayudar al profesor a decidir si el uso de este material puede facilitar o mejorar su práctica educativa en el contexto que ya se ha señalado. En la actualidad estamos trabajando en cuestiones relativas a la Geometría del Espacio, como la construcción de poliedros mediante el ensamblaje de módulos de papel.

El abanico de posibilidades no se agota aquí. Al contrario, hemos conseguido con este trabajo atisbar la potencia del papel como recurso didáctico y somos conscientes del ingente trabajo que queda por hacer.

Referencias

- 1 CORIAT, M. (1997) Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Ed.), La educación matemática en la Enseñanza Secundaria (pp. 155-177). Barcelona: Horsori.

- 2 DE LA PEÑA, J. (2001) Matemáticas y Papiroflexia. Madrid: Asociación Española de Papiroflexia
- 3 ENGEL, P. (1994) Origami From Angelfish to Zen. Dover
- 4 GRUPO PI (2002) Materiales Didácticos en la resolución de problemas. En J.M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno, M. Peñas (Eds.). Investigación en el aula de Matemáticas. Resolución de problemas. Granada: SAEM Thales
- 5 GRUPO PI (2003a) Geometría con papel. Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.
- 6 GRUPO PI (2003b) Poliedros: lenguaje y representación espacial. Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.
- 7 GRUPO PI (2003c) Algunas reflexiones sobre la resolución del problema del tablero de ajedrez. Comunicación presentada a las XI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, realizadas 2,3,4 y5 de julio en Canarias.
- 8 MORA, J.A. (1995). Los recursos didácticos en el aprendizaje de la geometría. UNO nº 3. 101-115.
- 9 SEGOVIA, I. y RICO, L. (2001) Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), Didáctica de la matemática en la educación primaria (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.

Páginas Webs:

http://ddm.ugr.es/personal/grupo_pi
<http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/latira.htm>
<http://www.uaq.mx/matematicas/origami/taller1.html>
<http://web.merrimack.edu/hullt/geoconst.html>
http://www.cnice.mecd.es/Descartes/Geometria/La_razon_aurea/unidad_didactica.htm
www.pajarita.org
www.cientec.or.cr/matematica/origami/transportador.html

GEOMETRÍA CON LA CALCULADORA CLASSPAD 300

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
IES Jándula de Andújar (Jaén)

José María Chacón Íñigo
IES Llanes de Sevilla

La calculadora Classpad 300 de CASIO contiene un módulo que permite la realización de distintas construcciones de geometría dinámica que constituyen un buen recurso para incorporarla al aula de Matemáticas.

Con el objetivo de ofrecer al profesorado los conocimientos y materiales necesarios para utilizar esta calculadora como herramienta para construir y descubrir distintas propiedades geométricas se propone la realización de este taller.

A través de ejemplos prácticos el profesorado conocerá las distintas funciones y opciones con las que realizar distintas figuras a partir de elementos como puntos, rectas, triángulos, circunferencias, etc., así como estudiar distintas propiedades y relaciones entre los elementos construidos, finalizando con el trazado de lugares geométricos y con distintas opciones disponibles en la calculadora Classpad para simular animaciones a partir de los objetos construidos.

Los distintos ejemplos expuestos y propuestos corresponderán a los niveles educativos de ESO y de Bachillerato, además para su realización dispondremos de un número suficiente de calculadoras.

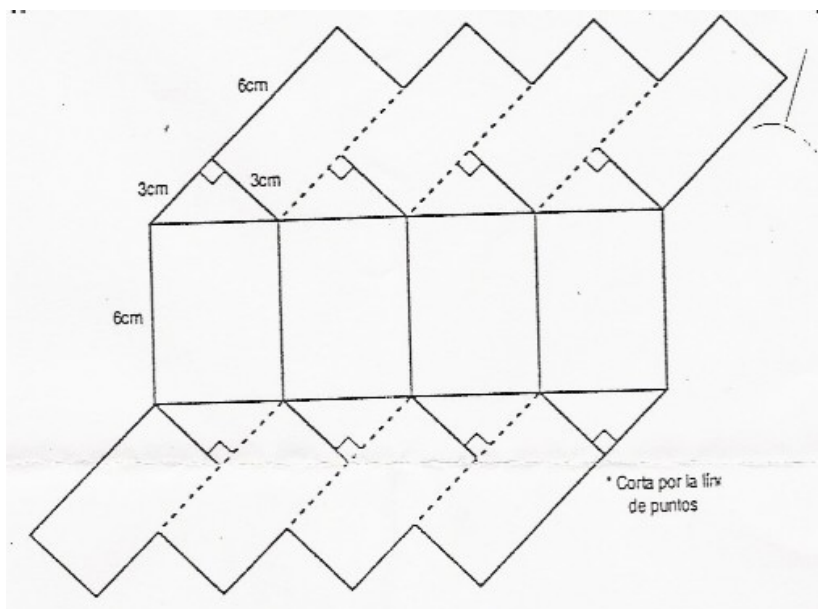
Esta actividad se propone a través del convenio que la SAEM THALES mantiene con CASIO para la formación del profesorado en el uso de la calculadora gráfica.

INNOVACIÓN PRÁCTICA CON PLANTILLAS MATEMÁTICAS EN EL AULA

Simón O' Sullivan

Esta sesión es una introducción para conocer tres plantillas, El Mathaid, Mathmaster y Proliner. El Mathaid y Proliner forman el Kit Mathaid y El Mathmaster y Proliner forman el Kit Mathmaster. Diagramas de los dos se pueden encontrar al fin de esta redacción.

Quería empezar esta sesión con una petición ¿Pueden visualizar que tipo de forma tiene este sólido cuando esté construido?



El Kit Mathaid fue diseñado para ser utilizado a partir del tercer ciclo y en particular el bachillerato de enseñanza secundaria y sus usos son en la mayoría obvios. Todas las formas de las funciones con la excepción de la curva normal y la gran curva seno, están dibujadas a escala $1\text{cm} = 1$ unidad, al cambiar esta escala conseguimos el efecto de cambiar la función. Por ejemplo $y = x^2$ será $y = 2x^2$, $y = 0.5x^2$ etc. También la plantilla puede ser útil para demostrar transformaciones de varias funciones.

Una de las áreas en que las plantillas pueden ser muy eficaces es en la geometría. Hace algunos años mi padre acudió a un congreso de Profesores de Matemáticas donde uno de los problemas que se pusieron de manifiesto fue el de1 escaso estudio que los alumnos dedicaban a la geometría en tres dimensiones.

Los problemas derivados de este proceder eran sufridos por profesores universitarios que confesaban tener graves problemas a la hora de explicar sus asignaturas ya que el alumnado presentaba un escaso conocimiento de conceptos espaciales.

Esta es la causa del desarrollo del Mathmaster que de una manera modesta está dirigido a paliar las deficiencias antes comentadas. El Mathmaster puede ser utilizado por alumnos desde los diez años. Los ejercicios que se exponen a continuación llevan a los estudiantes a desarrollar y dibujar varios poliedros y han sido formulados para alumnos de 1.3 años.