



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 4

“ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD: COMO IMPEDIR EL ODIO A LA ESTADÍSTICA”

TALLER

TALLER PSICOPROBABILIDAD

Grupo LaX¹

Introducción

El tratamiento escolar de la estadística y la probabilidad se emprende para estudiar fenómenos aleatorios que se identifican por su imprevisibilidad. Como dice Sixto Rios (1973), las situaciones aleatorias son aquellas en que las mismas condiciones o causas pueden dar lugar a diferentes resultados o efectos. Esta caracterización se aplica a situaciones del mundo físico que no podemos predecir con absoluta seguridad de acierto. El modelo que le aplicamos a estos sucesos es el de lanzar dados, de ahí que el estudio escolar de la probabilidad se modelice en los juegos de azar, en general, y de los dados en particular.

El estudio estadístico de fenómenos no predecibles ha permitido la inferencia de leyes empíricas que luego se han visto explicadas dentro de teorías que hoy en día engrandecen la ciencia. Sin embargo, el tratamiento del azar y la probabilidad en la enseñanza obligatoria continúa basándose en fenómenos naturales o sociales que pueden modelizarse con el dado.

¹ Grupo LaX: Belén Cobo, Pablo Flores, ... y otros

Una de las funciones de la educación probabilística en la educación secundaria es la preparación del ciudadano para afrontar situaciones de azar e incertidumbre. Pero ¿es posible explicar con el modelo de dados que la máquina tragaperras no “está caliente” y tiene muchas probabilidades de darle el premio a un jugador que se considera con la sensibilidad adecuada para ello? ¿Cómo convencer a un niño de que deseándolo mucho tiene la misma probabilidad de que le salga un 5 en el dado que sin desearlo, cuando la publicidad –no sólo la engañosa- le está tratando de convencer del poder de su voluntad? ¿Cómo rebatir la publicidad sobre la esperanza de felicidad que causa la lotería y demás sorteos semanales, para que los ciudadanos actúen con mesura y racionalidad ante los mismos? En esencia ¿cómo alterar las creencias de los alumnos y los ciudadanos sobre los fenómenos que tienen que ver con el azar?

En este taller queremos proponer juegos que confronten a los alumnos con sus creencias sobre el azar y la probabilidad. Para ello hemos buscado aquellos que exigen que los jugadores manifiesten sus expectativas y las confronten con las de otros, valiéndose de situaciones que superan el modelo de los dados para adentrarnos en los *juegos de estrategia*.

Enseñanza y Aprendizaje del Azar

La noción de aleatoriedad o la comprensión del concepto de probabilidad están sujetas a múltiples interpretaciones por parte de los alumnos, profesores y personas en general (Batanero y cols., 1994) y otro tanto ocurre con muchos términos en estadística. Esta situación influye en las conclusiones sacadas por los alumnos en situaciones de incertidumbre.

Se ha evidenciado que las ideas de probabilidad, a menudo, aparecen en conflicto con las experiencias de los estudiantes y su visión del mundo. Los alumnos comienzan la enseñanza con falsas concepciones relacionadas con el azar, la probabilidad y la estadística.

El diagnóstico de la existencia de concepciones erróneas o patrones de errores que reflejan una mala comprensión de un concepto estadístico, no supone la necesidad de sustitución de una estructura cognitiva sino su reestructuración. La validez de una idea no es intrínseca a ella sino una característica vinculada al contexto. Los errores sistemáticos se consideran por tanto, dentro de una perspectiva contextual, en la que las concepciones erróneas no son reemplazadas sino que se construye una nueva estructura cognitiva.

Cuando intentamos desarrollar, a través de la enseñanza, un razonamiento probabilístico correcto y coherente encontramos que los alumnos presentan errores de concepción y de interpretación, sesgos y, en palabras de los psicólogos, tendencias emocionales. Las causas de estas disfunciones pueden ser dificultades lingüísticas, falta de herramientas lógicas, dificultades para extraer la estructura matemática de las experiencias, la dificultad para comprender el concepto de azar (Fischbein et al., 1991), dificultad con los conceptos de números racionales y razonamiento proporcional, conflicto entre las ideas de probabilidad y las experiencias de los estudiantes y su manera de ver el mundo, un rechazo hacia la probabilidad por haberle sido presentada inicialmente en forma abstracta y formal (Garfield y Alhgreen, 1988) y por haber enfatizado en los currículos aquellos aspectos deterministas de la ciencia.

Fischbein et al. (1991) han tratado de obtener una mejor comprensión de los orígenes y naturaleza de algunos obstáculos intuitivos probabilísticos. Los siguientes se

presentan como algunos de los factores que explican las distorsiones en los juicios probabilísticos:

- Los individuos no tienen una definición clara de los términos “cierto”, “posible” e “imposible”. Algunos confunden “raro” con “imposible”.
- Los conceptos de sucesos compuestos y simples entrañan también interés didáctico. Concretamente han identificado las situaciones siguientes: No hay una comprensión natural del hecho de que, en un espacio muestral, posibles resultados deberían distinguirse y contarse separadamente si el orden de sus componentes elementales es distinto. Trabajando también con sucesos compuestos encuentran que, generalmente, muchos sujetos parecen poder relacionar espontáneamente las estimaciones de probabilidad a la magnitud de los espacios muestrales aunque, en algunas ocasiones, la descripción de estos espacios muestrales es incorrecta. La magnitud de los números de las probabilidades que tienen que comparar representa el principal factor en las decisiones de los sujetos.
- La capacidad para abstraer estructuras matemáticas idénticas de diferentes experimentos. Por ejemplo, la probabilidad de obtener (5, 5, 5) lanzando un dado tres veces o arrojando simultáneamente tres dados.
- La capacidad de sintetizar lo necesario de lo aleatorio. La idea de que un resultado estocástico depende sólo del azar, con independencia de cuales sean las condiciones dadas, hace luego cualquier predicción infundada.

La identificación correcta del espacio muestral se presenta como un factor importante en la evaluación probabilística de los sucesos. En los sujetos sin preparación probabilística, existe una capacidad intuitiva para evaluar la magnitud del espacio muestral correspondiente a una cierta experiencia estocástica. Algunos obstáculos que interfieren en la correcta evaluación probabilística serían:

- a) Ausencia de un respaldo natural e intuitivo para contar separadamente como distintos resultados, los mismos grupos de resultados con diferentes secuencias (por ejemplo, al lanzar un dado, obtener 1, 3 y 3, 1).
- b) Los sujetos tienden a olvidar, algunas veces, las condiciones específicas de la experiencia estocástica y el espacio muestral se construye sin considerar las respectivas limitaciones (por ejemplo considerar los números 7, 8,... en un juego de dados)
- c) Muchos sujetos no poseen una técnica sistemática para producir todos los posibles resultados de una experiencia.

Propuesta de juegos

Tal como indica Morgenstern (1968), en los juegos en los que el resultado no depende sólo del azar, sino también de los actos de otros jugadores y de las expectativas que éstos tengan acerca de cuáles van a ser los actos presentes y futuros de uno mismo, dan lugar a problemas mucho más difíciles, que son los que asume la Teoría de Juegos. Pero además la inferencia estadística puede ser considerada como un juego en el que el estadístico que intenta descubrir los secretos de la naturaleza, se enfrenta con ésta Hurwicz (1968).

Pero el alumno no es un estadístico, ni los secretos de la naturaleza le influyen tanto como para poner en juego sus creencias probabilísticas, sino que nos enfrentamos con adolescentes impulsivos, que están siendo bombardeados por informaciones y motivaciones de ganancias económicas, y que están generando creencias sobre el azar que tienen que poner en cuestión a partir de las teorías matemáticas de la probabilidad y la estadística. Por tanto nuestra propuesta es desarrollar en clase juegos de estrategia que obliguen a enfrentarse al alumno con sus expectativas, confrontándolas con otras formas de concebirlas, y todo ello de una manera emotiva. Hemos llamado a nuestro taller de psicoprobabilidad, ya que pretendemos que el niño se implique más que lo hace en su actuación escolar, dándole oportunidad de que confronte las posturas que adopta en el juego con las que adoptan los demás, y que han debido ser tomadas en cuenta al comienzo.

El desarrollo de este taller tiene un doble objetivo. Por un lado, motivar el interés de las teorías sobre el azar para afrontar situaciones cotidianas, mostrando la conveniencia de realizar estos análisis antes de tomar decisiones y los resultados que acarrearán estas decisiones.

Por otro lado, pretendemos definir o caracterizar los juegos de estrategia, diferenciando sus elementos:

- Situación aleatoria en la que tiene que acertar o ganar (por ejemplo, ***ganar en el bingo, acertar la quiniela***)
- Dependencia de postura de otros para producir más ganancias, o para ganar en sí (se le añade, ***los cartones los rellena cada cual y cada uno dice los números, sin esperar a que sea el bombo, con la condición de que cada uno dice números que no tiene en el cartón; para ganar más dinero en la quiniela tengo que proponer una solución que no sea muy esperada***)
- Su jugada está influida por el estudio de los dos elementos: fenómeno aleatorio (modelo dado: ***el bingo es un fenómeno aleatorio; el acertar la quiniela es un fenómeno aleatorio***) y por la forma en que espera que los otros se representen este fenómeno (***tengo que colocar los números que van a decir los demás, y tengo que decir los números que no van a poner los demás; tengo que buscar combinaciones entre las posibles que sean menos frecuentes***).

El taller consiste en una serie de juegos con un nexo común: están relacionados con situaciones en las que, o bien no es fácil calcular la probabilidad de ganar, o bien el hecho de que las apuestas de los compañeros influyen en nuestra propia apuesta, lo que nos hace reflexionar sobre la probabilidad subjetiva que los jugadores asignan a la posibilidad de ganar. Además el hecho de apostar permite comparar esa probabilidad de ganar con el premio que se obtendría, que en la mayoría de los casos dependerá de los demás participantes.

Para el desarrollo del taller, los asistentes recibirán una cantidad de puntos que deberán ir apostando en los distintos juegos que se propondrán, para al final, con los puntos obtenidos se podrá participar en el último y definitivo juego, para el que se pueden y deben usar los resultados de los anteriores.

Para terminar, algunos ejemplos de los juegos que formarán parte del taller:

“MUCHO POR POCO”

Cada jugador apuesta por los números naturales que quiera a partir del uno. Gana la persona que consiga apostar por el número más pequeño sin que nadie más haya apostado por ese mismo número.

“LA CARTA ÚNICA”

En la primera parte, cada jugador piensa una carta de la baraja y se anotan todos los resultados en una gráfica. A continuación, cada jugador debe pensar una carta que nadie más piense. Gana quien consiga esto último.

“NO TODOS LOS MATEMÁTICOS SON ORDENADOS”

Cinco jugadores piensan un número del uno al cien y, sin hablarse ni comunicarse de otra manera, deben colocarse ordenados desde el uno. El resto de jugadores apuestan por la que crean que ha sido la ordenación correcta, según el comportamiento de los cinco primeros.

“APUESTA POR EL MAYOR”

Se juega por parejas. Cada jugador anota dos números distintos (del uno al cien) en trozos de papel. Uno del los papeles se coloca hacia arriba y el otro hacia abajo. El otro jugador de la pareja debe adivinar si el número mayor es el que está levantado o el otro.

... y otros juegos más.

Referencias:

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R., y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 25(4), 527-547.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Fischbein, E., Sainati, M., y Sciolis, M. (1991). Factors affecting Probabilistics Judgements in Children and Adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Garfield, J., y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.

Grupo LaX. (2003). Trabajo cooperativo en el aula de matemáticas. En *Uno*, 31, 116-123

Hurwicz, L. (1968). Teoría de juegos y decisiones. En Carnal, R. y otros (Dir.), *Matemáticas en las ciencias del comportamiento*. Madrid, Alianza. (p. 204-215).

Moreno, A. (2003). *Estudio teórico y experimental sobre el aprendizaje de conceptos y procedimientos inferenciales en el nivel de secundaria (Theoretical and experimental*

study on inferential process and concepts learning in secondary level, Ph. D.). Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Moreno, A. y Vallecillos, A. (2001). Exploratory Study on Inferential' Concepts Learning in Secondary Level in Spain. In M. van der Heuvel (Ed.): *Proceedings of the 25th Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education (PME)*, p. 343. The Netherlands: Freudenthal Institute and Utrecht University.

Moreno Verdejo, A. J., Vallecillos Jiménez, A. (2002). Exploración de heurísticas y concepciones iniciales sobre el razonamiento inferencial en estudiantes de secundaria. *Educación Matemática*, v. 14, n. 1, 62-81.

Morgenstern, O. (1968). La teoría de juegos. En Carnal, R. y otros (Dir.), *Matemáticas en las ciencias del comportamiento*. Madrid, Alianza. (p. 189-203).

Ríos, S. (1973). *Métodos estadísticos*. Madrid, Ediciones del Castillo.

Vallecillos Jiménez, Angustias y Moreno Verdejo, Antonio J. (2003). Esquema para la instrucción y evaluación del razonamiento en estadística inferencial elemental. *Revista Educación y Pedagogía*. Vol. XV, No. 35. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación.