



*Federación Española de Sociedades de
Profesores de Matemáticas*



*Sociedad Castellano Manchega de
Profesores de Matemáticas*

ACTAS DEL CONGRESO DE MATEMÁTICAS XII JAEM

NÚCLEO 6

“MATERIALES PARA CONSTRUIR LAS MATEMÁTICAS. LA MATEMÁTICA SE HACE TANGIBLE”

TALLERES

TALLER DE MATEMÁTICAS CON ANILLAS.....	997
PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL USO DE PUZLES DE HIERRO, MADERA Y ALAMBRE EN LA ENSEÑANZA.....	1003

TALLER DE MATEMÁTICAS CON ANILLAS

Antonio Bueno Aroca
I.E.S Parque Lineal de Albacete

Juan Mat3nez-Tebar Gim3nez
I.E.S. Alto Guadiana de Tomelloso

Resumen

Presentamos un modo para acercar al alumnado de secundaria al uso de m3todos num3ricos para estudiar juegos comerciales de anillas, tambi3n mediante una aproximaci3n m3s detallada estudiamos la topolog3a de los mismos y la equivalencia entre juegos aparentemente distintos.

1. Introducci3n.

En los mercadillos podemos encontrar juegos de anillas destinados a entretener a quienes tengan tiempo que “perder” en manipulaciones que parecen no conducir a ning3n lugar. Seguramente, muchos de nosotros hemos jugado en alguna ocasi3n con ellos, y, seguramente, en ese momento nos hubiese gustado poder sorprender a quienes nos observaban con una resoluci3n exitosa. En cualquier caso, el hecho es que este tipo de juegos suele atraer la atenci3n del p3blico en general, y es por eso por lo que aqu3 plantemos proponer un “trueque” a nuestros alumnos, nosotros les mostramos un camino para que intenten resolver el juego a cambio de que ellos realicen un estudio num3rico de los movimientos necesarios para concluirlo. Del mismo modo, proponemos el estudio de juegos aparentemente distintos, pero de estructura semejante, con el objeto de introducir el concepto de semejanza topol3gica.

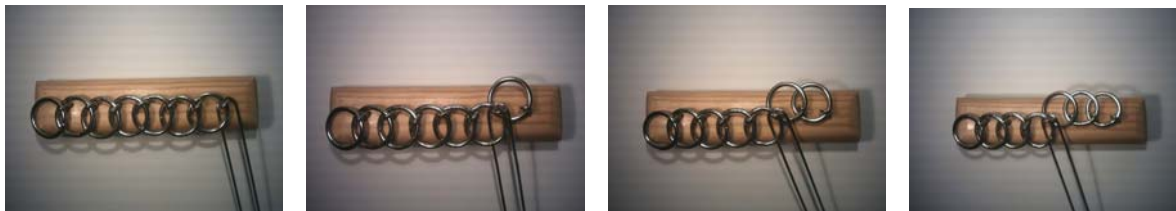
2. Descripci3n del juego.

El primer juego que presentamos es el referente para este trabajo, consta de siete clavos m3viles a los que est3n unidos siete anillas y un objeto esclavo que puede moverse por las anillas, pero que, aparentemente, no puede liberarse de ellas. En la imagen siguiente podemos observar el aspecto del juego:



El objetivo del juego es realizar movimientos con el objeto esclavo para liberarlo de la prisión que forman anillas y clavos.

Para alcanzar el objetivo propuesto, debemos plantear objetivos intermedios, en particular debemos intentar que el objeto esclavo avance de clavo en clavo, como se muestra en la siguiente secuencia de imágenes:



La curiosidad matemática que tiene este juego es que, llamando movimiento del objeto esclavo a todo aquel que hace que cambie de un clavo a otro su posición, la cantidad de movimientos que deben realizarse con el objeto esclavo para pasar de un clavo a otro, y para finalmente ser liberado es la siguiente:

Paso del objeto esclavo des un clavo a otro						
	del primero a fuera	del 2º al 1º	del 3º al 2º	del 4º al 3º	del 5º al 4º	del 6º al 5º
Movimientos	1	1	2	4	8	16

De manera que, sumando la cantidad de movimientos obtenemos:

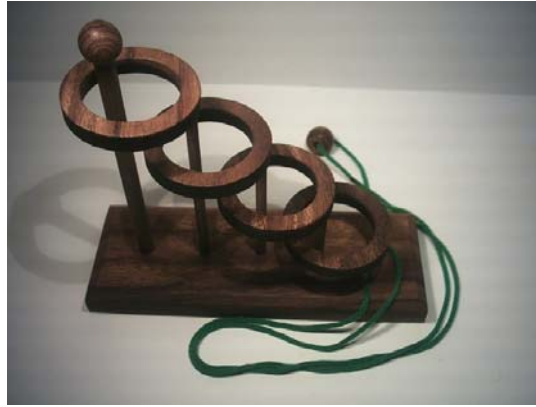
$$1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 64 .$$

Son, por lo tanto necesarios 64 movimientos del objeto esclavo, esta fórmula puede generalizarse para n clavos, resultando:

$$1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 2^{n-2} = 1 + \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 1 + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1}$$

El siguiente juego es una variante del anterior en la que únicamente aparecen cuatro anillos fijos y un pivote, que suple al último anillo del juego anterior, siendo ahora el esclavo un elemento no rígido (una cuerda). El método de resolución el mismo y la cuenta del número de movimientos necesarios es la correspondiente a cinco anillos, es decir 16 movimientos. Cabe resaltar el hecho de que la única función del último anillo del juego anterior es servir de tope para que el segundo anillo no quede libre.

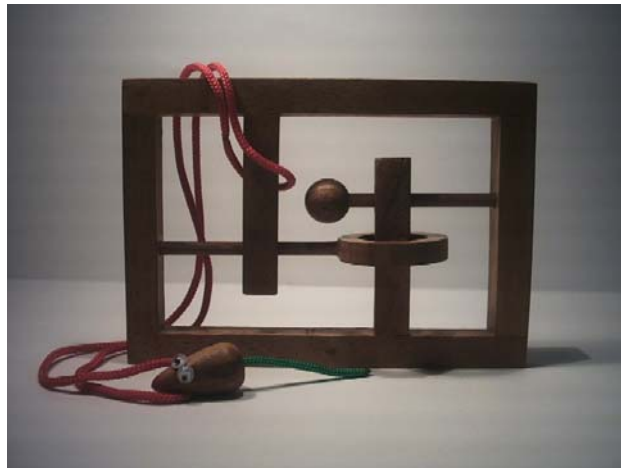
La imagen siguiente muestra el aspecto de esta variante:



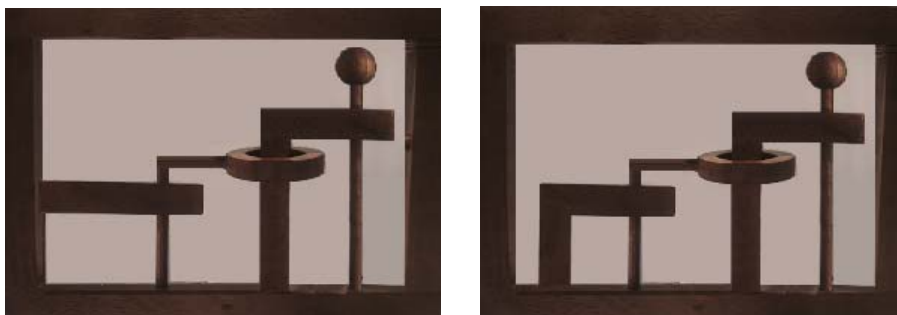
El juego siguiente es una variación más artística del juego, presentándose con una estructura redundante que sirve de soporte al mismo. Una sencilla variación de la forma nos permite ver que el juego es igual al primer juego mencionado en este apartado, pero con solo tres anillos, es decir, únicamente hacen falta 4 movimientos para liberar al objeto esclavo:



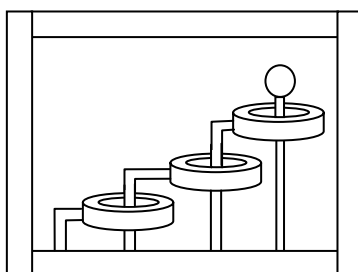
El último juego que presentamos es una variación topológica de los anteriores, de ahí su interés. Aparentemente es un juego diferente, con la única similitud de que un objeto esclavo, no rígido, debe ser liberado. Para ello debe realizarse un determinado recorrido, introduciendo el objeto esclavo por dos agujeros practicados en madera y un anillo. Los agujeros de la madera están atravesados por el pié del anillo y del pivote respectivamente, siendo lo suficientemente anchos para que el objeto esclavo también pueda atravesarlos. En la imagen siguiente podemos observar este juego:



Para relacionar este juego con los anteriores es conveniente realizar una transformación en dos pasos, en primer lugar transportando todos los elementos a la base del juego, doblando las piezas cuando sea necesario, para ilustrar este proceso mostramos el mismo en dos pasos:



A continuación, transformando los agujeros practicados en la madera en anillos obtenemos un juego similar al mostrado en segundo lugar en esta sección:



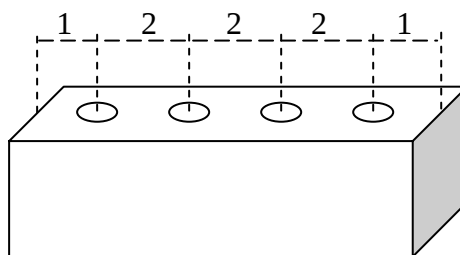
En este caso con tres anillos y un pivote, es decir, que serán necesarios 8 movimientos para liberar al objeto esclavo. Teniendo en cuenta que podemos considerar que éste objeto esta dentro del marco de madera que rodea al juego, para liberarlo podemos visualizar los pasos necesarios en la construcción de objeto semejante, sobre todo para saber, en cada momento, por qué cara de cada agujero debemos introducir el objeto esclavo.

3. Desarrollo del taller.

Describimos a continuación los pasos que daremos en la práctica propuesta por este taller, comenzando por la enumeración de los materiales necesarios:

- Madera: pieza de dimensiones $2 \times 2 \times 8$ cm.
- Alambre de 1'5 mm de diámetro: cuatro piezas de 8 cm y una de 30 cm.
- Plástico: cinco anillas de cortina.

Primer paso: hacer cuatro agujeros en la pieza de madera, sobre una línea imaginaria centrada en una de las caras rectangulares de la pieza y con distancia de 2 cm entre agujeros y 1 cm de agujero final a borde.



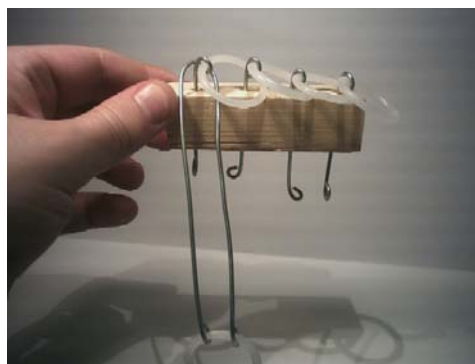
Segundo paso: introducir en el primer agujero una pieza de alambre de 8 cm y hacer un doblez en el extremo que quede en la parte inferior de juego, como tope para que el alambre quede atrapado en el agujero. Hacer lo mismo en el otro extremo del alambre, pero atrapando en el doblez un anillo de plástico.

Tercer paso: introducir en el segundo agujero una pieza de alambre de 8 cm y hacer un doblez en el extremo que quede en la parte inferior de juego. Introducir el anillo del primer alambre en el segundo alambre y hacer un doblez en este extremo, atrapando con el doblez un anillo de plástico.

Cuarto paso: repetir el paso tercero en los agujeros restantes de la pieza de madera.

Quinto paso: doblar por la mitad la pieza de alambre de 30 cm, hasta hacer coincidir sus extremos, realizar un doblez en cada extremo, atrapando en ambos una anilla de plástico, que hará de nexo entre ambos extremos.

Las imágenes siguientes muestran como quedarán los juegos:



Una vez contruidos los juegos, se explicará el concepto de movimiento y se dejará un tiempo para que se tome contacto con el manejo.

El objeto de este taller no es explicar como se resuelve el juego, eso acabaría con el encanto del mismo, por ello el taller concluirá con la exposición de la descripción del juego presentada en el apartado anterior de este trabajo.

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA EL USO DE PUZZLES DE HIERRO, MADERA Y ALAMBRE EN LA ENSEÑANZA

Antonio Javier Serrano Mora

IES Sierra del Segura
Elche de la Sierra (Albacete).

Resumen

El taller se dividirá en dos partes. En la primera se presentará una serie de puzzles de hierro, alambre y madera (que los asistentes podrán manipular) y se propondrá una metodología para su uso en la enseñanza: los trabajos de investigación de larga duración. Se mostrarán guiones de trabajo en los que proponemos a alumnos de distintos niveles la resolución de los puzzles mediante la técnica general de resolución de problemas tan estudiada por los pedagogos y profesores (Polya y de Guzmán, entre otros) cuyas fases son: la observación, el diseño de una estrategia, la aplicación de ésta y la evaluación y profundización. Se mostrará también que estos puzzles permiten desarrollar determinados aspectos matemáticos que los alumnos pueden aprovechar. En la segunda parte del taller se presentará un puzzle de grandes dimensiones, ideal para desarrollar estrategias de trabajo en grupo.

Casi nadie duda ya de que es necesario introducir en los procesos de aprendizaje de las matemáticas (y también de otras materias) recursos didácticos distintos a los tradicionales, tales como calculadoras científicas y gráficas, programas informáticos, búsquedas en Internet, aparatos de medida de ángulos, de longitudes... sin abandonar, por supuesto, los momentos de papel y lápiz tan, a veces, creativos y satisfactorios. Es nuestra intención mostrar en este taller una propuesta metodológica para el uso de los puzzles en la enseñanza que estamos empezando a desarrollar en el IES Sierra del Segura (Elche de la Sierra, Albacete), desde el Departamento de Matemáticas, en la que usamos este material como sujeto y objeto de estudio. Sujeto en tanto que el puzzle nos propone una serie de contenidos matemáticos que se pueden aplicar y/o desarrollar y objeto en tanto que el puzzle es, en sí mismo, un problema que hay que resolver con una metodología adecuada y bastante estudiada por muchos pedagogos.

El uso de los juegos y puzzles por matemáticos de primer nivel no es nada nuevo. Desde Euclides hasta von Newman, pasando por Fibonacci, Cardano, Pascal, Fermat, Gauss y otros, los puzzles y juegos han sido motivo de deleite y, en ocasiones, de inspiración científica, tal es el caso del nacimiento de la teoría de probabilidades. Decía Miguel de Guzmán a propósito de los juegos y su relación con la enseñanza



Figura 1. Puzzle llamado Trapecio

de las matemáticas que “...el juego bien escogido y bien explotado puede ser un elemento auxiliar de gran eficacia para lograr algunos de los objetivos de nuestra enseñanza más eficazmente (...) El objetivo fundamental [de la enseñanza] consiste en ayudarle [al alumno] a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, de modo armonioso (...) Por la semejanza de estructura entre el juego y la matemática, es claro que existen muchos tipos de actividad y muchas actitudes fundamentales comunes que pueden ejercitarse escogiendo juegos adecuados tan bien o mejor que escogiendo contenidos matemáticos de apariencia más seria (...) Lo que sobre todo deberíamos proporcionar a nuestros alumnos a través de las matemáticas es la posibilidad de hacerse con hábitos de pensamiento adecuados para la resolución de problemas, matemáticos y no matemáticos” (véase *Juegos matemáticos en la enseñanza*, en las actas de las IV J.A.E.M., Santa Cruz de Tenerife, 1984; disponible en la dirección www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/juemat/juemat.htm).

El principal contenido matemático (aunque no es exclusivamente matemático) que pretendemos desarrollar con los puzles es la resolución de problemas. Si queremos que nuestros alumnos sean capaces de resolver problemas, tenemos que entrenarlos para ello, hemos de proporcionarles espacios donde se enfrenten a problemas que han de resolver. Tenemos que proporcionarles, pues, ámbitos de investigación matemática. Tan importantes son estos contenidos (resolución de problemas e investigación) que, formulados como objetivos que hay que conseguir, aparecen en cuatro de los nueve objetivos de las matemáticas de ESO (véase el RD 937/2001 de 3 de agosto, BOE de 7 de septiembre) y en seis de los diez establecidos para las matemáticas del Bachillerato (véase RD 938/2001 de 3 de agosto, BOE de 7 de septiembre).

Polya en 1957 estableció en su obra *¿Cómo resolverlo?* las distintas fases que se han de recorrer en la resolución de un problema. Más tarde, de Guzmán las explicó maravillosamente en la conferencia citada y, sobre todo, en su magnífico libro *Para pensar mejor*. En su terminología, las cuatro fases son: antes de hacer trataré de aprender, tramaré una estrategia, miraré si mi estrategia me lleva al final y sacaré jugo al trabajo realizado. Además de este contenido, que podríamos llamar troncal, cada puzle puede estar relacionado con algunos contenidos matemáticos de tipo topológico, geométrico, numérico o algebraico. No renunciamos, evidentemente, a que los alumnos descubran esta relación.

Nuestra propuesta metodológica se basa en los trabajos de investigación matemática de larga duración. Somos de la misma opinión que expresaron los expertos del informe Crockcroft (*Las matemáticas sí cuentan*, Ministerio de Educación y Ciencia, 1985) que decía que, en cualquier nivel de la enseñanza de matemáticas, dos de los cinco elementos indispensables son: la resolución de problemas y los trabajos de investigación (los otros tres elementos son: la exposición del profesor, la discusión entre profesor y alumnos y entre alumnos y la consolidación y práctica de técnicas y rutinas básicas).

En estos trabajos, el investigador es el alumno. Debe investigar cómo resolver un puzle y los contenidos matemáticos que están relacionados con él. A la vez que el puzle, le proporcionamos un guión de trabajo en el que, mediante preguntas o indicaciones más o menos explícitas (según el nivel) le hacemos recorrer las cuatro fases de la resolución de problemas. El profesor tiene que estar bien entrenado en este

tipo de material para tener la capacidad de seleccionar los más adecuados según el nivel de los alumnos a los que les vaya a encargar el trabajo.

La materia optativa llamada *Taller de matemáticas* puede ser un buen lugar para proponer la resolución de puzzles. Sin embargo, en muchos Centros no existe esta materia y, en los que existe, sólo es cursada durante un año por los alumnos que la eligen. En cambio, el objetivo de resolver problemas es de obligado cumplimiento para todos los alumnos y, creemos, debe ser trabajado en todos los cursos, incluido, por supuesto, el Bachillerato.

Por ello, pensamos que el ámbito más adecuado para llevar a clase los puzzles y sacarles todo su provecho es el de estos trabajos de investigación matemática de larga duración. ¿Pueden investigar las matemáticas los alumnos de ESO y Bachiller? Claro que pueden, si les proporcionamos los medios adecuados y la motivación necesaria. Nosotros hemos propuesto a nuestros alumnos de 1º y 2º de ESO diversas investigaciones y los resultados son, en algunos casos, sorprendentes. También es cierto, y sería una necedad negarlo, que no todos los alumnos desarrollan el mismo nivel de aprendizaje ni la misma actitud hacia las matemáticas, pero, la mayoría, muestran su satisfacción por el trabajo realizado, sobre todo, si es expuesto luego en la revista del Centro o en algún tablón público.

Un trabajo de investigación de larga duración es una actividad que el alumno desarrolla principalmente en su casa, fuera de horario escolar. Puede ser un trabajo individual o en grupo, resultando más satisfactorio para ellos el trabajo en pequeño grupo. Tres el mejor número de componentes. Entre seis y ocho semanas es la duración ideal, tiempo más que suficiente para realizar toda la tarea.

Un trabajo de investigación no tiene como principal objetivo que los alumnos aprendan contenidos nuevos; su principal objetivo es aplicar los contenidos que ya saben a situaciones problemáticas, a la resolución de puzzles, es decir, un trabajo de investigación es el contexto ideal para plantearse y resolver problemas.

El trabajo de investigación favorece también la tan nombrada y difícil enseñanza individualizada, pues no es necesario que todos los alumnos investiguen el mismo puzzle. Según sus capacidades, el profesor puede encargarle uno u otro. La comunicación posterior entre los alumnos de los resultados obtenidos puede ser muy enriquecedora.

Al terminar el trabajo, el alumno debe redactar un informe donde explicita el motivo de la investigación, los pasos dados, los resultados obtenidos, junto a todos los dibujos, fotografías u otro tipo de material que consideren importante. Para los alumnos más jóvenes, de 1º y 2º de ESO, es conveniente darles un guión muy detallado sobre qué queremos que hagan, qué preguntas deben responder, etc. Nosotros, en nuestra tarea docente, incluimos siempre un apartado en el guión para que opinen, emocionalmente, sobre el trabajo desarrollado y, si es un trabajo en grupo, otro apartado para que describan el trabajo de sus compañeros y los califiquen con una nota. Exponer públicamente el trabajo, mediante una conferencia para el resto de compañeros, es una experiencia importantísima. Lamentablemente, no se suele disponer del tiempo necesario, pero las veces que lo hemos hecho, han tenido un éxito formidable. El guión puede ser menos detallado conforme ascendamos de nivel.

La calificación del trabajo, la nota, no es un tema menor. En la literatura pedagógica hay, es cierto, pocas referencias a ella, tendiendo más a hablar de la evaluación como un proceso de perfeccionamiento del sistema de enseñanza y aprendizaje. Y, siendo esto básico, pero muy conocido, es necesario dedicar unas líneas a hablar de las notas, puesto que es un asunto que interesa mucho a los profesores y también a los alumnos. Obtener una buena nota por un trabajo bien hecho puede ser un factor muy motivante para según qué alumnos. Es necesario calificarlo y reflejar esa nota en su calificación del trimestre y/o en la nota final del curso. El Departamento debe reflejar en sus programaciones qué porcentaje de la nota final proviene de estos trabajos. Para leer más sobre trabajos de investigación y sobre cómo calificarlos, véase la introducción del libro de Bolt y Hobbs llamado *101 proyectos matemáticos*, Editorial Labor, 1991. La calificación de un trabajo puede hacerse de acuerdo a tres categorías, ponderadas según el nivel de los alumnos, que son:

1ª) *Presentación*: ¿informa? ¿los dibujos, tablas, argumentos, apartados empleados son claros? ¿se exponen claramente los resultados? ¿el orden del informe es lógico? ¿qué tal la ortografía?

2ª) *Contenidos*: ¿han resuelto verdaderamente el problema? ¿se han planteado problemas nuevos? ¿han encontrado conexiones matemáticas en su trabajo? ¿han realizado generalizaciones?

3ª) *Ayuda recibida*: ¿hasta qué punto el profesor ayudó? ¿han llevado ellos la iniciativa del trabajo? ¿han desarrollado estrategias personales?

El taller tendrá dos partes, cada una de ellas de una hora de duración. En la primera parte, pretendemos reproducir con los asistentes, la primera sesión del trabajo de investigación, es decir, la entrega de los puzles, la explicación de los objetivos, presentación del guión, etc. Se trata de presentar la metodología para trabajos de investigación individuales o en pequeños grupos. Tendrá las siguientes fases:

1ª) Presentación de los ponentes y del taller.

2ª) Entrega de material y primeras manipulaciones: Distribuiremos entre los asistentes dos puzles a cada uno para que los puedan manipular un poco y también un guión de trabajo similar al que damos a los alumnos para que empiecen a dar los primeros pasos. No pretendemos que los profesores realicen el trabajo completo de investigación, pero sí es bueno que se pongan en la piel del alumno durante un periodo corto de tiempo.

3ª) Propuesta metodológica: Evaluando someramente la etapa anterior, expondremos cómo usamos el material con los alumnos, cómo son los trabajos de investigación, qué objetivos se persiguen, a qué acuerdos hay que llegar en la primera sesión (fechas de entrega, grupos de trabajo...), cómo se pueden evaluar, etc.

En cualquiera de las fases descritas podrán establecerse y, de hecho, se promoverán, intercambios de ideas, diálogo, preguntas y respuestas, de forma que la experiencia resulte lo más gratificante y enriquecedora posible.

La segunda hora del taller estará dedicada a la propuesta de una metodología para grupos grandes (ocho o diez alumnos por grupo). El trabajo fuera de clase, con toda su riqueza, esconde, sin embargo, al profesor, cuáles son las reacciones de los alumnos ante los problemas, ante los puzzles, en el momento de su resolución. Por otro lado, el trabajo en grupo es un procedimiento necesario para nuestros alumnos, pues es el sistema de trabajo que se va imponiendo en la mayoría de empresas públicas y privadas (no olvidemos que nuestros alumnos de hoy serán mañana trabajadores). Para desarrollarlo, vamos a usar un puzzle llamado *Trapezio* (figura 1), conocido también como *Aros chinos*, de grandes dimensiones. El puzzle tiene unos ocho metros de largo, cada una de las anillas unos 80 cm de diámetro y el imperdible (la pieza problema) unos 6 metros de longitud. Las dimensiones del puzzle así como el peso de sus piezas obligan a la colaboración. El profesor puede observar en directo cuáles son las reacciones de los alumnos, cómo se reparten y asumen los diferentes papeles dentro del grupo y cómo aplican sus conocimientos en pro del objetivo común. En esta parte del taller, por tanto, dedicaremos un buen rato a que los profesores asistentes trabajen y se organicen en grupo de la mejor manera. Por último, terminaremos evaluando esta práctica y sus posibilidades de aprovechamiento en el aula.

